有限要素法による粘弾性体の震動解析

正会員　電力中央研究所　渡辺啓行

1. 緒言

Turner, Clough, Martin, and Topp により，最初に体系づけられた有限要素法は，構造力学に強力な解析手段を提供し，広い応用範囲をもっている。その特徴的な利点の一つは，現実の構造物の多くに見られるように，幾何学的形状の複雑さのため解析解が求められない場合でも，比較的容易に近似解を求められることである。もう一つの利点は，材料の非均質性を容易に計算に導入できることである。これらの特徴を，偏微分方程式の差分解法にもたせるには多くの困難を伴なう。

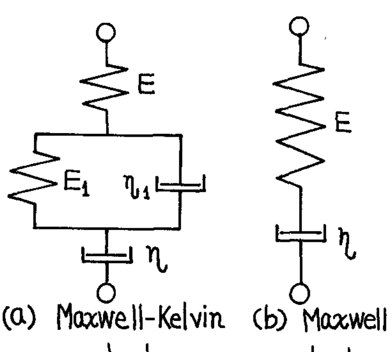
他方，コンクリート，粘性土などは，その動的性質が粘弾性体に類似していると言われている。[1)~5)] したがって，コンクリート構造物ならびに土構造物などの地震応答を，より具体的に，かつ，より合理的に数値解析しようとする場合，材料を粘弾性体としてとりあつかう必要が生ずる。

以上を考え併せると，粘弾性体の振動問題を有限要素法により解析できるならば，構造物の耐震設計法に極めて有益な手段が提供されることになる。しかし，現在までのところ，粘弾性体の振動問題に有限要素法を適用する手法は，未だ確立されているとは言えない。

本報告は，有限要素法に粘弾性物性を導入する一方法，ならびに，有限要素法による振動解析において，初期値問題を解く場合，剛性Matrix の逆行列を不要とする一積分法を提案したもので，解法の妥当性を数値実験により確かめ，その上で，粘弾性物性に荷重依存性があるような一般的非弾性問題への適用の可能性を示したものである。

2. 計算理論

(1) 剛性Matrixへの粘弾性物性の導入法



図－1　粘弾性モデル

有限要素の形状は種々あり，有限要素系への理想化の方法も種々あるが，ここでは，多くの方面で頻繁に使われていて，応用範囲の広い三角形の要素による平面ひずみ問題を例として議論を進める。他の有限要素系に対しても全く同じ議論が成立する。また，粘弾性モデルとしては，コンクリートおよび土質材料の動的性質をかなり良好に模擬する Maxwell-Kelvin 体（図－1(a)）および Maxwell体（図－1(b)）を採ることとする。これらが重複した複雑な粘弾性モデルに対しても，以下の議論を容易に拡張できる。ただし，粘弾性は，動的弾性率のみに適用され，ポアッソン比には時間の効果はないものと仮定する。

任意の要素の動的弾性率をE_0，動的ポアッソン比をν_0 とし，[N]を節点座標のみから成る（6，3）行列，その転置行列を$[N]^T$とすると，要素剛性Matrix は周知のごとく，つぎのようになる。

$$[k] = A[N]^T[D][N] \qquad \text{--- (1)}$$

ここに，[k]は要素剛性Matrix，Aは要素の面積であり，[D]は次式で与えられる行列である。

$$[D] = \frac{E_0}{(1-2\nu_0)(1+\nu_0)}\begin{pmatrix} 1-\nu_0 & & \text{Sym.} \\ \nu_0 & 1-\nu_0 & \\ 0 & 0 & (1-2\nu_0)/2 \end{pmatrix} \qquad \text{--- (2)}$$

要素の節点変位ベクトルを$\mathbb{U}$とし，節点反力ベクトルを$\mathbb{F}$とすれば，弾性体における$\mathbb{F}$と$\mathbb{U}$との関係は，つぎのように表わされる。

$$\mathbb{F} = [k]\,\mathbb{U} \qquad \text{--- (3)}$$

ここで，粘弾性物性を以下のように導入する。

(i) Maxwell-Kelvin 体の場合

粘弾性定数を図-1のように定義して，$p\,(=d/dt)$を微分演算子とすると，次式を得る。

$$1/E_0 = 1/E + 1/(\eta p) + 1/(E_1+\eta_1 p) \qquad \text{--- (4)}$$

E_0は，つぎのようにも書ける。

$$E_0 = E\cdot\left\{1-\frac{\gamma}{p+\alpha}-\frac{\delta}{p+\beta}\right\} = E\cdot\mathcal{D}^{-1}(t) \qquad \text{--- (5)}$$

