

# ダイナミック・プログラミングによる 地震時における構造物の最適制御

Optimal Control of Structures Subjected to Earthquake Loads  
Using Dynamic Programming

深沢恵志\* 川原睦人\*\*

By Keiji FUKAZAWA and Mututo KAWAHARA

This paper presents an application of the optimal control theory to civil engineering structures. The optimal control of structures due to earthquake loads is resulted to the tracking problem. In the tracking problem, it is necessary that all of the external loads must be known in advance to determine the optimal control forces. But in case of earthquake, for example, it is impossible to obtain all of the external loads in advance. Since the optimal control forces can not be determined before earthquake, this control system is inconvenient in a actual problem. However in the field of engineering it is important to know what level the response of structures can be controlled by applying the control forces. In this paper, a way to determine the optimal control forces in the tracking problem using dynamic programming is shown. In the numerical example the motion of the structures controlled using the tracking control system is presented.

## 1. はじめに

近年、建設界において研究がさかんに行われている免震構造の多くは、構造物をばね定数の小さい弾性体で支えることにより、地震動を吸収して、構造物の振動をおさえようとするものである。これに対して、J. N. Yang<sup>(1)</sup>, Abdel-Rohman, Leipholzら<sup>(2)</sup>によって構造物に作用する外力を相殺する制御力を、サーボメカニズムによって積極的に作用させ、これによって構造物の変形を最小にする研究が行われている。この理論には、電気工学の分野において主として発達した最適制御理論が用いられている。これらの研究では、一般に外力を考慮しないレギュレータ問題としての扱いがなされている。これに対して本研究は地震時に生じる構造物の振動を最適にコントロールするために、外力を考慮したトラッキング問題と呼ばれる最適制御問題について検討をおこなう。

トラッキング制御方式では、構造物に作用する外力を最初から最後まで知らなければ、その最適制御力を決定することができない。しかし、実際の構造物が地震力などの外力を受け、これを制御する方法では、外力を受けた時点で制御力を決定しなければならないので、この制御方法は適切なものではない。よって、実際にはレギュレータ方式やアダプティブ方式が用いられることになる。一方、最適制御を行えば構造物の変位をどの程度の範囲まで制御することができるかを知ることは、工学上きわめて重要である。そこで、ここではトラッキング制御方式による最適制御を試みた。

\* 中央大学大学院理工学研究科土木工学専攻

\*\* 中央大学理工学部土木工学科 教授

〒112 東京都文京区春日1-13-27

☎03(817)1815

トラッキング問題の制御方式として多くの方法が考えられている。そのうち、コンピュータの記憶容量と計算時間と比較検討した結果、ダイナミック・プログラミングによる方式が最も適切であることが判明した。そこで、本研究ではトラッキング問題における最適な操作量の決定にあたり、ダイナミック・プログラミングを用いる。ダイナミック・プログラミングは良く知られているように「最適制御が行われていれば、その途中、どの点から最終点まで区間をとっても、そこで最適になっていなければならない。」という、きわめて明瞭な「最適性の原理」に基づいたものである。よって理解しやすく、また最適操作量の導出に用いる計算は、行列、ベクトルなどの四則演算のみとなるので、コンピュータによる解析に適したものとなる。今回本手法を用いて、最適制御をほどこした構造物に地震動が作用した場合の運動について、数値シミュレーションを行ったので報告する。

## 2. 状態方程式の離散化

制御をほどこした構造物に地震動が作用した場合の運動方程式は、次のように書き表わすことができる。

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = [V]\{u\} - [M]\{E\}\ddot{\phi} \quad (1)$$

ここで、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$  はそれぞれ、質量マトリックス、粘性マトリックス、剛性マトリックス $[V]$ は制御力の作用する場所を示すマトリックスである。また、 $\{y\}$ 、 $\{u\}$  はそれぞれ、変位ベクトル、制御力ベクトル、 $\{E\}$  は地震波の方向を示すベクトルである。そして、 $\ddot{\phi}$  は地震加速度を表す。

