

不確定構造系の時刻歴地震応答解析

Seismic Response Analysis of Structures with Uncertain Properties
in Time Domain

中村秀明*・石田邦洋**・三浦房紀***・浜田純夫****

by Hideaki NAKAMURA, Kunihiro ISHIDA, Fusanori MIURA and Sumio HAMADA

Time-history analyses have been carried out as a part of dynamic analysis of structures subjected to strong ground motion. In the seismic response analysis, all the material properties can not be grasped clearly in practice. This paper presents a stochastic seismic response analysis based on sensitivity analysis, and then shows the results of benchmark analysis with the Monte Carlo method to confirm the accuracy of the proposed analytical method. The analytical results are shown to agree well with those of the Monte Carlo method. This method enables us to analyse structures with uncertainties.

1. はじめに

近年、構造物の最適設計や信頼性あるいは安全性が重視されるようになり、従来のような確定論的な構造解析では十分とは言えなくなっており、構造物に含まれる不確定性を考慮した構造解析法が必要となってきた。従来の設計では、構造物あるいは地盤などの不確定性は安全率という形に包括され、試行錯誤を繰り返し、経験的に最適な安全率を設定することにより不確定性に対処されてきた。しかしながら、近年の構造物の大型化、複雑化に伴い、試行錯誤により安全率を改善し、経験的に構造物の安全を確保しようとする従来の設計思想には限界が見えてきており、不確定性の影響を積極的に取り入れた設計法が注目され始めてきている。構造物が自然環境の中に建てられることを考えると、不確定な外力や、構造物や地盤の材料定数の不確定性を取り扱う必要があり、材料がもつ確率統計的な特性を適切に評価することは構造解析の結果を正確に判断するうえで重要なことである。そこで、これらの不確定性を、確率論の導入により定量的に評価しようとする試みが多くなされてきた¹⁾。

不確定性を考慮した確率論的取扱いとしてはモンテカルロ法²⁾がよく知られているが、時刻歴解析に用いる場合には統計的に信頼度の高い値を得るには多数回の時刻歴応答計算を行う必要があり、膨大な計算量となる。また不確定性の応答への影響を解析的に求めることが困難などの問題がある。

*	工修	山口大学助手	工学部社会建設工学科	(〒755 山口県宇部市常盤台2557)
**	工修	(株)ピー・エス	第二技術部	(〒170 東京都豊島区南大塚3-20-6)
***	工博	山口大学教授	工学部知能情報システム工学科	(〒755 山口県宇部市常盤台2557)
****	Ph.D.	山口大学教授	工学部社会建設工学科	(〒755 山口県宇部市常盤台2557)

そこで本研究では、モンテカルロ法に代わる確率論的地震応答解析法を導く。構造物の動的感度解析^{3)・4)}により得られた1次感度および2次感度とテイラー展開による近似理論^{5)・6)}を用いて、ある多自由度構造系が不確かさを有しているとき、その応答の不確定性を感度などの確定量として定式化し、従来の地震応答解析と同様に解き、そのパラメータの揺らぎに対する応答量の変動を求める手法を時刻歴解析法として代表的なNewmarkのβ法を用いて示す。さらに簡単な数値解析例により、この方法により得られた変位応答、速度応答、加速度応答の期待値と分散をモンテカルロ法による結果と比較・検討し、本解析法の不確定構造系への適用性を探る。

2. 解析理論

2.1 テイラー展開による1次近似と2次近似

構造応答が確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の関数であり、

$$Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \dots\dots\dots(1)$$

と与えられる場合、これを期待値 $\bar{X} = \{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n\}$ のまわりでテイラー展開すると次のようになる。

$$Y = g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}} (X_i - \bar{X}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_{\bar{X}} (X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j) + \dots \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで、1次近似は式(2)のXの1次項まで考慮し、2次近似はXの2次の項まで考慮するものである。また

$(\cdot)_{\bar{X}}$ は微分を $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)$ で評価することを意味する。したがってそれらの微分値が与えられるような滑らかな関数である場合に本手法の適用範囲は限られる。

いま、右辺の第2項、すなわちXの1次の項まで考慮すると、Yの期待値 $E[Y]$ と分散 $\text{Var}[Y]$ は、

$$E[Y] = g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{Var}[Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}} \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \right)_{\bar{X}} \text{Cov}[X_i, X_j] \quad \dots\dots\dots(4)$$

のように与えられる。 $\text{Cov}[X_i, X_j]$ は $E[(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)]$ なる2次の期待値まわりのモーメント(中心モーメント)の意味であり、共分散と呼ばれる。これがよく知られる1次近似法(First-Order Approximation)あるいは1次近似2次モーメント法(First-Order Second-Moment Method)と呼ばれる手法である。

