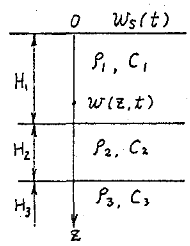
地震時における地中応力と地表面加速度の関係

京都大学 防災研究所　　正会員　土岐憲三

1. まえがき

地震時において地盤内に発生する応力やひずみを把握することは地震工学上重要な意義を持つと考えられるが，これらの量を直接に測定することはきわめて困難であり，何等かの間接的な手法で推定する方法によらざるを得ない。　そこで，この研究では地盤の持つ地震波形の遅延機構としての特性に着目すれば，地盤内での加速度，ひずみ，応力などの鉛直方向の分布が地表面で得られた加速度波形の自己相関関数により表現できることを利用し，これをいくつかの強震波形に適用した結果に基づいて，地中応力と地表面加速度との関係について一般性のある関係式を提示した。

2. 加速度とせん断応力の鉛直分布[1)]



図・1

図・1に示すような水平構造の成層地盤において，地盤内を伝播する地震波は弾性波であるとし，その伝播方向は鉛直軸に平行なものとする。このような場合，地表面からの深さが 50 m 程度までの地盤を対象とすれば，地盤内の任意の深さにおける震動振幅の2乗平均値は，地盤の構成に関する諸定数と，主要動の継続時間が5～6秒以上であるような地表面での地震記録の自己相関関数だけで表わされる。　いま，第1層内の弾性波速度を C_1 とし，地表面での加速度記録の自己相関関数を $\phi_s(\tau)$ とすれば，第1層内の地表面からの深さが z である場所での2乗平均の平方根（rms）$\sigma_{w_1}(z)$ は次式で表わされる。

$$\sigma_{w_1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma_s^2 + \phi_s(2z/c_1)} \qquad ----(1)$$

ここに，σ_s^2 は地表面での加速度の2乗平均であり，$\phi_s(0)$ で与えられる。　同様にして，ひずみの rms 値 $\sigma_{\varepsilon_1}(z)$ は地表での速度波形の自己相関関数 $\phi_v(\tau)$ とその2乗平均値 σ_v^2 により次式で表わされる。

$$\sigma_{\varepsilon_1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\,C_1}\sqrt{\sigma_v^2 - \phi_v(2z/C_1)} \qquad -----(2)$$

表・1　対象とした地震記録

Station	Date	Component	Max. accel. (gal)	Record length (sec)
El Centro	May 18, 1940	NS EW UD	359 223 278	30.0 30.0 12.0
Taft	July 21, 1952	N 69 W S 21 W UD	158 176 123	30.0 30.0 30.0
Hachinohe	May 16, 1968	NS	235	30.0
Miyako	May 16, 1968	EW	95	30.0
Muroran	May 16, 1968	NS	209	35.0

表・2　地盤の構成

Site	First Layer				Second Layer		
	H_1	V_p	V_s	ρg	V_p	V_s	ρg
El Centro	19	360	157	2.0	1,770	843	2.08
Taft	12	357	160	2.24	1,500	720	2.30

Site	H_1	Case	First Layer		Second Layer	
			V_s	ρg	V_s	ρg
Hachinohe	10	1	190	1.6	380	2.0
		2	210	1.8	350	1.8
		3	160	1.7	400	1.9
Miyako	10	1	210	1.8	1400	2.7
		2	250	1.9	1200	2.6
		3	180	1.8	1300	2.6
Muroran	14	1	220	1.8	1100	2.5
		2	180	1.8	1200	2.6
		3	250	1.9	1000	2.3

H_1 : m, V_p and V_s : m/sec, ρg : gr/cm^3

第2層以下の地盤に対しても同様な結果が得られるが，この手法を表・1に示した地震記録に対して適用した結果が図・2，3であり，地盤構成や各層内での弾性波速度，密度などを表・2に示した。
八戸，宮古，室蘭での弾性波速度はいずれも推定値であり，それぞれについて3組の速度と密度とを仮定した。　表・2に示した地盤条件と図・2，3の case 1，2，3 に対する結果とを比較対照すると，地盤内の弾性波速度の設定値の変動が加速度，せん断応力の分布に及ぼす影響は小さいことが明らかである。　したがって，地盤内の加速度とせん断応力の分布の推定に際しては弾性波速度に関し

