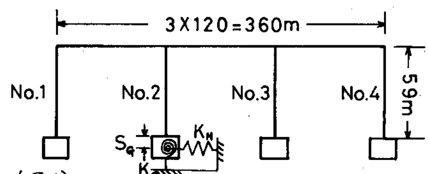
高橋脚橋の地震応答性状 ——動的サブストラクチュア法の適用——

岡山大学　正　員　竹宮宏和
○京都大学　学生員　井上幸一

1．まえがき．本論文は，動的サブストラクチュア法により多スパン高橋脚橋の橋軸直角水平方向を対象とした地震応答解析を行ったものである。同構造物の動的解析には，通常の有限要素法が直接適用できるが，コンピュータの容量，演算時間により，分割要素数がある程度制限される。そのため解の精度もそれに応じたものとなる。そこで解析対象構造物を部分構造系に分け，それぞれをモード解析して全体系の運動方程式をたてる。これにより，比較的多くの分割要素を採ることが可能となる。

2．運動方程式．運動方程式を書き表わせば，橋桁部に関して，橋桁と橋脚の接合部における絶対変位を$\{x_j\}_G$，それ以外の内部座標での絶対変位を$\{x_i\}_G$として

$$\begin{bmatrix}[M_{jj}]&[M_{ji}]\\ [M_{ij}]&[M_{ii}]\end{bmatrix}_G\begin{Bmatrix}\{\ddot{x}_j\}\\ \{\ddot{x}_i\}\end{Bmatrix}_G+\begin{bmatrix}[C_{jj}]&[C_{ji}]\\ [C_{ij}]&[C_{ii}]\end{bmatrix}_G\begin{Bmatrix}\{\dot{x}_j\}\\ \{\dot{x}_i\}\end{Bmatrix}_G+\begin{bmatrix}[K_{jj}]&[K_{ji}]\\ [K_{ij}]&[K_{ii}]\end{bmatrix}_G\begin{Bmatrix}\{x_j\}\\ \{x_i\}\end{Bmatrix}_G=\begin{Bmatrix}\{F_j\}\\ \{0\}\end{Bmatrix}_G \quad (1)$$



（図1）

ここに$\{F_j\}_G$は接合部における断面力である。なお，上式では質量，減衰，剛性マトリックスを上記の変位に応ずるようにサブマトリックスに分割している。いま，変位$\{x_i\}_G$を橋桁に外力が作用せず接合部の変位によって生ずる変位$\{x_i^u\}_G$，および接合部の変位が固定拘束されている場合の外力によって生ずる変位$\{x_i^c\}_G$とに分離する。

$$\{x_i^u\}_G=[\beta]_G\{x_j\}_G \qquad ただし\ [\beta]_G=-[K_{ii}]_G^{-1}[K_{ij}]_G$$

この変換をまず(1)に対して行い，$\{x_j\}_G=\{\bar{x}_j\}_G+\{x_j^g\}$，$\{\bar{x}_i^c\}_G=\{\bar{x}_i^c\}_G+\{x_i^g\}$とおくと

$$\left[\begin{array}{c:c}[M_{jj}]_G+[\beta]_G^T[M_{ij}]_G+[M_{ji}]_G[\beta]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G[\beta]_G & [M_{ji}]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G\\ \hdashline [M_{ij}]_G+[M_{ii}]_G[\beta]_G & [M_{ii}]_G\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\{\ddot{\bar{x}}_j\}\\ \{\ddot{\bar{x}}_i^c\}\end{Bmatrix}_G+\left[\begin{array}{cc}[0]&[0]\\ \hdashline [0]&[C_{ii}]_G\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\{\dot{\bar{x}}_j\}\\ \{\dot{\bar{x}}_i^c\}\end{Bmatrix}_G+\left[\begin{array}{c:c}[K_{jj}]_G+[K_{ji}]_G[\beta]_G & [0]\\ \hdashline [0] & [K_{ii}]_G\end{array}\right]\begin{Bmatrix}\{\bar{x}_j\}\\ \{\bar{x}_i^c\}\end{Bmatrix}_G$$

$$=\begin{Bmatrix}\{F_j\}\\ \{0\}\end{Bmatrix}_G-\left\{\begin{array}{c}([M_{jj}]_G+[\beta]_G^T[M_{ij}]_G+[M_{ji}]_G[\beta]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G[\beta]_G)\{\ddot{x}_j^g\}+([M_{ji}]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G)\{\ddot{x}_i^g\}\\ \hdashline ([M_{ij}]_G+[M_{ii}]_G[\beta]_G)\{\ddot{x}_j^g\}+[M_{ii}]_G\{\ddot{x}_i^g\}\end{array}\right\}\begin{pmatrix}^{-}は相対変位\\ ^{g}は地動を表わす\end{pmatrix} \quad (3)$$