次に式(2)において、右辺第3項、すなわちXの2次項までを考慮すれば、

$$E[Y] = g(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_{\bar{X}} \text{Cov}[X_i, X_j] \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}} \left(\frac{\partial g}{\partial X_j} \right)_{\bar{X}} \text{Cov}[X_i, X_j] \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)_{\bar{X}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_j \partial X_k} \right)_{\bar{X}} E[(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)(X_k - \bar{X}_k)] \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i \partial X_j} \right)_{\bar{X}} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_k \partial X_l} \right)_{\bar{X}} \right. \\ &\times (E[(X_i - \bar{X}_i)(X_j - \bar{X}_j)(X_k - \bar{X}_k)(X_l - \bar{X}_l)]) \end{aligned}$$

$$-C \circ v[X_i, X_j] C \circ v[X_k, X_l] \} \dots\dots\dots(6)$$

が導かれる。これが2次近似法 (Second Order Approximation) である。

2.2 不確定構造系のNewmark-β法による時刻歴解析

Newmark-β法では、時刻t+dtにおける変位、速度、加速度は次式で与えられる。

$$\frac{\{\dot{u}_{t+dt}\}-\{\dot{u}_t\}}{dt} = \{\ddot{u}_t\} + \delta \{ \{\ddot{u}_{t+dt}\} - \{\ddot{u}_t\} \} \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{\{u_{t+dt}\}-\{u_t\}}{dt} = \{\dot{u}_t\} + \frac{dt}{2} \{\ddot{u}_t\} + \beta \{ \{\ddot{u}_{t+dt}\} - \{\ddot{u}_t\} \} dt \dots\dots\dots(8)$$

ここで、 $\delta=1/2, \beta=1/6$ とすると線形加速度法、 $\delta=1/2, \beta=1/4$ とすると平均加速度法となる。一般には、 $\delta=1/2$ と固定し、 β のみを積分パラメータとして扱う。式(7)より、

$$\frac{\{\dot{u}_{t+dt}\}-\{\dot{u}_t\}}{dt} = \frac{1}{2} \{ \{\ddot{u}_{t+dt}\} + \{\ddot{u}_t\} \} \dots\dots\dots(9)$$

式(8)、(9)より $\{\ddot{u}_{t+dt}\}, \{\dot{u}_{t+dt}\}$ を時刻tにおける諸量で表わし、さらに次のように置くと、

$$a_0 = \frac{1}{\beta dt^2}, \quad a_1 = \frac{1}{2\beta dt}, \quad a_2 = \frac{1}{\beta dt}, \quad a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1 \dots\dots\dots(10)$$

$$a_4 = \left(\frac{1}{4\beta} - 1 \right) dt$$

$$\{\ddot{u}_{t+dt}\} = a_0 \{ \{u_{t+dt}\} - \{u_t\} \} - a_2 \{\dot{u}_t\} - a_3 \{\ddot{u}_t\} \dots\dots\dots(11)$$

$$\{\dot{u}_{t+dt}\} = a_1 \{ \{u_{t+dt}\} - \{u_t\} \} - a_3 \{\dot{u}_t\} - a_4 \{\ddot{u}_t\} \dots\dots\dots(12)$$

となる。

一方、時刻t+dtにおける運動方程式は、入力加速度を \ddot{z} とすると次式で与えられる。

$$[M]\{\ddot{u}_{t+dt}\} + [C]\{\dot{u}_{t+dt}\} + [K]\{u_{t+dt}\} = -[M]\{I\}\ddot{z} \dots\dots\dots(13)$$

式(13)に式(11)、(12)を代入すると

$$\begin{aligned} (a_0[M] + a_1[C] + [K])\{du\} = & -[M]\{I\}\ddot{z} + [M]\{a_2\{\dot{u}_t\} + a_3\{\ddot{u}_t\}\} \\ & + [C]\{a_3\{\dot{u}_t\} + a_4\{\ddot{u}_t\}\} - [K]\{u_t\} \end{aligned} \dots\dots\dots(14)$$

ただし、 $\{du\} = \{u_{t+dt}\} - \{u_t\}$ である。

ここで、

$$[\tilde{K}] = a_0[M] + a_1[C] + [K] \dots\dots\dots(15)$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{R}\} = & -[M]\{I\}\ddot{z} + [M]\{a_2\{\dot{u}_t\} + a_3\{\ddot{u}_t\}\} \\ & + [C]\{a_3\{\dot{u}_t\} + a_4\{\ddot{u}_t\}\} - [K]\{u_t\} \end{aligned} \dots\dots\dots(16)$$