ては概略の値さえわかればよく，また，各層の厚さの推定に際しての多少の変動は結果に大きな影響は及ぼさないことが他の計算例により確められている。 しかしながら，ひずみは応力とは弾性波速度の2乗に逆比例する関係にあるから，ひずみ振幅を議論する際には弾性波速度についての十分な検討が必要である。

3. 地中応力と加速度の関係

地盤中に発生するせん断応力は水平加速度と密接な関係にあることは図・2，3より明らかであるが，一方，式(2)では地中のひずみは地表面での速度の関数として表わされており，したがって地中応力も地表面速度に関係することになる。 そこで，以下においてこの両者の関係を検討する。

いま，時間関数$X(t)$の自己相関関数をR_xとし，Δtを微小量としてTaylor展開すれば，

$$R_x(\Delta t) = R_x(0) + \Delta t\, R'_x(0) + \frac{(\Delta t)^2}{2} R''_x(0) + \cdots \qquad ----(3)$$

である。 しかるに，$R'_x(0)$は常に0であるから$(\Delta t)^3$以上の項を省略すれば

$$R_x(\Delta t) - R_x(0) \doteqdot \frac{(\Delta t)^2}{2} R''_x(0) \qquad ----(4)$$

となる。 一方，式(2)中のσ_v^2は$\Phi_v(0)$で与えられるから，$2z/C_1$の値が小さい場合にはこのΦ_vに対して上の式(4)を適用すれば次式の関係が得られる。

$$\sigma_v(0) - \sigma_v\left(\frac{2z}{C_1}\right) \doteqdot -\frac{1}{2}\left(\frac{2z}{C_1}\right)^2 \Phi''_v(0) \qquad ----(5)$$

また，遅延時間が0での2回微分係数$\Phi''_v(0)$は速度波形を微分したものの2乗平均に負号を付したものであるから

$$\Phi''_v(0) = -\sigma_s^2 \qquad ---(6)$$

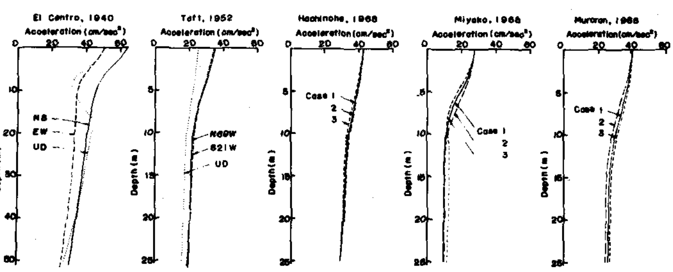
である。 これらの関係を式(2)に用いれば，結局次式が得られる。

$$\sigma_{\varepsilon_1}(z) = \frac{z}{C_1^2}\sigma_s \qquad ---(7)$$

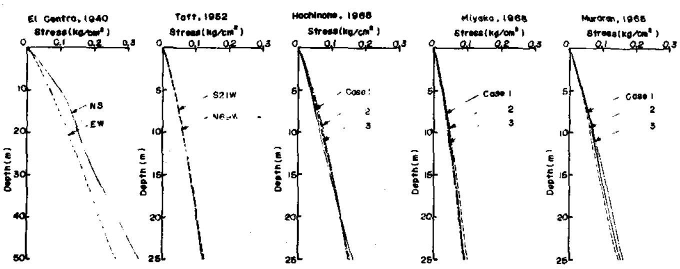
上の式(7)は軸ひずみ，せん断ひずみのいずれにも適用可能である。 いま，第1層内のせん断応力のrms分布をσ_{τ_1}と表わせば，式(7)に$\rho_1 C_1^2$を乗じることにより，次式が得られる。