式(1)の運動方程式において、粘性項、制御力項、外力項を無視すると、自由振動における運動方程式、式(2)を得ることができる。

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = 0 \quad (2)$$

式(2)の解を、次のように仮定する。

$$\{y\} = \{x\} \sin \omega t \quad (3)$$

式(3)を式(2)に代入すると、次の固有値方程式を得ることができる。

$$\omega^2 [M]\{x\} = [K]\{x\} \quad (4)$$

式(4)を解くことにより得られるモードベクトル $\{x\}$ で構成されるモードマトリックス $[Y]$ を用いて、次のような変換を行う。

$$\{y\} = [Y]\{q\} \quad (5)$$

$$\{u\} = [V]^T [Y]\{u'\} \quad (6)$$

ここで、 $\{q\}$  は一般化変位ベクトル、 $\{u'\}$  は一般化制御力ベクトルである。

式(5)の両辺を時間 $t$ で一階微分、二階微分を行うと、次のようになる。

$$\{\dot{y}\} = [Y]\{\dot{q}\} \quad (7)$$

$$\{\ddot{y}\} = [Y]\{\ddot{q}\} \quad (8)$$

式(5)、(6)、(7)、(8)を式(1)に代入し $[Y]^T$ を左側からかける。

$$\begin{aligned} [Y]^T [M] [Y] \{\ddot{q}\} + [Y]^T [C] [Y] \{\dot{q}\} + [Y]^T [K] [Y] \{q\} \\ = [Y]^T [V] [V]^T [Y] \{u'\} - [Y]^T [M] \{E\} \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (9)$$

式(10)のような正規化を行うと、式(11)の関係は式(4)より容易に導くことができる。

$$[Y]^T [M] [Y] = [I] \quad (10)$$

$$[Y]^T [K] [Y] = [\omega^2] \quad (11)$$

ここで、 $[I]$  は単位マトリックスを表す、また $[\ ]$  は対角マトリックスを表すものとする。粘性項に関しては、次のようになると仮定する。ただし $h$ は減衰定数とする。

$$[Y]^T [C] [Y] = 2h[\omega] \quad (12)$$

式(10)、(11)、(12)を式(9)に代入すると、モードごとの独立した運動方程式を得ることができる。

$$\{\ddot{q}\} + 2h[\omega]\{\dot{q}\} + [\omega^2]\{q\} = [Y]^T [V] [V]^T [Y] \{u'\} - [Y]^T [M] \{E\} \ddot{\phi} \quad (13)$$

次に、地震加速度  $\bar{\varphi}$  は、微小時間間隔  $\Delta t$  においては、次のような一次曲線で近似できると仮定する。

$$\bar{\varphi} = at + b \quad (14)$$

ただし、 $a$ 、 $b$  は  $\Delta t$  内において一定である。

式(14)を式(13)に代入し、そして式(13)を積分すると、次のような行列方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_x' & G_x' \\ F_v' & G_v' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{q(0)\} \\ \{\dot{q}(0)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_x' \\ E_v' \end{bmatrix} [Y]^T [V] [V]^T [Y] \{u'\} \\ &\quad - \left[ \begin{bmatrix} D_x' \\ D_v' \end{bmatrix} [Y]^T [M] \{E\} a + \begin{bmatrix} E_x' \\ E_v' \end{bmatrix} [Y]^T [M] \{E\} b \right] \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、

$$\begin{aligned} F_x' &= \frac{1}{\omega\sqrt{1-h^2}} \exp(-h\omega t) \cos(\omega\sqrt{1-h^2}t - \varphi_F) \\ G_x' &= \frac{1}{\omega\sqrt{1-h^2}} \exp(-h\omega t) \sin(\omega\sqrt{1-h^2}t) \\ E_x' &= -\frac{1}{\omega^2\sqrt{1-h^2}} \exp(-h\omega t) \cos(\omega\sqrt{1-h^2}t - \varphi_E) + \frac{1}{\omega^2} \\ D_x' &= \frac{1}{\omega^3\sqrt{1-h^2}} \exp(-h\omega t) \cos(\omega\sqrt{1-h^2}t - \varphi_E) + \frac{t}{\omega^2} - \frac{2h}{\omega^3} \\ F_v' &= -\frac{\omega}{\sqrt{1-h^2}} \exp(-h\omega t) \cos(\omega\sqrt{1-h^2}t - (\varphi_F + \varphi)) \\ G_v' &= -\frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \exp(-h\omega t) \sin(\omega\sqrt{1-h^2}t - \varphi) \\ E_v' &= \frac{1}{\omega\sqrt{1-h^2}} \exp(-h\omega t) \cos(\omega\sqrt{1-h^2}t - (\varphi_E + \varphi)) \\ D_v' &= \frac{1}{\omega^2\sqrt{1-h^2}} \exp(-h\omega t) \cos(\omega\sqrt{1-h^2}t - (\varphi_D + \varphi)) + \frac{1}{\omega^2} \end{aligned}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-h^2}}{h} \quad \varphi_D = \tan^{-1} \frac{2h^2-1}{2h\sqrt{1-h^2}} \quad \varphi_E = \varphi_F = \tan^{-1} \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