GIRDER & PIER			
	$E(t/m^2)$	$I(m^4)$	$W(t/m)$
GIRDER	2.1×10^7	76.9	66
PIER 1	2.69×10^6	4720	117
PIER 2	2.69×10^6	1826	257
PIER 3	2.69×10^6	4720	117
PIER 4	2.69×10^6	4720	117

FOUNDATION	
$M(t\cdot s^2/m)$	1.378×10^3
$J(t\cdot m\cdot s^2)$	1.498×10^5
$K_H(t/m)$	1.395×10^6
$K_R(t\cdot m)$	6.078×10^7
$S_G(m)$	2.5

（表1）

となる。次に，橋脚の総数をmとする。各橋脚について表わした運動方程式をすべての橋脚について書き下し，これを1つのマトリックス方程式で表わせば，次のようになる。（$^{-}$および^{g}は上と同様）

$$\begin{bmatrix}[M]_{P_1}&&0\\ &[M]_{P_2}&\\ 0&&\ddots\ [M]_{P_m}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\ddot{\bar{x}}\}_{P_1}\\ \{\ddot{\bar{x}}\}_{P_2}\\ \vdots\\ \{\ddot{\bar{x}}\}_{P_m}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}[C]_{P_1}&&0\\ &[C]_{P_2}&\\ 0&&\ddots\ [C]_{P_m}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\dot{\bar{x}}\}_{P_1}\\ \{\dot{\bar{x}}\}_{P_2}\\ \vdots\\ \{\dot{\bar{x}}\}_{P_m}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}[K]_{P_1}&&0\\ &[K]_{P_2}&\\ 0&&\ddots\ [K]_{P_m}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\bar{x}\}_{P_1}\\ \{\bar{x}\}_{P_2}\\ \vdots\\ \{\bar{x}\}_{P_m}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F\}_{P_1}\\ \{F\}_{P_2}\\ \vdots\\ \{F\}_{P_m}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}[M]_{P_1}&&0\\ &[M]_{P_2}&\\ 0&&\ddots\ [M]_{P_m}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\ddot{x}^g\}_{P_1}\\ \{\ddot{x}^g\}_{P_2}\\ \vdots\\ \{\ddot{x}^g\}_{P_m}\end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで$\{\bar{x}\}_{P\ell}$は桁部との接合点における変位$\{\bar{x}_j\}_{P\ell}$とその他の点における変位$\{\bar{x}_i\}_{P\ell}$に分け，また，$\{F\}_{P\ell}$もそれに応じて分けると，それぞれ次のようになる。

$$\{\bar{x}\}_{P\ell}=\begin{Bmatrix}\{\bar{x}_j\}\\ \{\bar{x}_i\}\end{Bmatrix}_{P\ell}\ ,\qquad \{F\}_{P\ell}=\begin{Bmatrix}\{F_j\}\\ \{0\}\end{Bmatrix}_{P\ell} \quad (5)$$

さらに，$\{\bar{x}\}_{P\ell}=[\Phi]_{P\ell}\{\delta\}_{P\ell}$とモード座標に変換し，$[\Phi]_{P\ell}$をまず(5)の$\{\bar{x}\}_{P\ell}$に応じて分割する。すなわち，

$$\begin{Bmatrix}\{\bar{x}_j\}\\ \{\bar{x}_i\}\end{Bmatrix}_{P\ell}=\begin{bmatrix}[\Phi_j]\\ [\Phi_i]\end{bmatrix}_{P\ell}\{\delta\}_{P\ell} \quad (6)$$

$[\Phi]_{P\ell}$が正規化されており，減衰マトリックスがこれにより対角化されるものと仮定すると運動方程式は

$$[I]\{\ddot{\delta}\}_P+[2h\omega]_P\{\dot{\delta}\}_P+[\omega^2]_P\{\delta\}_P=[\Phi_j]_P^T\{F\}_P-[\Phi]_P^T[M]_P\{\ddot{x}^g\}_P \quad (7)$$

