地震時における桁橋内の曲げ波動伝播について

九州大学工学部　正員　小坪清真
建設省土木研究所　正員　○原田譲二
九州大学大学院　学生員　鳥野　清

1．まえがき

著者等は前論(1),(2)において、長大橋梁の各基礎に作用する地震波の振巾，位相が同一でない場合には、この影響を考慮して応答計算を行なわねばならない事を示したが、その場合，地盤中の地震波の伝播速度は考慮しながら，橋桁に対しては modal analysis を採用して波動論的な取扱いはしなかった。しかし、長大な橋梁の地震応答を求めるには橋桁内を伝わる波動の影響をも考慮しなければ合理的ではないと思われる。

実際の構造物に対して波動論的取扱いをする事は極めて困難で、現在そのような計算例は余り見当らない。これは土木構造物が複雑な形状をしているので、その内部を伝わる波動も複雑であり、種々な波の重ね合わせであるので応答計算に莫大な手間を要するためであろう。本論では橋桁の波動が曲げ波動で表わされるような簡単な場合について、波動論および modal analysis による解析結果を比較し、これを模型実験によって検証したものである。

2、Modal analysis による解法

今、スパン l の両端単純支持梁の一端が任意の外乱 $\varphi(t)$ を受けた場合を考える。梁の任意の点 x の変位 y を次式で表わす。式中 a_s はS次の一般座標，$\sin s\pi x/l$ はS次の振動型である。

$$y(x,t)=\sum_{s=1} a_s \sin\frac{s\pi x}{l} \tag{1}$$

a_s に対する一般力 Q_s は次式で表わされる。

$$Q_s=-\int_0^l \frac{w}{g}\ddot{\varphi}(t)\cdot f(x)\cdot \sin\frac{s\pi x}{l}\,dx \tag{2}$$

ここに，w は梁の単位長重量，$f(x)$ は梁の一端における外乱が $\varphi(t)=1$ なる時の梁の静的弾性変形曲線である。単純梁の場合には $f(x)$ は次式で表わされる。

$$f(x)=\frac{1}{l}(l-x) \tag{3}$$

したがって、これを(2)式に入れて Q_s を求め，Lagrange の方程式を用いて、a_s に関する微分方程式を出せば次式となる。式中，h_s，n_s はS次の振動に対する減衰常数，固有円振動数である。

$$\ddot{a}_s+2h_s n_s\dot{a}_s+n_s^2 a_s=-\frac{2}{\pi s}\ddot{\varphi}(t) \tag{4}$$

梁の x 点のひずみは次式で求められる。e は梁の中立軸よりの縁距離である。

$$\varepsilon(x)=-\frac{\pi^2 e}{l^2}\sum_{s=1} a_s s^2 \sin\frac{s\pi x}{l} \tag{5}$$

３、波動論による解法

今、一端($x=0$)が単位跳躍速度 $\dot{\phi}(t)=1$ で表わされる外乱を受けた場合の梁の応答は、梁の曲げ変形の微分方程式

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \qquad \left(k^2=\frac{E\rho^2 g}{w_0},\ w_0\text{は梁の単位体積重量},\ \rho\text{は断面の回転半径}\right) \tag{6}$$

を次の境界条件

$$\begin{aligned} &t<0 : \quad y=0 \\ &t>0 : \quad x=0 \ \text{で} \ \ y=t \ , \ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \\ &\qquad\quad\ \ x=l \ \text{で} \ \ y=0 \ , \ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \end{aligned} \tag{7}$$

で解けば求められる。(6)式をラプラス変換し、$\mathcal{L}(y)=Y$ とおけば、(6)式は

$$\frac{d^4 Y(x,s)}{dx^4}+\frac{s^2}{k^2}Y(x,s)=0 \tag{8}$$

となり、境界条件(7)式は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &x=0 \ \text{で} \ \ Y(0,s)=\frac{1}{s^2} \ , \ \frac{d^2Y(0,s)}{dx^2}=0 \\ &x=l \ \text{で} \ \ Y(l,s)=0 \ , \ \frac{d^2Y(l,s)}{dx^2}=0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(7)式の一般解は次式で表わされる。

$$Y(x,s)=e^{-\sqrt{\frac{s}{2k}}x}\left\{A\cos\sqrt{\frac{s}{2k}}x+B\sin\sqrt{\frac{s}{2k}}x\right\}+e^{\sqrt{\frac{s}{2k}}x}\left\{C\cos\sqrt{\frac{s}{2k}}x+D\sin\sqrt{\frac{s}{2k}}x\right\} \tag{10}$$

