II－13　ポアソン型地震動入力による動的設計震度の検討

熊本大学工学部　正員　秋吉 卓
熊本大学工学部　学生員　○古川 和義

I まえがき

構造物の耐震設計を行なう場合，従来の震度法に動的な地震応答の影響を取り入れ，これをなるべく簡易化し，静的な手法によって計算する修正震度法が多用されつつある。そこで，各構造物の固有周期ならびに減衰定数に準ずる応答スペクトルが必要となるが，この応答スペクトルは，構造物の動的特性・地震動の特性などによって変化するので，種々の地震動によるものを平均化した平均応答スペクトルがHousnerによって与えられた。ここでは，地震動として，発生がポアソン分布に，振幅が正規分布に従う非定常確率過程（非定常ショットノイズ）[1]で模擬し，最大地震応答の推定には純出生過程を用いて応答スペクトルを解析し検討をくわえた。

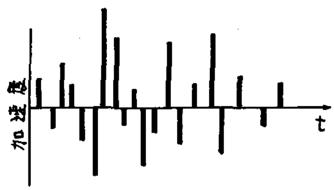

Fig.1　ランダム パルス

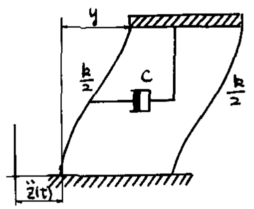

Fig.2　1自由度系の振動モデル

II 共分散関数

1質点系の線形構造物が $\ddot{z}(t)$ の地震動をうける場合(Fig.2)，その運動方程式は，

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = -\ddot{z}(t) \quad \text{-------}(1)$$

ただし，y：構造物の相対変位，$\ddot{z}(t)$：地動加速度，ζ：減衰定数
ω_0：固有円振動数

ところで，応答 $y(t)$ は，荷重関数を $h(t)$ とすると，Duhamelの積分より，

$$y(t) = \int_0^t [-\ddot{z}(\tau)]\,h(t-\tau)\,d\tau \quad \text{-------}(2)$$

であたえられる。ここに　$h(t) = \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_0 t}\sin\omega_d t$，　$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$　である。

ここで，地震動入力の平均値をzeroとしてもその一般性をうしなわないので，$E[\ddot{z}(t)]=0$ とすると，応答変位 $y(t)$ の共分散は，

$$K_{yy}(t_1,t_2) = E[y(t_1)\,y(t_2)]$$
$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\tau_1)\,h(t_2-\tau_2)\,E[\{-\ddot{z}(\tau_1)\}\{-\ddot{z}(\tau_2)\}]\,d\tau_1 d\tau_2 \quad \text{------}(3)$$

一方，入力の不規則過程 $S(t)$ が，　$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \ddot{z}_k\,\delta(t-t_k)$　------(4)

ここで，$N(t)$：非定常増分をもつポアソン過程，$\ddot{z}_k$：期待値zeroの不規則変数，$\delta(t)$：デルタ関数
であらわされるとき，その共分散は，次のようにあらわされる。

$$K_{\ddot{z}\ddot{z}}(t_1,t_2) = E[\ddot{z}^2]\int_0^{\min(t_1,t_2)} \lambda(\tau)\,\delta(t_1-\tau)\,\delta(t_2-\tau)\,d\tau$$
$$= E[\ddot{z}^2]\,\lambda(t_1)\,\delta(t_2-t_1) \qquad (t_2 \geq t_1) \quad \text{------}(5)$$

ここで，$\lambda(t)$：期待非定常到着率，$E[\ddot{z}^2]$：入力加速度の2乗平均

よって，応答の共分散は，式(5)を式(3)に代入すると得られる。

$$K_{yy}(t_1,t_2) = E[\ddot{z}^2]\int_0^{t_1} \lambda(\tau_1)\,h(t_1-\tau_1)\,h(t_2-\tau_1)\,d\tau_1 \quad \text{-------}(6)$$

期待非定常到着率 $\lambda(t)$ を，ここでは以下のような式を用いた。

$$\lambda(t) = \lambda_0(e^{-at} - e^{-bt}) \qquad (b>a>0) \quad \text{------}(7)$$