また  $\{q(0)\}$ 、 $\{\dot{q}(0)\}$  は初期時間における一般化変位ベクトル、および、一般化速度ベクトルである。次に、時間間隔  $\Delta t$  で区切った離散時間系を考える。k番目に計算された一般化変位ベクトル、一般化速度ベクトルを  $k+1$  番目の初期ベクトルであるとみなすと、 $k+1$  番目における一般化変位ベクトル、および一般化速度ベクトルは式(15)より計算できる。つまり、式(16)は次のような差分方程式で書表わすことができる。

$$X(k-1) = AX(k) + BU(k) + C(k), \quad X(0) = \begin{bmatrix} \{q(0)\} \\ \{\dot{q}(0)\} \end{bmatrix} \quad (16)$$

ただし

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} F_x' & G_x' \\ F_v' & G_v' \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} E_x' \\ E_v' \end{bmatrix} [Y]^T [V] [V]^T [Y] \\ C &= - \left[ \begin{bmatrix} D_x' \\ D_v' \end{bmatrix} [Y]^T [M] \{E\} a + \begin{bmatrix} E_x' \\ E_v' \end{bmatrix} [Y]^T [M] \{E\} b \right] \\ X &= \begin{bmatrix} \{q\} \\ \{\dot{q}\} \end{bmatrix} \\ U &= \{u'\} \end{aligned}$$

### 3. 最適制御問題

評価関数  $J$  を次のように設定する。

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \{ X^T(k+1) Q X(k+1) + U^T(k) R U(k) \} \quad (17)$$

ここで  $Q$ ,  $R$  はそれぞれ応答、制御力に影響を与える重み係数行列である。

評価関数  $J$  は応答の 2 乗積分値と、制御に必要なエネルギーの和で表されるエネルギー量である。2 乗積分値とは、構造物の振動の度合いを表すものであり、制御に必要なエネルギーは制御力の大きさを示す目安となるものである。この論文では、この評価関数  $J$  が最小となる状態を最適とすることにする。式(16)で表される状態方程式の各々のモードについて、式(17)を最小にするような操作量を見つけたし、それを重ね合わせるにより、構造物に作用させる最適操作量を決定する。

### 4. ダイナミック・プログラミングによる定式化

0 段から  $N-1$  段までの  $N$  段決定過程として定式化をおこなう。はじめに  $N-1$  段において、これを 1 段決定過程と考えて、評価量  $J_{N-1}$  を最小にするような最適操作量  $U_{OPT}(N-1)$  を決定する。次に  $N-2$  段において、これを 2 段決定過程と考え、さきほど求めた  $U_{OPT}(N-1)$  を  $J'_{N-1}$  に代入することにより得られる  $\min J'_{N-1}$  と  $N-2$  段における評価量  $J_{N-2}$  の和で表される  $J'_{N-2}$  を最小にするような  $U_{OPT}(N-2)$  を決定する。ここで最適性の原理が使われている。つまり最適操作量  $U_{OPT}(N-2)$  が決定されると残る  $U_{OPT}(N-1)$  は 1 段決定過程として最適な操作量である。同様にこれを 0 段までおこなうと  $N$  段すべての最適操作量を求めることができる。ここで  $N-n$  段における最適操作量は  $n$  の関数として一般的に表される。以下順次、考察する。