ここで，$\alpha\sim\delta$は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix} = \dfrac{1}{2}\left\{\left[\dfrac{E+E_1}{\eta_1}+\dfrac{E}{\eta}\right]\mp\sqrt{\left(\dfrac{E+E_1}{\eta_1}+\dfrac{E}{\eta}\right)^2-4\dfrac{EE_1}{\eta\eta_1}}\right\} \\ \gamma = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left[\left(\dfrac{E}{\eta}+\dfrac{E}{\eta_1}\right)\alpha-\dfrac{EE_1}{\eta\eta_1}\right],\quad \delta=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left[\dfrac{EE_1}{\eta\eta_1}-\left(\dfrac{E}{\eta}+\dfrac{E}{\eta_1}\right)\beta\right] \end{cases} \qquad \text{--- (6)}$$

(6), (5)式を(3)式に代入した場合，行列[N]，およびν_0は時間と無関係な定数行列であるから，(3)式は，

$$\mathbb{F} = [k^*]\cdot\mathcal{D}^{-1}(t)\,\mathbb{U} \qquad \text{--- (7)}$$

となる。ここに，$[k^*]$は，(1)式でE_0のかわりにEとおいた行列である。(7)式右辺における$\mathcal{D}^{-1}(t)\,\mathbb{U}$なる項は，差分解法において，畑野および著者[6]が既に用いた手法と全く同様に扱う。すなわち，計算しようとする全時間を細く分割し，任意の時刻tとそのときの変位をそれぞれ次式で表わしておく。

$$\begin{cases} t = n\cdot\Delta t \\ \mathbb{U}(t) = \mathbb{U}^{(n)} \end{cases} \qquad \text{--- (8)}$$

ここで，新しい変数を次式により定義する。

$$\bar{\mathbb{U}}^{(n)} = \mathbb{U}^{(n)}/(p+\alpha) \simeq \{(1-e^{-\alpha\cdot\Delta t})/\alpha\}\,\mathbb{U}^{(n)} + e^{-\alpha\cdot\Delta t}\,\bar{\mathbb{U}}^{(n-1)} \qquad \text{--- (9)}$$

$$\bar{\bar{\mathbb{U}}}^{(n)} = \mathbb{U}^{(n)}/(p+\beta) \simeq \{(1-e^{-\beta\cdot\Delta t})/\beta\}\,\mathbb{U}^{(n)} + e^{-\beta\cdot\Delta t}\,\bar{\bar{\mathbb{U}}}^{(n-1)} \qquad \text{--- (10)}$$

(9), (10)式を用いて$\mathcal{D}^{-1}(t)\,\mathbb{U}$をもとめて(7)式に代入すると，(7)式はつぎのようになる。

$$\mathbb{F}^{(n)} = [k^*]\,\mathbb{U}^{(n)} - \mathbb{R}_1^{(n)} \qquad \text{--- (11)}$$

ここで，右辺第1項は瞬間弾性に相当する項を表わし，第2項は，時間履歴に伴なう応力の緩和を示す式であり，次のように，$\bar{\mathbb{U}}^{(n)}$，$\bar{\bar{\mathbb{U}}}^{(n)}$の関数として与えられる。

$$\mathbb{R}_1^{(n)} = \gamma[k^*]\overline{\mathbb{U}}^{(n)} + \delta[k^*]\overline{\overline{\mathbb{U}}}^{(n)} \qquad \text{--- (12)}$$

(ii) Maxwell 体の場合

動的弾性率は次式で与えられる。

$$1/E_0 = 1/E + 1/(\eta p) \qquad \text{--- (13)}$$

節点変位と節点反力との関係式は，(11)式と同様に導かれ，つぎのようになる。

$$\mathbb{r}^{(n)} = [k^*]\mathbb{u}^{(n)} - \mathbb{R}_2^{(n)} \qquad \text{--- (14)}$$

ここに，$\mathbb{R}_2^{(n)}$ は Maxwell体の応力緩和項であり，次式で与えられる。

$$\mathbb{R}_2^{(n)} = \lambda[k^*]\tilde{\mathbb{u}}^{(n)}, \quad \lambda = E/\eta \qquad \text{--- (15)}$$

$$\tilde{\mathbb{u}}^{(n)} = \mathbb{u}^{(n)}/(p+\lambda) \simeq \{(1-e^{-\lambda\Delta t})/\lambda\}\mathbb{u}^{(n)} + e^{-\lambda\Delta t}\,\tilde{\mathbb{u}}^{(n-1)} \qquad \text{--- (16)}$$