とおけば、変位増分 $\{du\}$ に関する連立一次方程式を得る。

$$[\tilde{K}]\{du\} = \{\tilde{R}\} \dots\dots\dots(17)$$

$[\tilde{K}]$:有効剛性マトリクス

$\{\tilde{R}\}$:有効荷重ベクトル

いま、変位の確率変数による1次感度を求めるため、式(17)の両辺を確率変数 X_i で偏微分すると、

$$\begin{aligned}
 & (a_0[M] + a_1[C] + [K]) \left(\frac{\partial \{u_{t+dt}\}}{\partial X_i} - \frac{\partial \{u_t\}}{\partial X_i} \right) \\
 &= -\frac{\partial [M]}{\partial X_i} \{I\} \ddot{z} - \frac{\partial [K]}{\partial X_i} \{u_t\} + \left(a_2 \frac{\partial [M]}{\partial X_i} + a_3 \frac{\partial [C]}{\partial X_i} \right) \{\dot{u}_t\} \\
 &+ \left(a_3 \frac{\partial [M]}{\partial X_i} + a_4 \frac{\partial [C]}{\partial X_i} \right) \{\ddot{u}_t\} - [K] \frac{\partial \{u_t\}}{\partial X_i} \\
 &+ (a_2[M] + a_3[C]) \frac{\partial \{\dot{u}_t\}}{\partial X_i} \\
 &+ (a_3[M] + a_4[C]) \frac{\partial \{\ddot{u}_t\}}{\partial X_i} \\
 &- \left(a_0 \frac{\partial [M]}{\partial X_i} + a_1 \frac{\partial [C]}{\partial X_i} + \frac{\partial [K]}{\partial X_i} \right) (\{u_{t+dt}\} - \{u_t\}) \dots\dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial \{du\}}{\partial X_i} = \frac{\partial \{u_{t+dt}\}}{\partial X_i} - \frac{\partial \{u_t\}}{\partial X_i} \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{aligned}
 \{\tilde{Q}\} &= -\frac{\partial [M]}{\partial X_i} \{I\} \ddot{z} - \frac{\partial [K]}{\partial X_i} \{u_t\} + \left(a_2 \frac{\partial [M]}{\partial X_i} + a_3 \frac{\partial [C]}{\partial X_i} \right) \{\dot{u}_t\} \\
 &+ \left(a_3 \frac{\partial [M]}{\partial X_i} + a_4 \frac{\partial [C]}{\partial X_i} \right) \{\ddot{u}_t\} - [K] \frac{\partial \{u_t\}}{\partial X_i} \\
 &+ (a_2[M] + a_3[C]) \frac{\partial \{\dot{u}_t\}}{\partial X_i} + (a_3[M] + a_4[C]) \frac{\partial \{\ddot{u}_t\}}{\partial X_i} \\
 &- \left(a_0 \frac{\partial [M]}{\partial X_i} + a_1 \frac{\partial [C]}{\partial X_i} + \frac{\partial [K]}{\partial X_i} \right) (\{u_{t+dt}\} - \{u_t\}) \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

とすると変位の1次感度の増分に関する連立一次方程式を得ることができる。

$$[\tilde{K}] \frac{\partial \{du\}}{\partial X_i} = \{\tilde{Q}\} \dots\dots\dots (21)$$

変位の確率変数に関する1次感度の増分が求まると次式により時刻 $t+dt$ における速度、加速度の1次感度を求めることができる。

$$\frac{\partial \{\ddot{u}_{t+dt}\}}{\partial X_i} = a_0 \frac{\partial \{du\}}{\partial X_i} - a_2 \frac{\partial \{\dot{u}_t\}}{\partial X_i} - a_3 \frac{\partial \{\ddot{u}_t\}}{\partial X_i} \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{\partial \{\dot{u}_{t+dt}\}}{\partial X_i} = a_1 \frac{\partial \{du\}}{\partial X_i} - a_3 \frac{\partial \{\dot{u}_t\}}{\partial X_i} - a_4 \frac{\partial \{\ddot{u}_t\}}{\partial X_i} \dots\dots\dots (23)$$

すなわち時刻 $t+dt$ における各1次感度は、時刻 t の各1次感度が既知であるならば式(19)~式(23)を用いて算出することができる。

2次感度は、式(21)をさらに確率変数 X_j で偏微分することにより求まる。すなわち、

$$[\tilde{K}] \frac{\partial^2 \{du\}}{\partial X_i \partial X_j} = \{\tilde{P}\} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、

$$\frac{\partial^2\{d\mathbf{u}\}}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial^2\{\mathbf{u}_{t+dt}\}}{\partial X_i \partial X_j} - \frac{\partial^2\{\mathbf{u}_t\}}{\partial X_i \partial X_j} \dots\dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathbf{P}}\} = & -\frac{\partial^2[\mathbf{M}]}{\partial X_i \partial X_j} \{\mathbf{I}\} \ddot{\mathbf{z}} - \frac{\partial^2[\mathbf{K}]}{\partial X_i \partial X_j} \{\mathbf{u}_t\} \\ & + \left(a_2 \frac{\partial^2[\mathbf{M}]}{\partial X_i \partial X_j} + a_3 \frac{\partial^2[\mathbf{C}]}{\partial X_i \partial X_j} \right) \{\dot{\mathbf{u}}_t\} + \left(a_3 \frac{\partial^2[\mathbf{M}]}{\partial X_i \partial X_j} + a_4 \frac{\partial^2[\mathbf{C}]}{\partial X_i \partial X_j} \right) \{\ddot{\mathbf{u}}_t\} \\ & - \frac{\partial[\mathbf{K}]}{\partial X_j} \frac{\partial\{\mathbf{u}_t\}}{\partial X_i} - \frac{\partial[\mathbf{K}]}{\partial X_i} \frac{\partial\{\mathbf{u}_t\}}{\partial X_j} \\ & + \left(a_2 \frac{\partial[\mathbf{M}]}{\partial X_j} + a_3 \frac{\partial[\mathbf{C}]}{\partial X_j} \right) \frac{\partial\{\dot{\mathbf{u}}_t\}}{\partial X_i} + \left(a_2 \frac{\partial[\mathbf{M}]}{\partial X_i} + a_3 \frac{\partial[\mathbf{C}]}{\partial X_i} \right) \frac{\partial\{\dot{\mathbf{u}}_t\}}{\partial X_j} \\ & + \left(a_3 \frac{\partial[\mathbf{M}]}{\partial X_j} + a_4 \frac{\partial[\mathbf{C}]}{\partial X_j} \right) \frac{\partial\{\ddot{\mathbf{u}}_t\}}{\partial X_i} + \left(a_3 \frac{\partial[\mathbf{M}]}{\partial X_i} + a_4 \frac{\partial[\mathbf{C}]}{\partial X_i} \right) \frac{\partial\{\ddot{\mathbf{u}}_t\}}{\partial X_j} \\ & - [\mathbf{K}] \frac{\partial^2\{\mathbf{u}_t\}}{\partial X_i \partial X_j} + (a_2[\mathbf{M}] + a_3[\mathbf{C}]) \frac{\partial^2\{\dot{\mathbf{u}}_t\}}{\partial X_i \partial X_j} + (a_3[\mathbf{M}] + a_4[\mathbf{C}]) \frac{\partial^2\{\ddot{\mathbf{u}}_t\}}{\partial X_i \partial X_j} \\ & - \left(a_0 \frac{\partial^2[\mathbf{M}]}{\partial X_i \partial X_j} + a_1 \frac{\partial^2[\mathbf{C}]}{\partial X_i \partial X_j} + \frac{\partial^2[\mathbf{K}]}{\partial X_i \partial X_j} \right) (\{\mathbf{u}_{t+dt}\} - \{\mathbf{u}_t\}) \\ & - \left(a_0 \frac{\partial[\mathbf{M}]}{\partial X_j} + a_1 \frac{\partial[\mathbf{C}]}{\partial X_j} + \frac{\partial[\mathbf{K}]}{\partial X_j} \right) \left(\frac{\partial\{\mathbf{u}_{t+dt}\}}{\partial X_i} - \frac{\partial\{\mathbf{u}_t\}}{\partial X_i} \right) \\ & - \left(a_0 \frac{\partial[\mathbf{M}]}{\partial X_i} + a_1 \frac{\partial[\mathbf{C}]}{\partial X_i} + \frac{\partial[\mathbf{K}]}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial\{\mathbf{u}_{t+dt}\}}{\partial X_j} - \frac{\partial\{\mathbf{u}_t\}}{\partial X_j} \right) \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