(1)  $k = N-1$  のとき

$N-1$  段の評価量は、式(17)より

$$J_{N-1} = [X^T(N)QX(N) + U^T(N-1)RU(N-1)]$$

である。式(15)より、これは次のようになる。

$$J_{N-1} = [\{AX(N-1) + BU(N-1) + C(N-1)\}^T Q \{AX(N-1) + BU(N-1) + C(N-1)\} + U^T(N-1)RU(N-1)]$$

$N$  段においては制御力は働かないので

$$J_{N-1} = J'_{N-1}$$

$J'_{N-1}$  を最小にする最適操作量  $U_{OPT}(N-1)$  は

$$U_{OPT}(N-1) = -(R + B^TQB)B^T\{QAX(N-1) + QC(N-1)\}$$

である。これを  $J'_{N-1}$  の式に代入すると最小量  $\min J'_{N-1}$  が求まる。

$$\min J'_{N-1} = X^T(N-1)w_1X(N-1) + X^T(N-1)Y_1C(N-1) + C^T(N-1)Y_1^T X(N-1) + C^T(N-1)Z_1C(N-1)$$

ここで

$$w_1 = A^TQA - A^TQB(R + B^TQB)^{-1}B^TQA$$

$$Y_1 = A^TQ - A^TQB(R + B^TQB)^{-1}B^TQ$$

$$Z_1 = Q - QB(R + B^TQB)^{-1}B^TQ$$

$W_0 = Q$ ,  $W_1 = w_1 + Q$  とすると

$$W_1 = Q + A^TW_0A - A^TW_0B(R + B^TW_0B)^{-1}B^TW_0A$$

$$Y_1 = A^TW_0 - A^TW_0B(R + B^TW_0B)^{-1}B^TW_0$$

$$Z_1 = W_0 - W_0B(R + B^TW_0B)^{-1}B^TW_0$$

である。

(2)  $k = N-2$  のとき

$N-2$  段の評価量は式(16)より

$$J_{N-2} = [X^T(N-1)QX(N-1) + U^T(N-2)RU(N-2)]$$

ここで

$$J'_{N-2} = [J_{N-2} + \min J'_{N-1}]$$

とすると(1)より  $J'_{N-2}$  は次のように整理できる。

$$J'_{N-2} = [X^T(N-1)W_1X(N-1) + X^T(N-1)Y_1C(N-1) + C^T(N-1)Y_1^T X(N-1) + C^T(N-1)Z_1C(N-1) + U^T(N-2)RU(N-2)]$$

これを最小にするような最適操作量  $U_{OPT}(N-2)$  を求めると次のようになる。

$$U_{OPT}(N-2) = - (R + B^T W_1 B)^{-1} B^T \{W_1 A X(N-2) + W_1 C(N-2) + Y_1 C(N-1)\}$$

これを  $J'_{N-2}$  の式に代入すると最小量  $\min J'_{N-2}$  が求まる。

$$\begin{aligned} \min J_{N-2} = & [X^T(N-2)W_2X(N-2) + X^T(N-2)Y_2C(N-2) + C^T(N-2)Y_2^T X(N-2) \\ & + C^T(N-2)Z_2C(N-2) + X^T(N-2)\alpha_2C(N-1) + C^T(N-1)\alpha_2^T C(N-2) \\ & + C^T(N-2)\beta_2C(N-1) + C^T(N-1)\beta_2^T C(N-2) + C^T(N-1)r_2C(N-1)] \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} W_2 &= Q + A^T W_1 A - A^T W_1 B (R + B^T W_1 B)^{-1} B^T W_1 A \\ Y_2 &= A^T W_1 - A^T W_1 B (R + B^T W_1 B)^{-1} B^T W_1 \\ Z_2 &= W_1 - W_1 B (R + B^T W_1 B)^{-1} B^T W_1 \\ \alpha_2 &= A^T Y_1 - A^T W_1 B (R + B^T W_1 B)^{-1} B^T Y_1 \\ \beta_2 &= Y_1 - W_1 B (R + B^T W_1 B)^{-1} B^T Y_1 \\ r_2 &= Z_1 - Y_1 B (R + B^T W_1 B)^{-1} B^T Y_1 \end{aligned}$$

ところで

$$Y_1 = A^T W_0 - A^T W_0 B (R + B^T W_0 B)^{-1} B^T W_0$$

より、 $U_{OPT}(N-2)$  は次のように書換えられる。

$$\begin{aligned} U_{OPT}(N-2) = & - (R + B^T W_1 B)^{-1} B^T \{W_1 A X(N-2) + W_1 C(N-2) \\ & + \{A^T - A^T W_0 B (R + B^T W_0 B)^{-1} B^T\} W_0 C(N-1)\} \end{aligned}$$

