

地震動のフーリエ位相特性に関する一考察

徳島大学工学部 正員 沢田 勉  
中電技術コンサルタント 正員 〇古川 智

1. まえがき 地震動記録をフーリエ変換すると、フーリエ振幅とフーリエ位相が各周波数ごとに計算されるが、従来、フーリエ位相は一樣ランダムとして取り扱われ、その情報は十分に活用されていない。大崎らによる研究で着目している位相差分布は、フーリエ位相から地震波の非定常性の情報を取り出したものと考えられる。本研究では、この情報に対して理論的考察を加え、シミュレーション手法への応用例を示す。

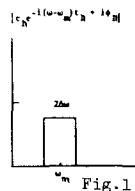
2. 位相差分布 継続時間が $T_0$ の地震 $x(t)$ を有限フーリエ級数に展開すれば、次のようになる。(1)

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \exp(i\omega_k t) = \sum_{k=0}^{N-1} |C_k| \exp(i\omega_k t + i\varphi_k) \quad (1)$$

ここで、 $N$ は $x(t)$ の離散時間点の数、 $C_k$ は複素フーリエ係数で $C_{N-k} = C_k^*$  ( $k=1, 2, \dots, N/2-1$ )なる性質をもつ。また、 $\omega_k$ は角振動数、 $\varphi_k$ はフーリエ位相角である。大崎らは、時計回りに測った $0 \sim -2\pi$ の間にある位相差分 $\Delta\varphi_k$ を  $\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k \quad : k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2)$  として、地震波の位相差分布(位相差分の頻度分布)を求め、その形状が地震波の振幅の包絡形と類似している点を指摘した。本報告では、この情報の持つ意味を明確にするために以下のような考察を行った。

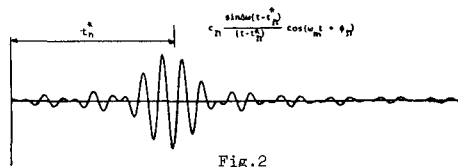
(1) 理論的考察 まず、次のようなフーリエスペクトルをもつ周期波群を考える。

$$F_n(\omega) = \begin{cases} a_n \exp\{-i(\omega - \omega_m) t_n^* + i\varphi_n\} & : \omega_m - \Delta\omega \leq \omega \leq \omega_m + \Delta\omega \\ a_n \exp\{-i(\omega + \omega_m) t_n^* - i\varphi_n\} & : -\omega_m - \Delta\omega \leq \omega \leq -\omega_m + \Delta\omega \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$



$F_n(\omega)$ は、一定のフーリエ振幅 $a_n$ をもち、その時間領域の波形は次式となる。

$$f_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ = \frac{2}{\pi} a_n \frac{\sin \Delta\omega(t - t_n^*)}{(t - t_n^*)} \cos(\omega_m t + \varphi_n) \\ = Q_n(t) \cos(\omega_m t + \varphi_n) \quad (4)$$



ここで、 $Q_n(t)$ は包絡関数であり、次式で表わされる。

$$Q_n(t) = \frac{2}{\pi} a_n \frac{\sin \Delta\omega(t - t_n^*)}{(t - t_n^*)} \quad (5)$$

$Q_n(t)$ は、 $t = t_n^*$ で最大値を持ち、 $|t - t_n^*|$ の増加とともに減少する。したがって、 $t_n^*$ は周期波群 $f_n(t)$ の到着時間とみなせる。 $|F_n(\omega)|$ 、 $f_n(t)$ の一例をFig. 1, 2に示す。

次に、式(1)の右辺の各項と式(3)の対応を示すため、両式のフーリエ振幅の関係を次式で近似する。

$$a_n = (|C_k| + |C_{k+1}|) / 2 \quad : n = k/2 \quad (6)$$

$$|C_k| \approx |C_{k+1}| \approx a_n \quad (7)$$

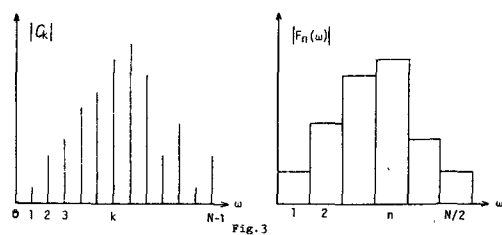
これを図示するとFig. 3となり、バンド幅 $2\Delta\omega$ を持つ周期波群に変換される。

このようにした後、式(1)の各項を式(3)のフーリエスペクトルと対応させると、次の関係がえられる。

$$\left. \begin{aligned} a_n \exp\{-i(\omega_k - \omega_m) t_n^* + i\varphi_n\} &= a_n \exp(i\varphi_k) \\ a_n \exp\{-i(\omega_{k+1} - \omega_m) t_n^* + i\varphi_n\} &= a_n \exp(i\varphi_{k+1}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式(8)から周期波群の到着時間 $t_n^*$ を求めると、 $t_n^* = \frac{\varphi_k - \varphi_{k+1}}{\omega_{k+1} - \omega_k} = \frac{-\Delta\varphi_k}{\Delta\omega}$

ここで、角振動数の増分 $\Delta\omega$ を継続時間 $T_0$ より $\Delta\omega = 2\pi/T_0$ と表わすと、



$$\therefore -\Delta\varphi_n = t_n^* \Delta\omega = t_n^* 2\pi / T_0 \quad (9)$$