式(24)~(26)より、変位の確率変数に関する2次感度の増分が求まると次式により時刻t+dtにおける速度、加速度の2次感度を求めることができる。

$$\frac{\partial^2\{\ddot{\mathbf{u}}_{t+dt}\}}{\partial X_i \partial X_j} = a_0 \frac{\partial^2\{d\mathbf{u}\}}{\partial X_i \partial X_j} - a_2 \frac{\partial^2\{\dot{\mathbf{u}}_t\}}{\partial X_i \partial X_j} - a_3 \frac{\partial^2\{\ddot{\mathbf{u}}_t\}}{\partial X_i \partial X_j} \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{\partial^2\{\dot{\mathbf{u}}_{t+dt}\}}{\partial X_i \partial X_j} = a_1 \frac{\partial^2\{d\mathbf{u}\}}{\partial X_i \partial X_j} - a_3 \frac{\partial^2\{\dot{\mathbf{u}}_t\}}{\partial X_i \partial X_j} - a_4 \frac{\partial^2\{\ddot{\mathbf{u}}_t\}}{\partial X_i \partial X_j} \dots\dots\dots (28)$$

式(17)、(21)、(24)において、 $[\tilde{\mathbf{K}}]$ のコレスキー分解あるいは、逆行列を求めておけば、荷重項 $\{\tilde{\mathbf{R}}\}$ 、 $\{\tilde{\mathbf{Q}}\}$ 、 $\{\tilde{\mathbf{P}}\}$ を変えるだけで、解が求まる。

2.3 減衰マトリクス of 取扱い

外乱に対する振動系の応答に及ぼす減衰の大きさの影響は決定的であるが振動解析に際しても最も不明確であるものも減衰に関するものである。減衰定数を正確に評価するには、振動実験によって求めることが必要である。一般の構造物は、多自由度系であり、低次モードについてモードごとの対数減衰率から減衰定数を求める。現在のところこの減衰マトリクス[C]を規定する明確な方法はない。そこで本研究では、減衰マトリクス[C]が次式で与えられるRayleigh減衰で表される場合について検討をおこなった。

$$[\mathbf{C}] = \alpha_0 [\mathbf{M}] + \alpha_1 [\mathbf{K}] \dots\dots\dots (29)$$

$$\alpha_0 = \frac{2\omega_1\omega_2(\xi_1\omega_2 - \xi_2\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad \begin{array}{l} \omega_1: \text{一次の固有円振動数} \\ \omega_2: \text{二次の固有円振動数} \end{array}$$

$$\alpha_1 = \frac{2(\xi_2\omega_2 - \xi_1\omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad \begin{array}{l} \xi_1: \text{一次のモード減衰定数} \\ \xi_2: \text{二次のモード減衰定数} \end{array}$$

不確定要因として、剛性マトリクスに関係する材料特性などを選んだ場合、減衰マトリクスの1次感度 $\frac{\partial [C]}{\partial X_i}$ 、2次感度 $\frac{\partial^2 [C]}{\partial X_i \partial X_j}$ が存在するが、減衰マトリクスの感度を無視しても感度解析の結果にほとんど影響を与えないという菊田ら⁷⁾の研究および事前に行った1質点での数値解析例⁹⁾によりRayleigh減衰の場合には、減衰マトリクスの感度を考慮してもしなくても解析結果にほとんど影響を与えなかったため、本研究では、減衰の1次感度・2次感度は考慮しないこととした。