の形に書ける。ただし，hは減衰定数，ωは固有振動数であり，各マトリックスおよびベクトルは全橋脚につい

て表わしたものである。さて，橋桁の運動方程式(3)において，変位$\{x_i^c\}_G$については$\{x_i^c\}_G=[\Phi_i^c]_G\{q_i^c\}_G$とモード座標に変換し，$\{x_j\}_G$に関しては，接合部における適合条件により橋脚のモード座標によって$\{x_j\}_G=[\Phi_j]_P\{q\}_P$と表される。したがって，運動方程式は次のように橋桁と橋脚のモード座標で表される。

$$
\left[\begin{array}{c:c}
[\Phi_j]_P^T([M_{jj}]_G+[\beta]_G^T[M_{ij}]_G+[M_{ji}]_G[\beta]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G[\beta]_G)[\Phi_j]_P & [\Phi_j]_P^T([M_{ji}]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G)[\Phi_i^c]_G \\ \hdashline
[\Phi_i^c]_G^T([M_{ij}]_G+[M_{ii}]_G[\beta]_G)[\Phi_j]_P & [I]
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c}\{\ddot{q}\}_P \\ \{\ddot{q}_i^c\}_G\end{array}\right\}
+\left[\begin{array}{cc}[0] & [0] \\ [0] & [2h\omega]\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c}\{\dot{q}\}_P \\ \{\dot{q}_i^c\}_G\end{array}\right\}
$$

$$
+\left[\begin{array}{c:c}
[\Phi_j]_P^T([K_{jj}]_G+[K_{ji}]_G[\beta]_G)[\Phi_j]_P & [0] \\ \hdashline
[0] & [\omega^2]_G
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c}\{q\}_P \\ \{q_i^c\}_G\end{array}\right\}
=\left\{\begin{array}{c}[\Phi_j]_P^T\{F_j\}_G \\ \hdashline \{0\}\end{array}\right\}
-\left\{\begin{array}{c}[\Phi_j]_P^T([M_{jj}]_G+[\beta]_G^T[M_{ij}]_G+[M_{jc}]_G[\beta]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G[\beta]_G)\{\ddot{x}_j^g\}+[\Phi_j]_P^T([M_{ji}]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G)\{\ddot{x}_i^g\} \\ \hdashline
[\Phi_i^c]_G^T([M_{ij}]_G+[M_{ii}]_G[\beta]_G)\{\ddot{x}_j^g\}+[\Phi_i^c]_G^T[M_{ii}]_G\{\ddot{x}_i^g\}\end{array}\right\}
\quad (8)
$$

式(7),(8)から断面力を消去して全体系の運動方程式は次のようになる。

$$
\left[\begin{array}{c:c}
[I]+[\Phi_j]_P^T([M_{jj}]_G+[\beta]_G^T[M_{ij}]_G+[M_{jc}]_G[\beta]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G[\beta]_G)[\Phi_j]_P & [\Phi_j]_P^T([M_{ji}]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G)[\Phi_i^c]_G \\ \hdashline
[\Phi_i^c]_G^T([M_{ij}]_G+[M_{ii}]_G[\beta]_G)[\Phi_j]_P & [I]
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c}\{\ddot{q}\}_P \\ \{\ddot{q}_i^c\}_G\end{array}\right\}
+\left[\begin{array}{cc}[2h\omega]_P & [0] \\ [0] & [2h\omega]_G\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c}\{\dot{q}\}_P \\ \{\dot{q}_i^c\}_G\end{array}\right\}
$$

$$
+\left[\begin{array}{c:c}
[\omega^2]_P+[\Phi_j]_P^T([K_{jj}]_G+[K_{ji}]_G[\beta]_G)[\Phi_j]_P & [0] \\ \hdashline
[0] & [\omega^2]_G
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c}\{q\}_P \\ \{q_i^c\}_G\end{array}\right\}
=-\left\{\begin{array}{c}[\Phi_j]_P^T[M]_P\{\ddot{x}^g\}_P+[\Phi_j]_P^T([M_{jj}]_G+[\beta]_G^T[M_{ij}]_G+[M_{jc}]_G[\beta]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G[\beta]_G)\{\ddot{x}_j^g\}+[\Phi_j]_P^T([M_{ji}]_G+[\beta]_G^T[M_{ii}]_G)\{\ddot{x}_i^g\} \\ \hdashline
[\Phi_i^c]_G^T([M_{ij}]_G+[M_{ii}]_G[\beta]_G)\{\ddot{x}_j^g\}+[\Phi_i^c]_G^T[M_{ii}]_G\{\ddot{x}_i^g\}\end{array}\right\}
\quad (9)
$$