全体構造としての節点変位ベクトルを$\mathbb{U}^{(n)}$，節点外力を$\mathbb{R}^{(n)}$，任意の節点を共有する要素の緩和力$\mathbb{R}_1^{(n)}$および$\mathbb{R}_2^{(n)}$の成分のうち，この節点に寄与するものを全て加えたものをその節点に相当する位置での新成分とするベクトルを$\mathbb{H}^{(n)}$とすると，これらの間には，つぎの関係が成立する。

$$\mathbb{R}^{(n)} = [K^*]\mathbb{U}^{(n)} - \mathbb{H}^{(n)} \qquad \text{--- (17)}$$

ここに，$[K^*]$は，Eを弾性率とした場合の弾性体における全体構造剛性Matrixである。(17)式が，有限要素法による粘弾性体の基礎方程式である。

(2) 振動方程式とその積分法

質量行列を[M]，慣性力以外の節点外力ベクトルを$\mathbb{R}^{*(n)}$とすると，$\mathbb{R}^{(n)}$はつぎのようになる。

$$\mathbb{R}^{(n)} = -[M]\ddot{\mathbb{U}}^{(n)} + \mathbb{R}^{*(n)} \qquad \text{--- (18)}$$

(18)式を(17)式に代入し，$\mathbb{U}^{(n)}$を分割して，擾乱を受ける支点に属する部分$\mathbb{U}_2^{(n)}$とその他$\mathbb{U}_1^{(n)}$とで表式する。また，行列[M]，$[K^*]$，およびベクトル$\mathbb{R}^{*(n)}$，$\mathbb{H}^{(n)}$も$\mathbb{U}_1^{(n)}$，$\mathbb{U}_2^{(n)}$の元数に適合するように分割する。外力は作用しないものとすると，$\mathbb{R}^{*(n)}$は慣性力による支点反力のみとなる。結局，(17)式は，

$$\begin{pmatrix} [M]_{11} & [M]_{12} \\ [M]_{21} & [M]_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\mathbb{U}}_1^{(n)} \\ \ddot{\mathbb{U}}_2^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [K^*]_{11} & [K^*]_{12} \\ [K^*]_{21} & [K^*]_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{U}_1^{(n)} \\ \mathbb{U}_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{H}_1^{(n)} \\ \mathbb{H}_2^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{R}_2^{*(n)} \end{pmatrix} \qquad \text{--- (19)}$$

となる。上式を展開した第２式は支点反力$\mathbb{R}_2^{*(n)}$を決定する式であり，第一式が主振動方程式である。

$$[M]_{11}\ddot{\mathbb{U}}_1^{(n)} + [M]_{12}\ddot{\mathbb{U}}_2^{(n)} + [K^*]_{11}\mathbb{U}_1^{(n)} + [K^*]\mathbb{U}_2^{(n)} = \mathbb{H}_1^{(n)} \qquad \text{--- (20)}$$

主振動方程式(20)において，$\ddot{\mathbb{U}}_1^{(n)}$を中央差分で置き換えると次式を得る。

$$\mathbb{U}_1^{(n+1)} = 2\mathbb{U}_1^{(n)} - \mathbb{U}_1^{(n-1)} + \Delta t^2[M]_{11}^{-1}\{-[M]_{12}\ddot{\mathbb{U}}_2^{(n)} - [K^*]_{11}\mathbb{U}_1^{(n)} - [K^*]_{12}\mathbb{U}_2^{(n)} + \mathbb{H}_1^{(n)}\} \qquad \text{--- (21)}$$