3. 数値実験による適用性の検討

3.1 解析モデル・解析条件

本解析法の適用性を検討するため、図-1に示すようなモデルを用いて、地盤の水平・回転バネが不確定な場合の解析を行い、その結果とモンテカルロ法による結果とを比較した。モデルは3径間連続PC合成桁橋から1橋脚を取り出したもので、上部工を1質点に、橋脚を3質点に置き換えたものである。⁹⁾ 地盤条件等から求めた基本モデルの設定物性値を表-1に示す。橋脚モデルの不確定要因として、地盤の水平バネ K_h および回転バネ K_θ を取り上げ、表-1に示されている値を期待値とし、地盤の水平および回転バネのバネ定数が正規分布すると仮定し、質点の応答量の期待値と分散を求め、図-2のフローチャートに示されるモンテカルロ法 ($N=1000$) による方法と比較した。ここで、表-1に示されている地盤の水平・回転バネの期待値を有する構造系を基本構造系と呼ぶ。本解析例のように系の固有振動数が変動する場合には振幅のみならず位相が変動するため、時間の経過とともに分散が大きくなる傾向がある。そこでまず始めに4種類の地震波による応答計算を行い、本手法の適用範囲を明らかにした。表-2に解析で用いた地震波の詳細および応答の詳細を示す。地震波はいずれも最大加速度を100GALに修正したものをを用いた。初期条件は $t=0$ で加速度、速度、変位ともに0で感度も0とした。また、減衰は式(29)で示されるRayleigh減衰を仮定し、一次と二次の減衰定数を $\xi_1=0.02$, $\xi_2=0.05$ とした。なお、確率変数が2つある場合の変位の期待値と分散は、1次近似法では、式(3)と(4)よりそれぞれ次のように導かれる。

$$E[u_i] = g(\bar{K}_h, \bar{K}_\theta) \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[u_i] = & \left(\frac{\partial g}{\partial K_h} \right)^2 \text{Var}[K_h] + \left(\frac{\partial g}{\partial K_\theta} \right)^2 \text{Var}[K_\theta] \\ & + 2 \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial K_h} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial K_\theta} \right) \text{Cov}[K_h, K_\theta] \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

ここに、

$g(\cdot)$: 変位の確定項、 $\text{Var}[K_h]$: 地盤の水平バネ定数の分散、

$\text{Var}[K_\theta]$: 地盤の回転バネ定数の分散、 $\text{Cov}[K_h, K_\theta]$: 地盤の水平バネと回転バネの共分散。

また、式(31)による1次近似法および式(5), (6)の2次近似法で用いる分散は、

$$\text{Var}[K_h] = (\nu_{K_h} \cdot E[K_h])^2 \quad \text{Var}[K_\theta] = (\nu_{K_\theta} \cdot E[K_\theta])^2 \quad \dots\dots\dots (32)$$

の関係より求めた。各確率変数の共分散については次式により求めた。

$$\rho_{K_h K_\theta} = \frac{\text{Cov}[K_h, K_\theta]}{\sqrt{\text{Var}[K_h]} \sqrt{\text{Var}[K_\theta]}} \dots\dots\dots (33)$$

ここに、

ν_{K_h} : 地盤の水平バネの変動係数、 ν_{K_θ} : 地盤の回転バネの変動係数、

$\rho_{K_h K_\theta}$: 確率変数 K_h, K_θ の相関係数。

2次近似法を用いた場合の期待値と分散は式(5),(6)ようになるが本解析例のように確率変数が正規分布すると仮定した場合には3次モーメントは0に、4次モーメントは2次モーメントから求められる。¹⁰⁾

表-1 モデルの設定物性値

質点番号	質点高さ(m)	重量(tf)	部材	剛性EI(tfm ²)	バネ定数
1	17.500	721.35	1-2	3.454×10 ⁶	
2	16.674	96.875	2-3	3.454×10 ⁶	
3	9.000	203.125	3-4	3.454×10 ⁶	
4	1.123	357.604	地盤		$K_h=1.41 \times 10^5 \text{tf/m}$
5	0.000	0.000			$K_\theta=2.26 \times 10^6 \text{tfm/rad}$

表-2 入力地震波と応答

入力地震波		基本構造系が最大値をとる時刻	応答の最大値	入力加速度が最大値をとる時刻	
El Centro NS (1940年Imperial Valley地震) 時間刻み0.02sec 計算時間10sec	加速度	2.26sec	227.3GAL	2.34sec	
	速度	2.18sec	22.4cm/s		
	変位	2.70sec	2.81cm		
JPL (1971年San Fernando地震) 時間刻み0.02sec 計算時間10sec	加速度	4.96sec	127.4GAL	5.12sec	
	速度	8.30sec	9.6cm/s		
	変位	8.12sec	1.15cm		
修正開北橋記録 (1978年宮城県沖地震) 時間刻み0.02sec 計算時間10sec	加速度	5.92sec	301.8GAL	1.98sec	
	速度	5.74sec	33.3cm/s		
	変位	5.94sec	4.09cm		
修正板島橋記録 (1983年日本海中部地震) 時間刻み0.02sec 計算時間20sec	加速度	18.72sec	343.4GAL	11.12sec	
	速度	14.52sec	37.0cm/s		
	変位	14.72sec	4.37cm		

