# β法による平面骨組構造物の地震応答解析

岩手大　学生員○島津　雅洋
岩手大　正　員　宮本　裕

振動解析の方法にはいろいろな方法があるが，そのなかでもシミュレーションという手法は非常に一般性がありどのような問題にも適用できるところから，広く用いられている。これに対して，運動方程式に対する厳密解としてのDuhamel積分を近似する方法がある。この方法は，数値積分法である前者の方法より正確で安定した値を得ることができるが，大型計算機を利用して多くの自由度をもつ構造物の地震応答解析には，計算時間が長くなるという欠点がある。そこで，シミュレーションのなかでもNewmarkのβ法，とくに$\beta=1/4$の平均加速度法によって地震応答解析を行ない，それがDuhamel積分法で計算した結果とどれだけ違うか，計算時間の差はどれだけか，いくつかの力学モデルについて比較してみた。

## 1．1質点系の場合の絶対加速度の応答解析

### (a) Duhamel積分法による絶対加速度の応答解析

fig-1のような1質点系の力学モデルにおいて，質点の質量をm，弾性係数をk，減衰係数をCとし，時刻tにおける質点の変位を$y(t)$，地盤の変位を$z(t)$とすると，次式のような運動方程式が成り立つ。

$$m\ddot{y}(t)+C\dot{y}(t)+ky(t)=-m\ddot{z}(t) \quad \text{-----}(1)$$

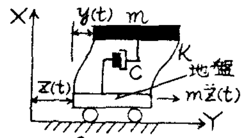

fig-1

ここで，$\omega=\sqrt{K/m}$，$h=C/2m\omega$とおると，

$$\ddot{y}(t)+2h\omega\dot{y}(t)+\omega^2 y=-\ddot{z}(t) \quad \text{-----}(2)$$

上式の厳密解はDuhamel積分の形で表わされ，絶対加速度$\ddot{y}(t)+\ddot{z}(t)$は次式のようになる。

$$\ddot{y}(t)+\ddot{z}(t)=\left(\omega/\sqrt{1-h^2}\right)\int_0^t \ddot{z}(\tau)\,e^{-h\omega(t-\tau)}\cos\left\{\sqrt{1-h^2}\,\omega t(t-\tau)+\tan^{-1}\frac{2h^2-1}{2h\sqrt{1-h^2}}\right\}d\tau \quad \text{------}(3)$$

### (b) β法（$\beta=1/4$の平均加速度法）による絶対加速度の応答解析

平均加速度法は，式－(2)に次の2式を加えたものを基本式とし，シミュレーションの形で近似的に解いていくものである。

$$\dot{y}(t+\Delta t)=\dot{y}(t)+\frac{1}{2}\{\ddot{y}(t)+\ddot{y}(t+\Delta t)\}\Delta t,\quad y(t+\Delta t)=\dot{y}(t)\Delta t+\frac{1}{4}\{\ddot{y}(t)+\ddot{y}(t+\Delta t)\} \quad \text{---------}(4)$$

式－(2)と式－(4)とから，$y(t)$，$\dot{y}(t)$，$\ddot{y}(t)$と，$y(t+\Delta t)$，$\dot{y}(t+\Delta t)$，$\ddot{y}(t+\Delta t)$との間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} y(t+\Delta t) \\ \dot{y}(t+\Delta t) \\ \ddot{y}(t+\Delta t) \end{bmatrix}=\frac{}{8+2\omega\Delta t(4h+\omega\Delta t)}\begin{bmatrix} 8(1+h\omega\Delta t) & 4\Delta t(2+h\omega\Delta t) & 2\Delta t^2 & -2\Delta t^2 \\ -4\omega^2\Delta t & 2(4-\omega^2\Delta t^2) & 4\Delta t & -4\Delta t \\ -8\omega^2 & -8\omega(2h+\omega\Delta t) & -2\omega\Delta t(4h+\omega\Delta t) & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t+\Delta t) \end{bmatrix} \quad \text{----}(5)$$

したがって，$y(0)$，$\dot{y}(0)$，$\ddot{y}(0)$，$\ddot{z}(t)$が既知であれば，これらの値を式－(5)の右辺に代入することで，$\Delta t$秒後の$y$，$\dot{y}$，$\ddot{y}$がわかる。さらにこれらの値を式－(5)の右辺に代入すれば，$2\Delta t$秒後の$y$，$\dot{y}$，$\ddot{y}$がわかる．同じようにして，結局，$\Delta t$秒ごとの$y$，$\dot{y}$，$\ddot{y}$が計算される。$\ddot{z}(t)$が既知であるから$\ddot{y}(t)+\ddot{z}(t)$も順次計算される．