条件(9)式を用いて任意定数A，B，C，Dを決定し、若干の計算を行って $Y(x,s)$ を求め、さらに $Y(x,s)$ を x で２回微分することにより、曲率のラプラス変換が次のように求められる。

$$\begin{aligned} \kappa(x,s)=\frac{1}{sk}\Big\{&e^{-\sqrt{\frac{s}{2k}}x}\cdot\sin\sqrt{\frac{s}{2k}}x-e^{-\sqrt{\frac{s}{2k}}(2l-x)}\cdot\sin\sqrt{\frac{s}{2k}}(2l-x)+e^{-\sqrt{\frac{s}{2k}}(2l+x)}\cdot\sin\sqrt{\frac{s}{2k}}(2l+x) \\ &-e^{-\sqrt{\frac{s}{2k}}(4l-x)}\cdot\sin\sqrt{\frac{s}{2k}}(4l-x)+e^{-\sqrt{\frac{s}{2k}}(4l+x)}\cdot\sin\sqrt{\frac{s}{2k}}(4l+x)-\cdots\cdots\Big\} \end{aligned} \tag{11}$$

(11)式を逆変換して、曲率 $\kappa(x,t)$ を求めると

$$\begin{aligned} \kappa(x,t)=\frac{2}{\pi k}\int_0^\infty\frac{e^{-2ktu^2}}{u}\Big\{&\cos ux\cdot\sinh ux-\cos u(2l-x)\cdot\sinh u(2l-x)+\cos u(2l+x)\cdot\sinh u(2l+x) \\ &-\cos u(4l-x)\cdot\sinh u(4l-x)+\cos u(4l+x)\sinh u(4l+x)-\cdots\Big\}du \end{aligned} \tag{12}$$

(12)式の才１項は一端単純支持の半無限梁の曲率の応答を表わし、才２項以下は両支持端における曲げ波動の反射による応答を意味することになる。(12)式の無限積分を有限積分に変換すれば、結局任意点のひずみ $\varepsilon(x,t)$ が次式のように得られる。

$$\varepsilon(x,t)=-\frac{e}{k}\Big[\{C(z_0)-S(z_0)+C(z_2)-S(z_2)+\cdots\}-\{C(z_1)-S(z_1)+C(z_3)-S(z_3)+\cdots\}\Big] \tag{13}$$

ここに、

$$z_0=\frac{x^2}{4kt}\ ,\quad z_1=\frac{(2l-x)^2}{4kt}\ ,\quad z_2=\frac{(2l+x)^2}{4kt}\ ,\quad z_3=\frac{(4l-x)^2}{4kt}\ ,\quad \cdots\cdots$$

で，$C(Z)$，$S(Z)$ は Fresnel の積分と呼ばれるもので次式で表わされる。

$$Z=\frac{x^2}{4kt}\quad とすれば\quad \left.\begin{aligned} C(Z)&=\int_0^Z\frac{\cos y}{\sqrt{2\pi y}}\,dy\\ S(Z)&=\int_0^Z\frac{\sin y}{\sqrt{2\pi y}}\,dy\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

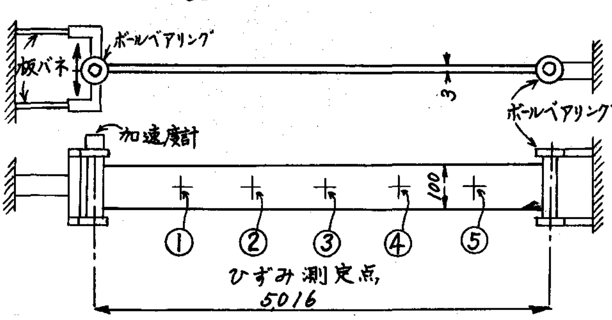
梁の一端($x=0$)における外乱加速度が $\ddot{\varphi}(t)$ で与えられる場合には、Duhamel の積分を用いて、ひずみ $\varepsilon(x,t)$ が次式のように得られる。

$$\varepsilon(x,t)=-\frac{e}{k}\int_0^t\ddot{\varphi}(\tau)\left[\begin{aligned}&\{C(Z_0)-S(Z_0)+C(Z_2)-S(Z_2)+\cdots\cdots\}\\ -&\{C(Z_1)-S(Z_1)+C(Z_3)-S(Z_3)+\cdots\cdots\}\end{aligned}\right]_{t=t-\tau}d\tau\tag{15}$$

4、模型実験装置

模型ばりは一端に外乱を与えた場合の桁内の曲げ波動伝播がよく判るように，横方向に曲げ剛性の小さい模型を製作するため材料に厚さ3mmのアルミニューム板を用い，桁高10cm，橋長5mとした。これを図-1のように両端にボールベアリングをつけて両端ヒンジとし、一端は水平方向に板バネで支え、外乱を与えられるようにした。桁の曲げ波動の伝播は、桁の両側面の等間隔5点にひずみゲージをはり、曲げひずみの伝播を測定してもとめた。

図-1　模型ばり



なお、この模型橋を modal analysis によって解析する場合に必要な桁の固有円振動数および減衰常数は magnet による一点加振による共振振動数と自由減衰振動から求めた。表-1は模型の固有振動周期と減衰常数の測定値である。