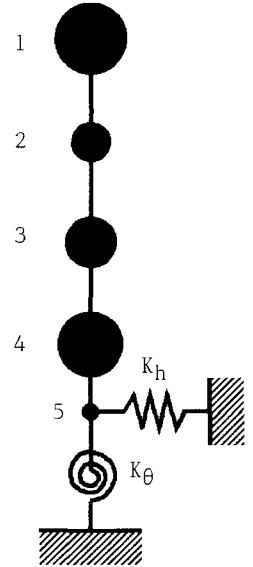


図-1 解析モデル

3.2 入力地震の違いによる時刻歴解析

地盤の水平バネおよび回転バネが変動係数5%でばらつき、相関を考えない場合の入力地震波の違いによる解析結果を図-3~9に示す。解析の結果、各質点による傾向の差異はなく、また、加速度、速度でも同じ傾向であるため、質点1の変位についてのみ結果を示す。図-3、4にはEl Centoro波入力時の1次近似法、2次近似法で計算された応答変位の期待値を示す。応答変位の期待値は、モンテカルロ法により計算された結果と本解析法で得られた値は良く一致しており、偏り(バイアス)は小さい。時間の経過とともに僅かづつではあるが差異があらわれ、この傾向は2次近似法よりも1次近似法のほうが大きい。この理由としては、分散の比較のところでも述べるが、時間の経過とともに位相がずれていくためと考えられる。図-5、6にはEl Centoro波入力時の1次近似法、2次近似法で計算された変位の分散を示す。どちらの図も早い時刻においてはモンテカルロ法による結果と良く一致しているものの時間の経過とともにその差は大きくなる。2次近似法でもそれほど精度は良くならないが、分散の時刻歴波形が谷になる部分では1次近似法よりも2次近似法のほうが精度が良く、1次近似法では分散が極端に小さくなる。図-6、7、8、9には入力地震波が違う場合の分散の比較を2次近似法で行う。2次近似法による結果とモンテカルロ法による結果は、どの図も早い時刻では一致するものの、時間の経過とともにその差は大きくなり、モンテカルロ法による結果