### (c) 絶対加速度の応答解析におけるDuhamel積分法とβ法の比較

$\omega=1.0\,\mathrm{sec}$，$h=0.1$の1質点系の力学モデルを想定し，$\ddot{z}(t)=100\cos(2.62t)$ $(0\leq t\leq 0.36)$として，2つの方法により絶対応答加速度を求めた。刻み時間間隔$\Delta t$を，0.005sec，0.010sec，0.015sec，0.020secとかえて計算を行ない，それらの結果をグラフで表わしたのがfig-2である。これによると，β法による計算では，$\Delta t$が0.005sec～0.015secのときはほとんど同 値

をとるが，$\Delta t$=0.020secのときには，途中よりかなり違った値をとりはじめている。これに対して，Duhamel積分法による計算では，$\Delta t$が増すにしたがってほぼ等差的に値が減少しているが，前者の方法に比べて安定した値を示しているようである。尚，$\Delta t$の値はβ法（$\beta=1/4$）の安定条件を満足している。

また，地盤の加速度$\ddot{z}(t)$の値を1968年の十勝沖地震の記録からとり，2つの方法でそれぞれ計算を行ない比較したところ，$\Delta t$=0.020sec，$\omega$=1.0sec，$h$=0.1において，β法に位相遅れがみられたもののだいたい同じような結果を得た。

2　多質点系の場合の地震応答解析

多質点系の平面骨組構造物の地震応答解析にあたっては，計算の能率化のために一貫したプログラムにより全ての計算処理を行なわせた。fig-3は，β法を用いたときの応答計算の手順を示したものである。

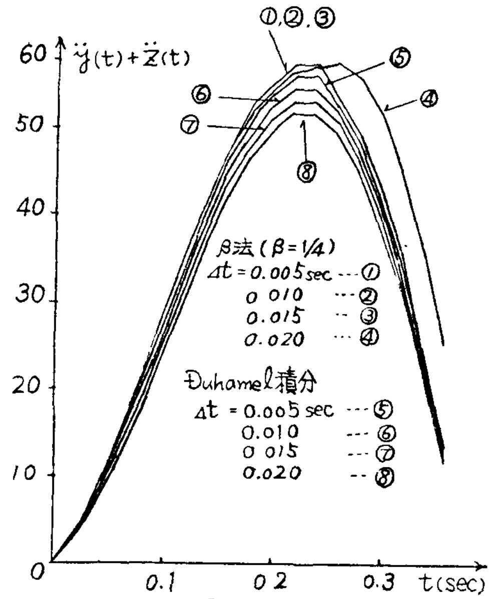


fig-2

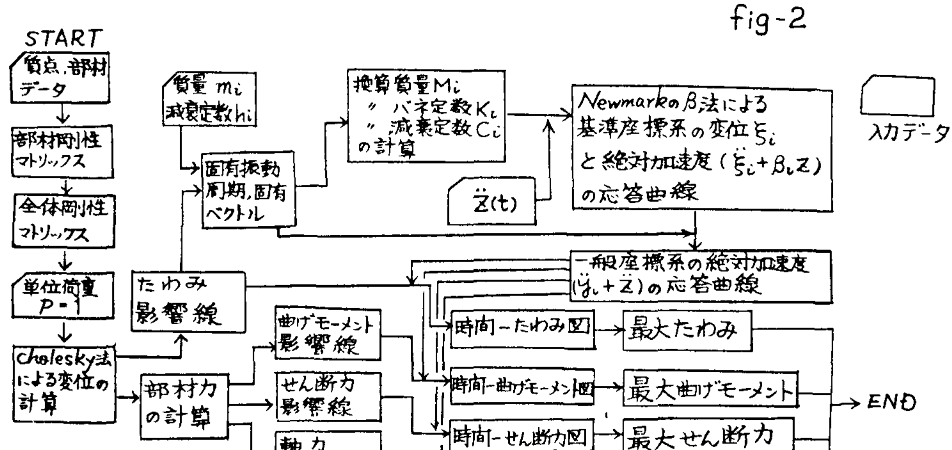


fig-3

この電算プログラムにより，9質点の3径間連続桁を力学モデルとして，1968年の十勝沖地震の地震波による応答解析を行ない，同じことをDuhamel積法を用いた電算プログラムにより計算したものと比較した。この場合の刻み時間間隔$\Delta t$=0.02sec，$h$=0.1としたところ，β法に位相の遅れがみられたがほぼ同じような値をとった。また，この計算には東北大学大型計算機センターを利用したが，各アクティビティのうち実行にかかった時間は，β法において17.3sec，Duhamel積分法において61.7secであった。

この研究をすすめていく過程で，東北大学建築学科助教授　柴田明徳先生，同土木工学科修士課程　佐藤恒明君から貴重な助言と資料をいただいた。ここに感謝の意を表します。

参考文献　宮本裕：「斜張橋の地震応答特性に関する研究」（土木学会論文報告集，192号，1971）
尹川隼人「有限要素法による振動解析」（サイエンス社）