一端における外乱は図-1に示すようにベアリングの上に抵抗線式加速度計を設置し、外乱加速度 $\ddot{\varphi}(t)$ を測定した。

表-1

次数	固有周期 T_s	減衰常数 h_s
1	1.012 sec	0.0146
2	0.494	0.0221
3	0.273	0.0143
4	0.176	0.0123
5	0.121	0.0114
6	0.0856	0.0142
7	0.0681	0.0079
8	0.0531	0.0064
9	0.0426	0.0053
k	5.295×10^4 cm²/s	

5、波動論、modal analysis および模型実験により得られた結果

上述の模型ばりに対して一端に外乱加速度を加えたときの各点の曲げひずみの時間的経過を図-2の実線で示した。一方、実験で得られた外乱加速度と表-1の諸常数を用いて modal analysis で模型桁の各点のひずみの時間的経過を計算したものが図-2の点線である。また、波動論により模型桁の $l/6$ 点(①)と $l/2$ 点(③)に対してひずみの時間的経過を計算したものが図-2の一点鎖線である。これらの結果から次の事項が判明した。

(1)、波動論、modal analysis，模型実験の三者による曲げひずみの値は、きわめてよく一致している。

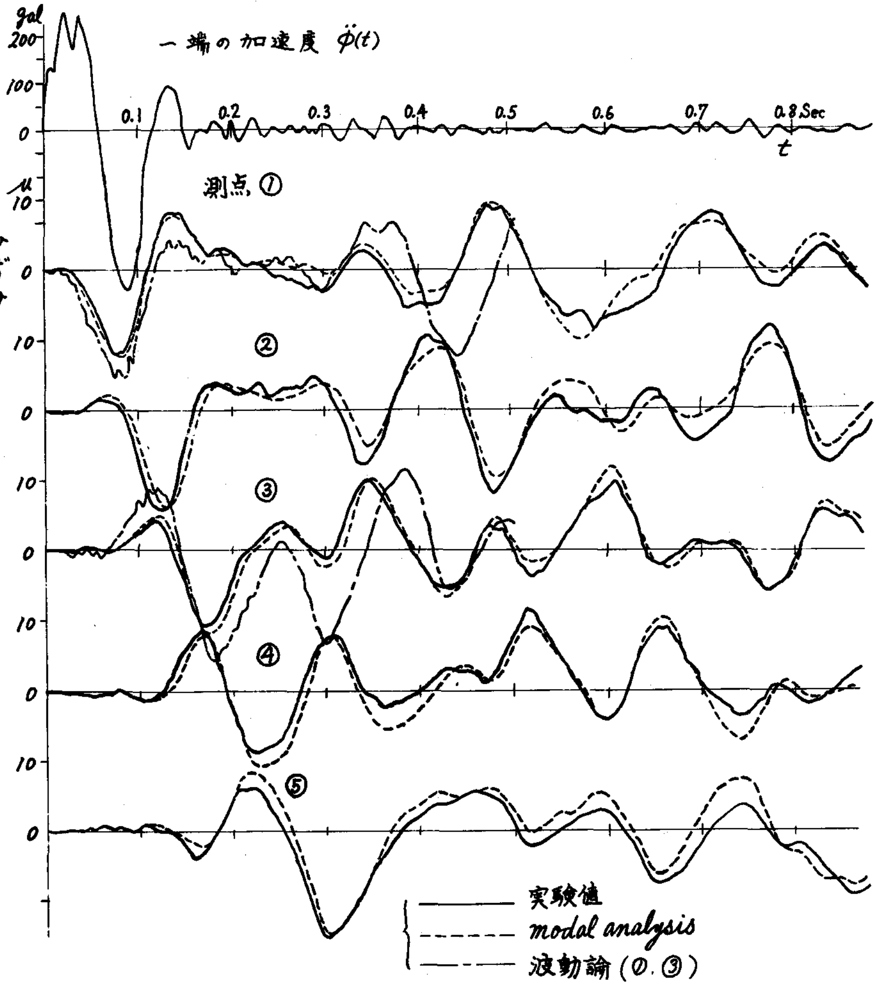
(2)、はりに生じる曲げ波動は外乱加速度の周期に近い固有周期の振動型が卓越する。

(3)、modal analysis によっても、桁内の曲げ波動の伝播現象を表わすことができる。

それには、外乱加速度の周期より小さい固有周期の次数まで採用しなければならない。

(4)、本実験例では曲げ波動の伝播速度は約16.9 m/secであるが、これは、模型の5次の波動速度 $v=5k\pi/l$ $=16.6$ m/sec にほとんど等しい。

図-2 ひずみの時間的変化



(5)、実橋においても、外乱加速度の周期を考慮に入れて、十分高次の次数まで採用して、modal analysisを用いることができるが、この場合、曲げ波動の速度には一定の限界があるので、必ずしも、modal analysisで波動現象を解析できるとは限らない。この点についてはさらに研究されなければならない。

文 献

(1)小坪・泉田「ディビダーグ橋の地震応答に及ぼす地動位相差の影響」九大工学集報 Vol.40, No.6。

(2)小坪・泉田「橋桁の横振動に及ぼす波動伝播の影響」土木学会第23回年次学術講演会.
昭和43年10月。