$$\sigma_{\tau_1}(z) = \rho\sigma_s z \qquad ---(8)$$

この式は，地中におけるせん断応力



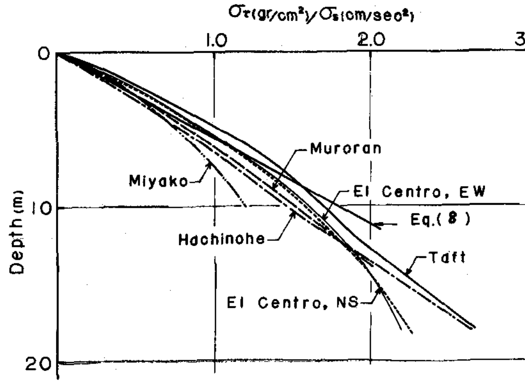
図・2　加速度のrms分布



図・3　せん断応力のrms分布

力の rms 値は地表面での加速度の rms 値と地盤の密度だけから知ることができ，その大きさは地表面からの深さに比例することを示している。この関係は軸線に直角な方向に一様な加速度で運動する剛な棒におけると同様であるが，これは地表面近くでは深さ方向における変形こう配が小さいことから，地盤はほぼ一様に近い運動をしているとみなしうることを意味している。

この関係を検証するために，図・3に示した地中でのせん断応力の case 1 に対する rms 分布曲線をそれぞれの場合に対応する地表面での加速度の rms 値で除して図示したのが図・4であり，これは地表面での単位加速度振幅あたりの地中でのせん断応力の大きさを表わしている。図中の直線は式 (8) 中の密度 ρ_1 を $\rho_1 g = 1.8\,gr/cm^3$ とした場合であり，深さ 10 m 程度までは式 (8) がよい近似を与えることがわかる。式 (8) の表現が許されるのは $2z/c_1$ が小さな場合であり，地表面での加速度波形の卓越周期を T_0 とするとき，$2z/c_1$ の値が $T_0/4$ より小さい場合，すなわち z が $T_0 c_1/8$ より小さい場合が式 (8) のおよその適用限界である。それ以上の深さに対してはせん断応力と地表面加速度の比例関係は弱まり，z/c_1 が卓越周期の 1/4 程度になれば地中でのせん断応力は地表面速度に比例するようになる。



図・4　せん断応力と地表面加速度の関係

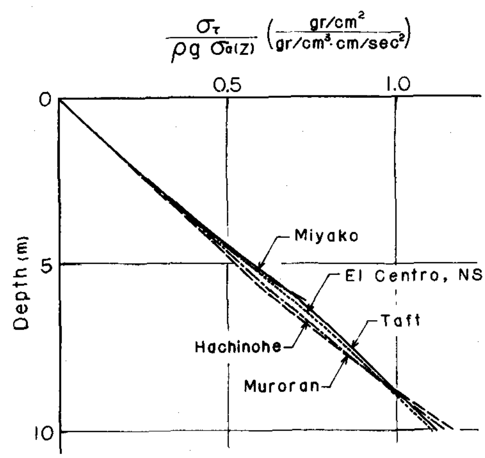
4. 地中せん断応力と地表面加速度の関係の近似表示式

式 (8) の関係は地表面近くでは良い近似を与えるが，地表面から遠ざかるにつれ，その近似度は悪くなる。これは，図・2からも明らかなように加速度分布が深さ方向に一様でなく，発生するひずみ，すなわち変形こう配も深いほど大きくなることによるものである。このような，深さによる震動振幅の違いと各地点での密度の相違の影響を除去するために，図・3に示したせん断応力の rms 分布曲線を，それぞれの場合の対応する深さでの加速度の rms 値で除し，さらに各地盤の密度で割って示したのが図・5である。この図上では，式 (8) の関係は原点を通り，こう配が 45° の直線で表わされるが，図中の曲線はいずれも深さとともにこの直線から離れ，z が $c_1 T_0/8$ 程度の深さでは約 10 % ほど大きな値をとることから，図中の曲線群に対して次の関係式が一般に成り立つものと考えてよかろう。

$$\sigma_\tau(z) = \left(1.0 - \frac{0.8\,z}{c_1 T_0}\right) \rho z \sigma_a(z) \quad \text{----} (9)$$