(3)  $k = N-3$  のとき

(1), (2) のように同様に行うと、最適操作量  $U_{OPT}(N-3)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} U_{OPT}(N-3) = & - (R + B^T W_2 B)^{-1} B^T \{W_2 A X(N-3) + W_2 C(N-3) \\ & + \{A^T - A^T W_1 B (R + B^T W_1 B)^{-1} B^T\} W_1 C(N-2) \\ & + \{A^T - A^T W_1 B (R + B^T W_1 B)^{-1} B^T\} \\ & \times \{A^T - A^T W_0 B (R + B^T W_0 B)^{-1} B^T\} W_0 C(N-1)\} \end{aligned}$$

(4)  $k = N-n$  のとき

(1), (2), (3) より最適操作量の一般項は次のように推定できる。

$$\begin{aligned} U_{OPT}(N-n) = & - (R + B^T W_{n-1} B)^{-1} B^T \{W_{n-1} A X(N-n) \\ & + W_{n-1} C(N-n) \\ & + Y_{n-2}^1 W_{n-2} C(N-(n-1)) \\ & + Y_{n-2}^2 Y_{n-3}^1 W_{n-3} C(N-(n-2)) \\ & + Y_{n-2}^3 Y_{n-3}^2 Y_{n-4}^1 W_{n-4} C(N-(n-3)) \\ & \vdots \\ & + Y_{n-2}^1 Y_{n-3}^1 Y_{n-4}^1 Y_{n-5}^1 Y_{n-6}^1 \dots Y_1^1 Y_0^1 W_0 C(N-1)\} \end{aligned}$$

ただし、

$$W_0 = Q$$

$$W_n = Q + A^T W_{n-1} A - A^T W_{n-1} B (R + B^T W_{n-1} B)^{-1} B^T W_{n-1} A$$

$$Y_n^1 = A^T - A^T W_n B (R + B^T W_n B)^{-1} B^T$$

これを  $k=0$  まで続けることにより、すべての最適操作量を求めることができる。

## 5. 数値解析例

図1で示される地震動を受ける4層ラーメン構造物の屋上に最適制御力 $U$ を作用させた場合について解析を行う。地震波にはエルセントロ地震波を用いる。エルセントロ地震波の地震加速度は図2に示される。構造物の部材として、柱には縦10.0(cm)、横10.0(cm)、はりには縦12.7(cm)、横10.0(cm)の長方形断面をもつ鋼材を用いるとし、各層には5.0(ton)の重量がかけられるとする。この構造物の固有周期、及び、固有振動モードは図3に示される。いま、評価関数 $J$ における応答に影響を与える重み係数行列 $Q$ を単位行列とし、制御力に影響を与える重み係数行列 $R$ の値を変化させた場合について、屋上における変位、及び、制御力を計算する。いま図4(b)のように制御力を与えることができたとすると、変位は図4(a)のように制御される。ここに点線は制御力を作用させない場合の応答である。これより図4(b)の制御力を作用させた場合は、最大変位を50%ほどに減少させることが可能となる。また図5(b)の制御力では最大変位を25%ほどに減少させることができ、さらに図6(b)の制御力では10%程度まで制御することが可能であるということが判明した。このように制御力を適切に与えることにより地震応答を変位について10%以下に制御することが可能であると判断される。