(21)式において，$\ddot{\mathbb{U}}_2^{(n)}$，$\mathbb{U}_2^{(n)}$は擾乱入力として与えられるから，初期値$\mathbb{U}_1^{(n-1)}$，$\mathbb{U}_1^{(n)}$および$\mathbb{H}_1^{(n)}$が与えられれば$\mathbb{U}_1^{(n+1)}$が求まる。$\mathbb{U}^{(n+1)}$が求まれば各要素ごとに，$\overline{\mathbb{u}}^{(n+1)}$，$\overline{\overline{\mathbb{u}}}^{(n+1)}$，$\tilde{\mathbb{u}}^{(n+1)}$が求まり，$\mathbb{R}_1^{(n+1)}$，$\mathbb{R}_2^{(n+1)}$が求まる。したがって，$\mathbb{H}_1^{(n+1)}$を決定できる。以上の計算を初期値から始めて step by step に行なって行けば解を得る。(21)式を用いることの利点は，剛性Matrix の逆行列計算を全く行なわなくて済むことである。$\ddot{\mathbb{U}}_1^{(n)}$を中央差分で近似することは，Newmark の β-scheme[7]ないしは，Chan-Cox-Benfield の scheme[8] において，β=0 とした場合に相当する。

(3) 安定解析

(21)式により，step by step に振動解析を行なうとき，時間刻みΔtは構造物の物性ならびに有限要素系への理想化の方式に応じて発散解を生じないものでなければならない。そのため，Δtに与える条件として，von Neumannの条件[9]を適用してみる。この場合，与え得る最大の動的弾性率をもつ弾性体につき解析しておけば十分である。Mass Matrix を[M]，剛性Matrixを[K]とすると，振動方程式ならびに加速度項を中央差分公式で置換した方程式は，つぎのように表式できる。

$$[M]\ddot{\mathrm{U}}^{(n)}+[K]\mathrm{U}^{(n)}=0 \Rightarrow \mathrm{U}^{(n+1)}-2\mathrm{U}^{(n)}+\mathrm{U}^{(n-1)}=-(\Delta t)^2[M]^{-1}[K]\mathrm{U}^{(n)} \qquad \text{--- (22)}$$

ここで，$[\Phi]=-(\Delta t)^2[M]^{-1}[K]$ とおくと，(20)式はつぎのように書き換えられる。[E]を単位行列として

$$\begin{pmatrix} \mathrm{U}^{(n+1)} \\ \mathrm{U}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2[E]+[\Phi] & -[E] \\ [E] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{U}^{(n)} \\ \mathrm{U}^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad \text{--- (23)}$$

von Neumann の条件は，“(21)式の右辺係数行列の最大固有値の絶対値が1を越えない”ということと等置できる。振動系(20)式の最小固有周期をT_{min} とすると，これは次式と同値であることを導ける。

$$\Delta t \leqq T_{min}/\pi \qquad \text{--- (24)}$$

3. 数値実験

理論解の判っている具体的な構造物に上述した計算理論を適用しその結果を理論解と比較してみることとする。理論解として，粘弾性角柱に対する畑野の定常解[10]を採用する。これは曲げ振動解であるので，有限要素系も曲げ用のものを使うこととする。共振時振動モードに関する実験結果を表1に示す。また plane strain 条件で三角 element に分割した粘弾性角柱の自由振動につき，(22)式を検証したところ良好な結果を得た。詳細は，当日スライドで説明したい。

表-1 角柱の共振時振動モード

height	theory (cm)	test (cm)	error %
h	72.721	69.925	-3.84
5h/6	56.208	53.887	-4.12
4h/6	39.970	38.209	-4.40
3h/6	24.866	23.702	-4.69
2h/6	12.148	11.546	-4.96
h/6	3.316	3.142	-5.25

参考文献

1) 畑野 正，“周期的圧縮荷重によるコンクリートの挙動”，土木学会論文集，No84，1962年
2) 畑野 正，渡辺啓行，“動的地盤係数の測定—粘土地盤への一適用—”，同上，No 145，1967年
3) 渡辺啓行，畑野 正，“動的地盤係数の測定—載荷板の寸法効果—”，同上，No 178，1970年
4) 畑野 正，渡辺啓行，“粘土・砂・砕石の動的・静的粘弾性常数…”，同上，No 164，1969年
5) 畑野 正，渡辺啓行，“コンクリートの動的粘弾性定数ならびに…”，同上，No 184，1970年
6) 畑野 正，渡辺啓行，“アース・ダムの震動解析”，同上，No 164，1969年
7) Newmark, N. M., “A Method of Computation for Structural Dynamics”, proc ASCE No EM3, 1959年
8) Chan, S.P., Cox, H.L., and Benfield, W.A., “Transient Analysis of Forced Vibrations …” J. Royal Aero. Soc. vol.66, 1962
9) 寺沢寛一編，“自然科学者のための数学概論”応用編，岩波書店，pp 342～349
10) 畑野 正，“粘弾性体の振動”，土木学会論文集，No 110，1964年