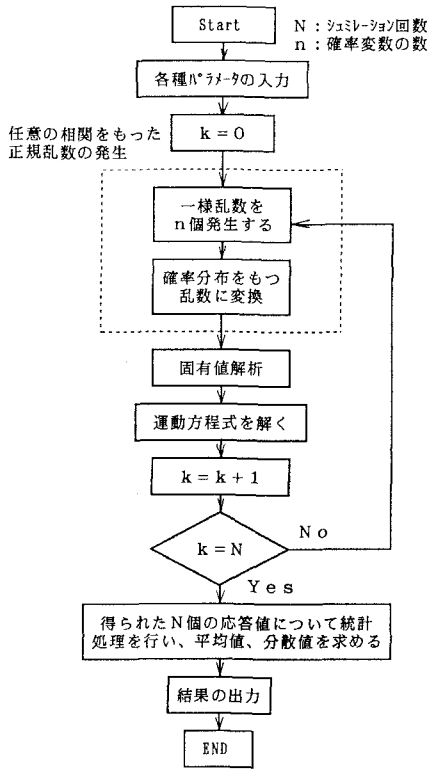


図-2 モンテカルロ法解析フロー

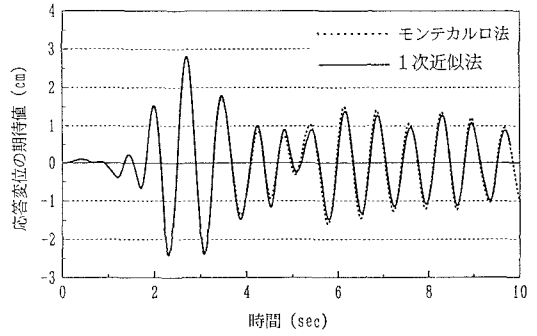


図-3 応答変位の期待値 (1次近似法、分散5%、相関0) E1 Centoro波入力時

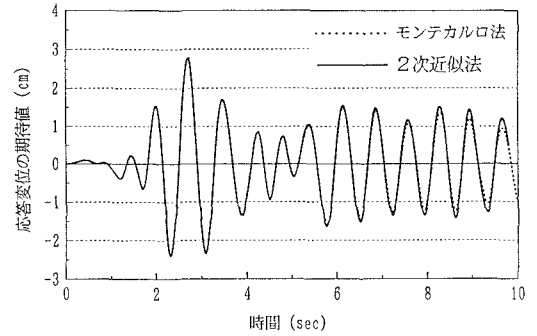


図-4 応答変位の期待値 (2次近似法、分散5%、相関0) E1 Centoro波入力時

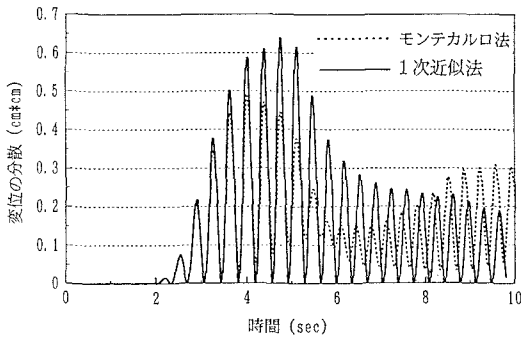


図-5 変位の分散 (1次近似法、分散5%、相関0) E1 Centoro波入力時

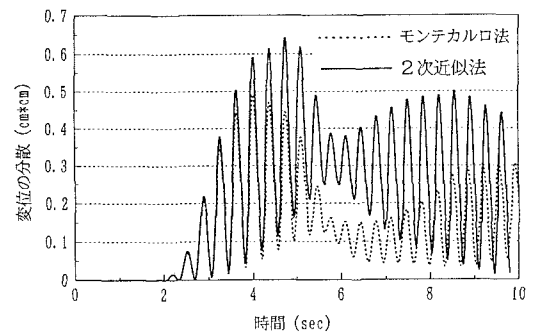


図-6 変位の分散 (2次近似法、分散5%、相関0) E1 Centoro波入力時

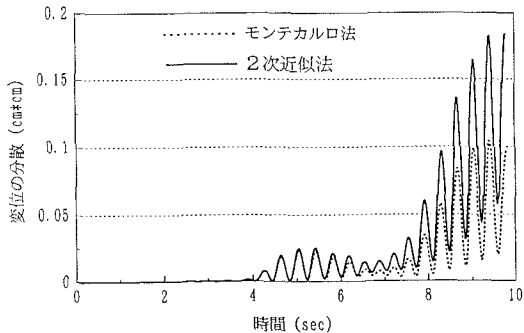


図-7 変位の分散 (2次近似法、分散5%、相関0) JPL波入力時

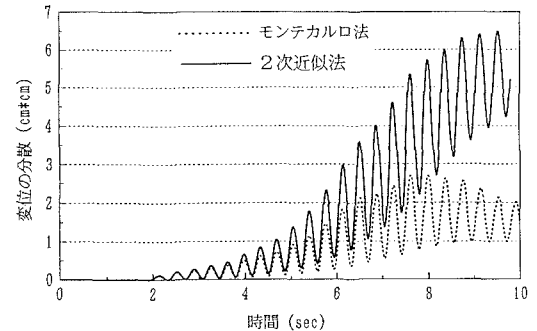


図-8 変位の分散 (2次近似法、分散5%、相関0) 修正開北橋記録入力時

よりも2次近似法による結果のほうが大きめの値となっている。この傾向は1次近似法についても同様であり、加速度、速度でも、また他の質点についても同様な傾向がある。この理由は本解析例のように系の剛性がばらつく場合、応答の振幅のみならず系の固有振動数も変動するため、位相差が生じ時間の経過とともに誤差が大きくなるためと考えられる。従って、本解析法の適用はEl Centro波のように応答の最大値が比較的早い時間に出現する、短時間の計算のみに限られる。

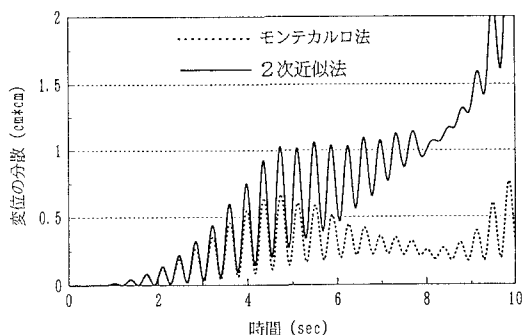


図-9 変位の分散 (2次近似法、分散5%、相関0)
修正板島橋記録入力時

3.3 変動係数、相関係数の違いによる数値解析結果

本手法は、短時間の計算では比較的精度良く期待値や分散が求められるため、構造系の最大応答が比較的早い時刻に現れるEl Centro波を用いて、地盤の水平および回転パネの変動係数、水平パネと回転パネの相関係数をそれぞれ変化させ推定精度の検討を行った。本解析法およびモンテカルロ法で求めた応答量の分散はそれぞれ基本構造系において加速度、速度、変位の応答が最大値をとる時刻のものを求めた。また、解析の精度としては、モンテカルロ法で得られた値に対する本解析法で得られた値の比を選んだ。解析の精度が良ければこの値は1となる。図-10には相関係数を0とし、変動係数を1%~20%まで変化させた場合の解析の精度を示す。図中の比率は(本解析法で求めた分散) / (モンテカルロ法で求めた分散)を示す。図-10によれば本解析法により求めた加速度、速度応答の分散は、1次近似法、2次近似法ともにモンテカルロ法により求められたものと良く一致しており、変動係数が大きくなると多少精度は落ち、2次近似法で求められた分散はモンテカルロ法で求められた分散よりも大きくなる傾向があるものの変動係数が20%ぐらいまでは十分良い値が得られている。しかしながら、1次近似法で求められた変位分散に関しては解析の精度は良くなく、モンテカルロ法で得られた値よりかなり小さめの値となっている。この理由として考えられるのは、図-11に図-5の拡大図を示すが、基本構造系において変位が最大となる時刻(2.70sec)の変位分散が時刻歴波形の谷の部分になるため、精度が悪くなる。このように1次近似法の場合、時刻歴波形の