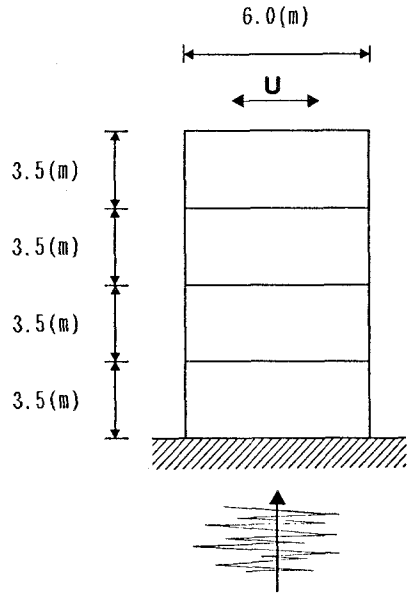


図-1 4層ラーメン

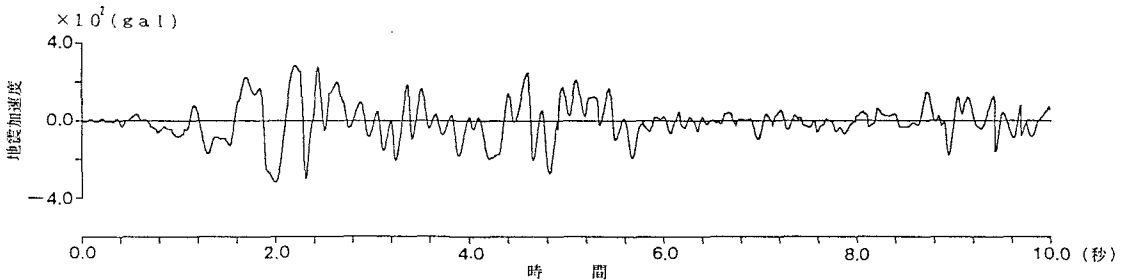


図-2 エルセントロ地震加速度

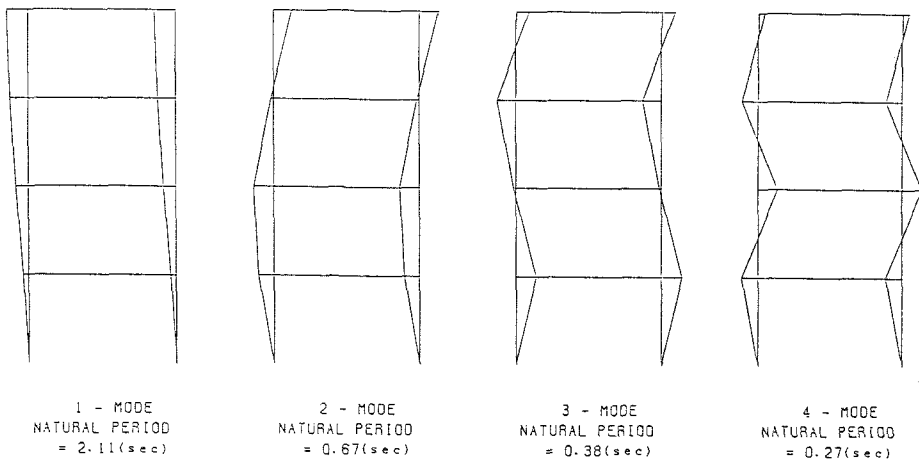


図-3 固有周期、及び、固有振動モード

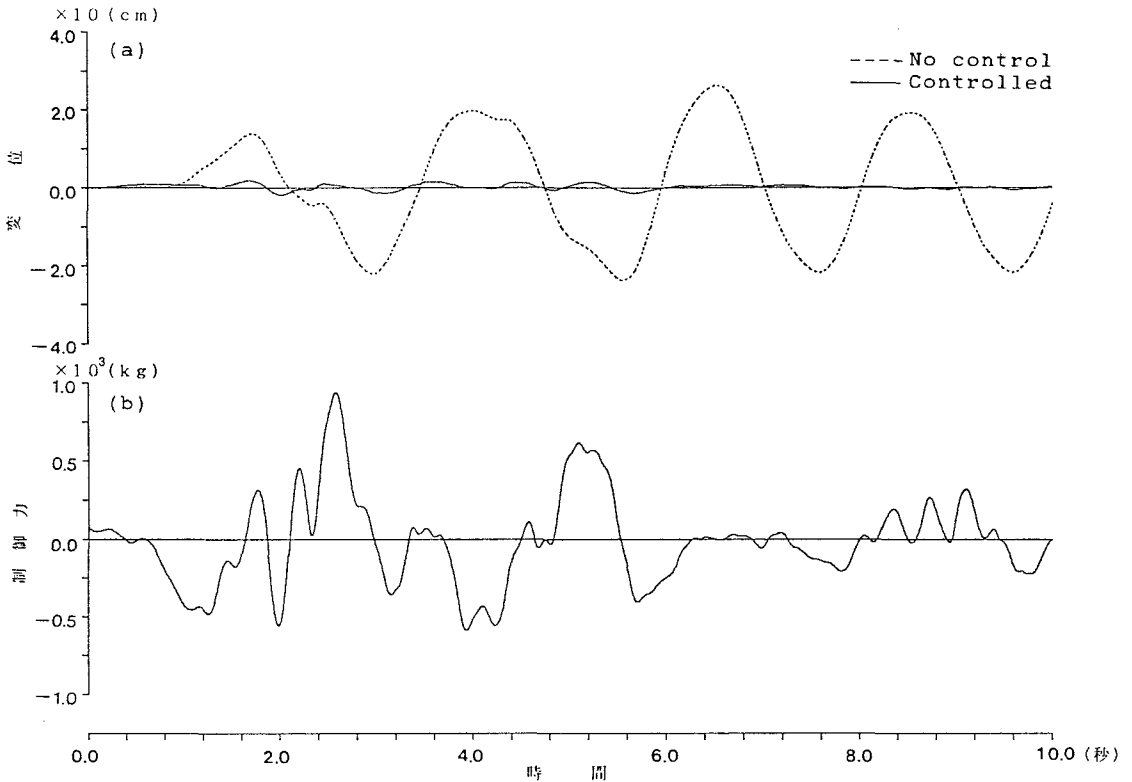


図-6 変位、及び、制御力 ( $R=0.0001$ )

## 6. おわりに

今回、地震時に生じる構造物の振動を最適にコントロールするために、作用する外力を考慮にいたしたトラッキング制御方式を用いて数値シミュレーションを行った。計算結果より、評価関数  $J$  の中の重み係数行列の値を変えることにより、構造物の振動を自由にコントロールできることがわかった。ところで、トラッキング制御方式においては、制御力はあらかじめ構造物に作用する外力が、最初から最後まで、すべて明確に与えられなければならないと決定することができない。そのため実際問題として未知である地震力に対しては、トラッキング制御方式による構造物の最適制御はおこえない。その点、本解析結果は直接用いることができない欠点がある。しかし、ある外力に対してどのように制御すれば、その応答がどのようになるかをあらかじめ算定しておくことは、実用上大きな意味をもつものである。また、ここで述べた制御方式は、最初から最後まで外力が与えられない場合にも拡張応用することが可能である。本解析結果はその基礎になるものである。

## 参考文献

- (1) Yang, J-N., Application of Optimal Control Theory to Civil Engineering Structures, "Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 101, No. EM6, Proc. Paper 11812, Dec., 1975, pp819-838.
- (2) Mohamed Abdel-Rohman and Horst H. Leipholz, Structural Control by Pole Assignment Method, "Journal of the Engineering Mechanics Division, Oct., 1978, pp1159-1175
- (3) 辻 節三、「最適制御概論」、養賢堂、1967
- (4) 深沢、川原、『地震時における構造物の最適制御』、第1回計算力学シンポジウム、日本科学技術連盟、1987

(1983年1月22日受付)