式(9)が示すように、位相差分 $\Delta\varphi_n$ は関数 $x(t)$ の継続区間 $[0, T_0]$ を $[-2\pi, 0]$ に変換した区間で、 $x(t)$ に含まれる周期波群の到着時間を表わす。したがって、位相差分 $\Delta\varphi_n$ の頻度分布を求めることによって、継続時間内の周期波群の到着の多い所は波形 $x(t)$ の強振部に対応するので、位相差分分布は $x(t)$ の時間変動に対応することがわかる。

### (2) 数値計算結果による考察

位相差分の定義より、その領域を考えると次のようになる。

$$\Delta\varphi_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n \quad ; \quad -\pi \leq \varphi_n, \varphi_{n+1} \leq \pi$$

$$\therefore -2\pi \leq \Delta\varphi_n \leq 2\pi$$

しかし、大崎らの研究では、時計回りに測った $0 \sim 2\pi$ の間に半調減少するように $\Delta\varphi_n$ を定義している。 $(-2\pi \leq \Delta\varphi_n \leq 0)$

この定義より実地震動記録の位相差分を計算し、記録波形と対応させて示したのが、Fig. 4.5である。なお、図では波形との対応を考え、横軸の符号を逆にして示してある。各位相差分分布は、対応する振幅の包絡形の時間的変動をよくとらえていることがわかる。しかし、Fig 5の位相差分分布において、 $5.50 \sim 6.28 \text{ rad}$ に現われる分布は包絡形との対応がない。この現象は、本来非周期関数である実地震動記録をフーリエ変換操作によって周期関数として取り扱ったために現われるリング効果の現象と似ており、位相差分分布の頭と末端がつかぎった形状として現われる。そこで、位相差分の領域を $-2\pi \sim 2\pi$ で定義した分布図とその分布の $0 \sim 2\pi$ の領域に対応させた波形をFig. 6に示す。

$0 \sim 2\pi$ の領域の分布形状は波形の変動をよくとらえているのに対し、 $-2\pi \sim 0$ の領域には前述した現象が $-1.57 \sim 0.0 \text{ rad}$ 付近で現われている。

### 3. シミュレーション手法への応用例

個々の実地震動を再現するシミュレーション手法としては、前述した式(1)の右辺のICに実地震記録のフーリエ振幅を与え、 $\varphi_n$ には実地震記録の位相差分分布に従う $\Delta\varphi_n$ を発生して初期値 $\varphi_0 = 0$ に次々に加えて求めたフーリエ位相を与え、逆フーリエ変換する方法が考えられる。さらに一歩進めて、地震特性(マニフェード、震央距離)と地盤条件から模擬波を統計的に予測するためのシミュレーションモデル

では、実地震記録のフーリエ振幅、位相差分分布をモデル化する必要がある。本報告では、地震動の統計的予測に用いるモデルとして、位相差分分布を対数正規分布でモデル化し、フーリエ振幅は各振動数のうち対数軸上でほぼ等間隔にとった15個の振動数に対する縦距値を代表値として、それ以外の振動数については線形補間して求めるモデル化を行った。こうして発生した模擬波の一例をFig. 7に示す。この例では、模擬波は実地震動の全体的強度および振幅の非正常性をよく再現している。最後に、本研究を進めるに当たり、適切な御助言をいただいた徳島大学工学部宇都宮英考教授に謝意を表します。なお、数値計算に用いた強震記録は、京都大学工学部交通土木工学科後藤研究室所蔵のものを借用させていただいた。記して謝意を表します。

参考文献 (1) 大崎, 他: 地震波の位相特性とその応用に関する研究, 日本地震工学シンポジウム, 1978.

(2) Wong, H.L. & Trifunac, M.D. : Synthesizing Realistic Ground Motion Accelerograms, Univ. of Southern California Rep., 1978.

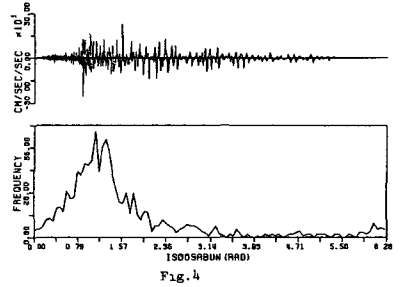


Fig. 4

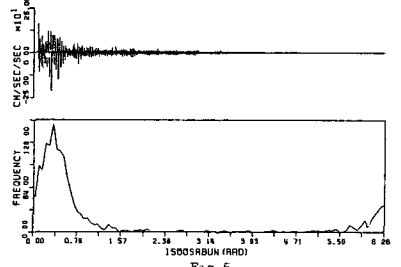


Fig. 5

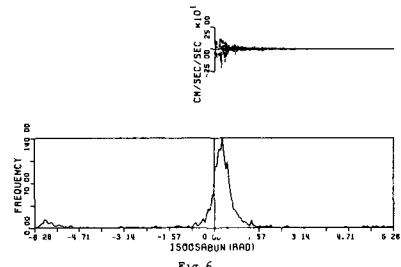


Fig. 6

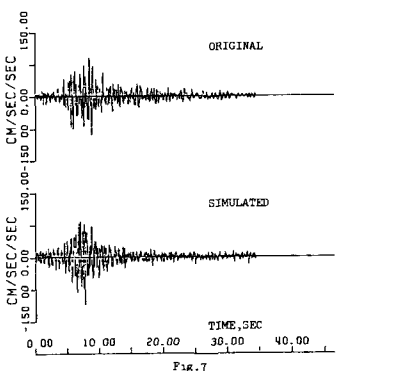


Fig. 7