ここに，$\sigma_a(z)$ は加速度の rms 分布である。

一方，卓越周期が T_0 である地震波形の自己相関関



図・5　せん断応力と地中加速度の関係

数は遅延時間が $T_0/4$ の付近で関数値が 0 となることから，$z/c_1 \fallingdotseq T_0/8$ では式(2)により $\sigma_{w_1}(z)$ は

$$\sigma_{w_1}(z) = \sigma_s/\sqrt{2} \fallingdotseq 0.7\sigma_s \qquad (10)$$

となるはずである。 そこで，図・2に示した加速度の rms 分布曲線を地表面での rms 値で除した値を各場合とも $z/c_1 = T_0/8$ の深さまで示したのが図。6である。 この図はいずれの曲線も $z/c_1 = T_0/8$ を満足する深さにおける rms 値が地表面での rms 値の約 0.7倍であることを示しており，上述の関係を裏づけている。 そこで，これらの曲線を z が $c_1T_0/8$ の深さにおいて rms 値が地表面での値の 0.7倍となる直線で近似すれば

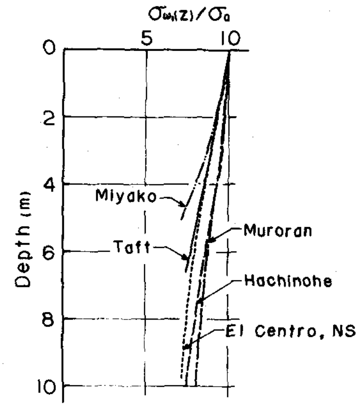


図.6 加速度の rms 分布

$$\sigma_{w_1}(z) = \left(1.0 - \frac{2.4z}{c_1T_0}\right)\sigma_s \qquad (11)$$

となる。 この式を加速度分布の一般形と考えれば，これを式(9)中の σ_a と置き換えればよい。 この際に，z/c_1T_0 は 1/8 以下の値であることを考慮して $(z/c_1T_0)^2$ の項を省略すれば次式が得られる。

$$\sigma_\tau(z) = \left(1.0 - \frac{1.6z}{c_1T_0}\right)\rho_1\sigma_s z \qquad \left(\frac{z}{c_1} < \frac{T_0}{8}\right) \qquad (12)$$

この式によれば，地中でのせん断応力の rms 分布が，地表面での加速度の rms 値と卓越周期，ならびに当該地盤の密度と横波速度とから推定できる．

以上の検討はすべて rms 値についてであるが，時間曲線に対しても同様な結果が得られることは次のようにして確められる。 すなわち，第1層内のひずみ曲線 $\varepsilon(z, t)$ は地表面での速度波形を $v_s(t)$ とすれば

$$\varepsilon(z, t) = \frac{1}{2c_1}\left\{v_s\left(t + \frac{z}{c_1}\right) - v_s\left(t - \frac{z}{c_1}\right)\right\} \qquad (13)$$

で表わされる。 しかるに，$w_s(t)$ を地表面での加速度曲線とすれば z/c_1 の値が小さい場合には

$$\frac{v_s(t + z/c_1) - v_s(t - z/c_1)}{2z/c_1} \fallingdotseq \frac{d}{dt}v_s(t) = w_s(t) \qquad (14)$$

である。 これを式(13)に用いればひずみ曲線 $\varepsilon(z, t)$ とせん断応力曲線 $\tau(z, t)$ はそれぞれ

$$\varepsilon(z, t) = \frac{z}{c_1^2}w_s(t) \quad , \qquad \tau(z, t) = \rho z w_s(t) \qquad (15), (16)$$

となる。 式(16)は地中のあまり深くない所でのせん断応力の時間曲線は近似的には地表面での加速度波形と相似であることを示しており，その近似度は地表面に近いほど高い。 式(10)と式(8)の相似性により，上述の rms 値についての検討結果は時間曲線ならびに最大値についてもあてはまることがわかる。

参考文献

1) Toki, K. : Inference of Seismic Ground Motion by Autocovariance Function, Proceedings of the First Canadian Conference on Earthquake Engineering Research, (in printing).