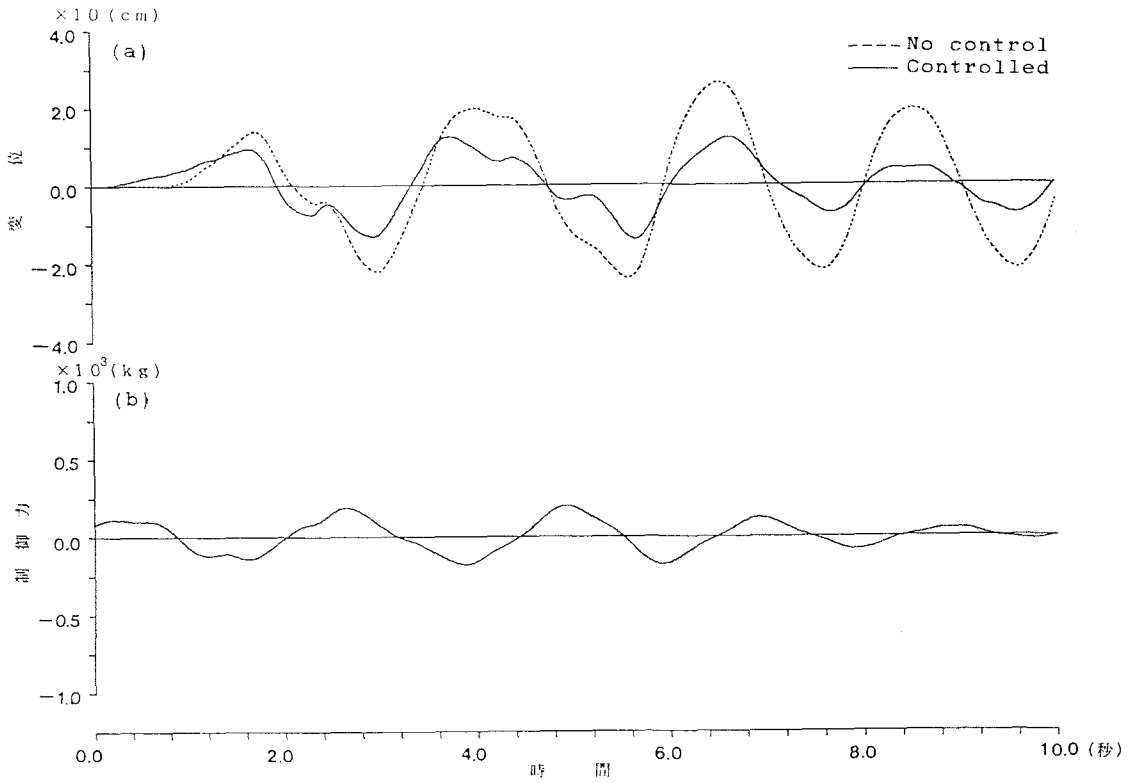


図-4 変位、及び、制御力 ( $R=0.01$ )

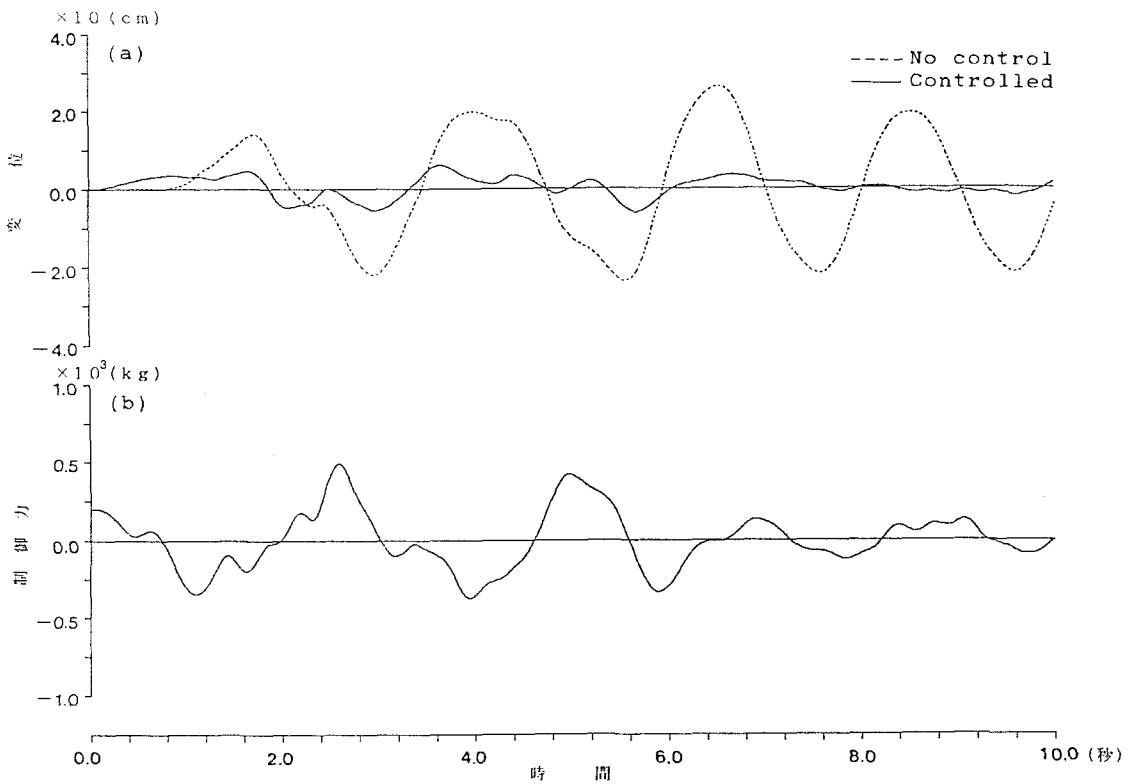


図-5 変位、及び、制御力 ( $R=0.001$ )