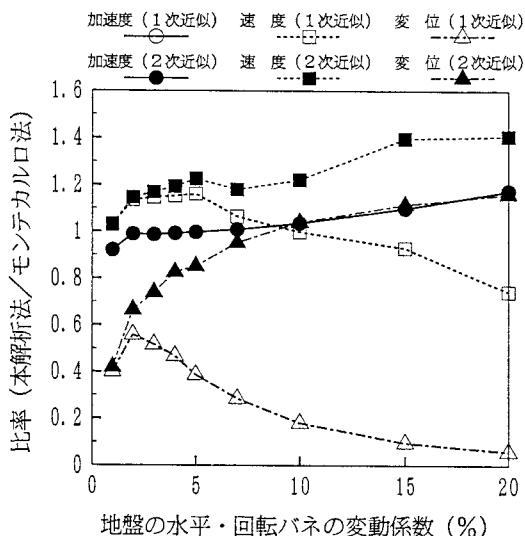


図-10 変動係数と解析精度の関係

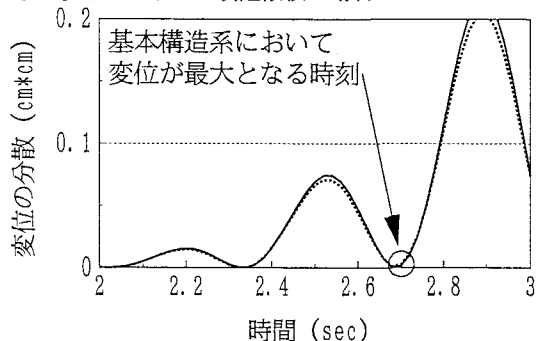


図-11 変位の分散を求める時刻
谷の部分で特に推定値が小さくなるため注意が必要である。図-12には、地盤の水平パネと回転パネに相関をもたせた場合の解析結果を示している。水平パネと回転パネが相関をもった場合でも1次近似法による変位分散の推定値を除いては比較的良く一致しており、不確定要因間に相関がある場合でも良い推定値が得られている。

4. 結論

本研究ではモンテカルロ法に代わる確率論的地震応答解析法として、構造物の動的感度解析により得られた感度とテイラー展開による近似理論を用いた方法を時刻歴解析法として代表的なNewmark β 法について示した。解析例としてロッキングスウェイモデルを用い地盤の水平と回転バネが不確かな場合の応答のばらつきを求めた。本手法は時間の経過とともに推定精度が悪くなるため、本手法の適用は短い時間の計算のみに限られるが、早い時刻では、モンテカルロ法で求めた応答のバラツキ（分散）と本解析法で求めた応答のバラツキは良く一致しており、応答の最大値が比較的早い時刻に現れるEl Centoro波では変動係数で20%のバラツキでも良い結果を与えた。ただ、分散の推定に1次近似法を用いた場合は、分散の時刻歴波形の谷の部分での推定値が非常に小さくなるため注意が必要である。モンテカルロ法で得られた分散は多数回の時刻歴解析により得られた値であるのに対し、本解析法は1回の時刻歴解析で同様の値を得ており、計算量を大幅に節減できるばかりでなく、条件を限れば、従来解析コストの面でモンテカルロ法の適用が困難であった多自由度構造系の時刻歴解析にも適用できる可能性がある。

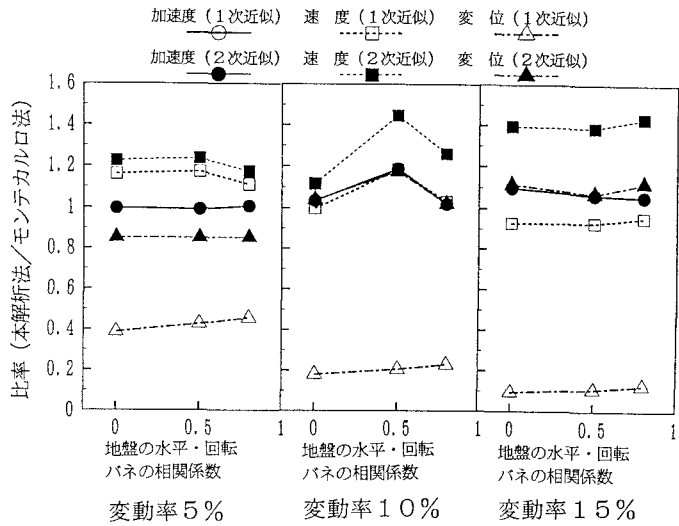


図-12 相関係数と解析精度の関係

参考文献

- 1) 松尾 稔：地盤工学、信頼性設計の理論と実際、技報堂出版、1984
- 2) 星谷 勝・石井 清：構造物の信頼性設計法、鹿島出版会、pp.80~95、1986
- 3) 山川 宏・若林秀次：構造物の動的応答における最適設計（第1報）、日本機械学会論文集（C編）、48巻、435号、pp.1738~1749、1983.11
- 4) 菊田征勇・松井邦人・新延泰生：動的領域における構造物の感度解析、構造工学論文集、Vol.33A、pp.703~714、1987.3
- 5) Cambou, b.: Application of First-order Uncertainty Analysis in the Finite Element Method in Linear Elasticity, Proc. of 2nd Int. conf. Applications of Statistics and Structural Engineering, Aachen, pp.67-87, 1975
- 6) 中桐 滋・久田俊明：確率有限要素法入門、培風館、pp.22~23, 1985
- 7) 菊田征勇・松井邦人ほか：構造物の動的感度解析、国土館大学情報科学センター紀要、第11号、1990
- 8) 石田邦洋：不確定構造系の確率有限要素法による地震応答解析、山口大学大学院修士論文、1992
- 9) (財)国土開発技術研究センター：道路橋の免震設計法ガイドライン（免震装置を有する道路橋の耐震設計研究報告書）、pp.104~109、1988.3
- 10) 中桐 滋・久田俊明：確率有限要素法入門、培風館、pp.50~52, 1985

(1992年9月21日受付)