3．解析例．図1に示す3スパン高橋脚橋モデルに対し，固有値解析および地震応答解析を行った。橋脚下端の支持条件としては，固定およびフーチング―地盤バネ系の2種類設けた。このモデルの諸元を表1に示す。なお減衰定数は各次モード5%とした。固有値解析の結果得られた固有振動数およびそれに対応したモードを図2に示す。フーチング―地盤バネ系を橋脚下端に接続することで，固定の場合と比較して固有振動数が大きく低下し，モードも特に1次で著しく変化していることが認められる。また，伊豆沖地震のスペクトルを用いて算出したRMS値およびEl Centro地震を入力した場合の最大応答変位を図3に示す。なお，いずれの地震についても最大加速度は200 galにしてある。この図からも橋脚の支持条件によって，橋桁の変形状態が異っていることが認められる。以上のような相違点はフーチングの回転によるものと考えられる。

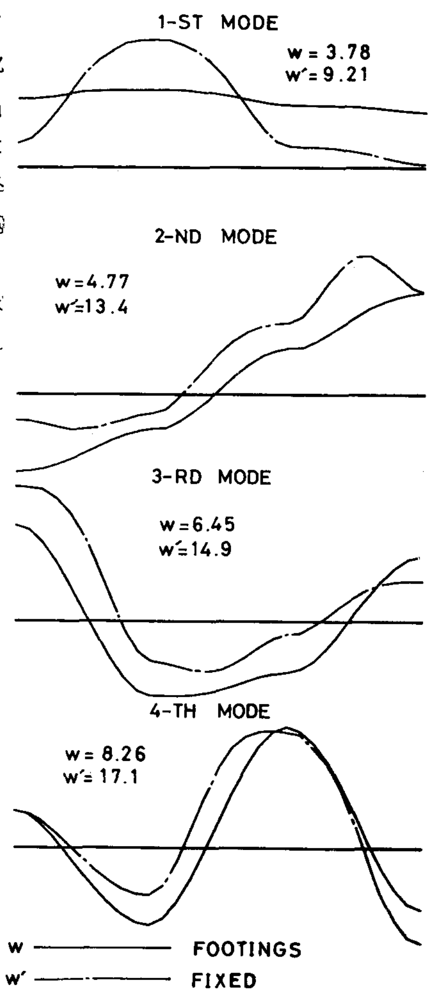


図2

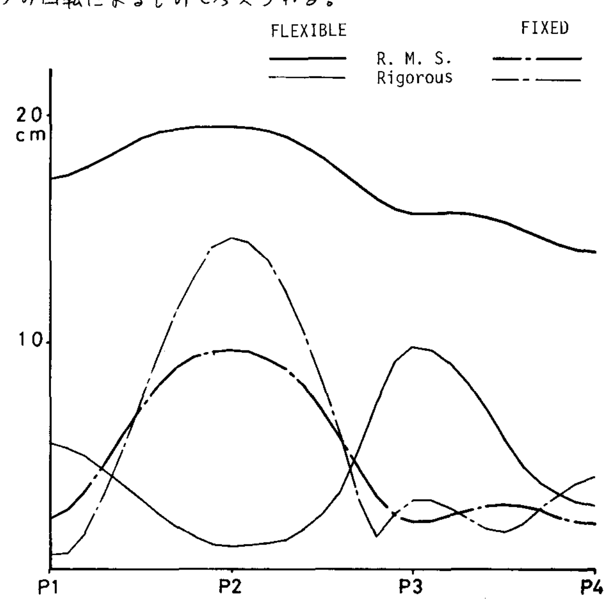


図3

参考文献；Fukreti & Feng: Dynamic Substructuring For Alternating Subsystem, J.Eng. Mech. Div., ASCE Oct., 1978