したがって，式(7)を式(6)に代入し，積分をおこない　$t_1 = t_2 = t$　とおくと，応答の変位，速度の分散，および相関係数はそれぞれ次式であたえられる。

$$\sigma_y^2 = K_{yy}(t,t), \quad \sigma_{\dot{y}}^2 = K_{\dot{y}\dot{y}}(t,t), \quad \rho_{y\dot{y}} = K_{y\dot{y}}(t,t)/\sigma_y(t)\sigma_{\dot{y}}(t) \quad \text{------}(8)$$

Ⅲ 純出生過程による最大地震応答の確率分布[2)]

地震応答の絶対最大値を $\max|y(t)|$ とし、これがあるレベルYを越えない確率分布を $\Phi(Y)$ とすると、

$$\Phi(Y)=P\left[\max|y(t)|\leq Y\ ;\ 0\leq t\leq\infty\right]$$

となるが、これは、近似的に $\Phi(Y,\tau)=P\left[\max|y(t)|\leq Y\ ;\ 0\leq t<\tau\right]$ となる。

これを初期値 $y(0)$ が、Yよりも小さいという条件付確率であらわすと、

$$\begin{aligned}\Phi(Y,\tau)&=P\left[|y(0)|\leq Y\right]P\left[\max|y(t')|\leq Y\ /\ |y(0)|\leq Y\ ;\ 0<t'\leq\tau\right]\\&=C_0(Y)\,P_0(Y,\tau)\end{aligned}\qquad\text{------(9)}$$

となる。ここで $y(0)$ が正規分布に従うとすると

$$C_0(Y)=P\left[|y(0)|\leq Y\right]=\int_{-Y}^{Y}p(y,0)\,dy=\mathrm{erf}\left(Y/\sqrt{2}\sigma_{y(0)}\right),$$ ここで $\mathrm{erf}(t)$：誤差関数

$P_0(Y,\tau)$ は、推移強度関数を $g(t)$ とする純出生過程の方程式

$$\frac{\partial}{\partial\tau}P_0(Y,\tau)=-g(t)\,P(Y,\tau)$$

を解くことより、 $P_0(Y,\tau)=\exp\left[-\int_0^{\tau}g(Y,t)\,dt\right]$

ここで、

$$\begin{aligned}g(Y,t)\,dt&=P\left[|y(t+dt)|>Y\ /\ \max|y(t'')|\leq Y\ ;\ 0\leq t''\leq t\right]\\&=\frac{P\left[|y(t+dt)|>Y\cap\max|y(t'')|\leq Y\ ;\ 0\leq t''<t\right]}{P\left[\max|y(t'')|\leq Y\ ;\ 0\leq t''\leq t\right]}\end{aligned}$$

さらに、$0\leq t''\leq t$ で $\max|y(t'')|$ は、$|y(t)|$ へ影響を及ぼさないポアソン過程であると上式は近似的に

$$g(Y;t)\,dt\cong\frac{P\left[|y(t+dt)|>Y\cap|y(t)|\leq Y\right]}{P\left[|y(t)|\leq Y\right]}=\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}\qquad\cdots(10)$$

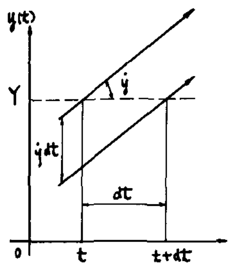

Fig 3 レベル超過の模式図

ここで、$Q_1(t)$ は、Fig 3 からもみられるように、$y,\dot{y}$ の密度関数を $p(y,\dot{y};t)$ とすると、

$$\begin{aligned}Q_1(t)&=P\left[|y(t+dt)|>Y\cap|y(t)|\leq Y\right]\\&=\int_0^{\infty}d\dot{y}\int_{Y-\dot{y}dt}^{Y}p(y,\dot{y};t)\,dy+\int_{-\infty}^{0}\int_{-Y}^{-Y+\dot{y}dt}p(y,\dot{y};t)\,dy\\&=2dt\int_0^{\infty}\dot{y}\,p(Y,\dot{y};t)\,d\dot{y}\\&=m(Y;t)\,dt\end{aligned}\qquad\text{------(11)}$$

となり、ここで、$y,\dot{y}$ が2次元正規分布に従うときは、

$$m(Y,t)dt=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\sigma_y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{\sigma_y}\right)^2\right\}\left[2\sqrt{1-\rho_{y\dot{y}}^2}\exp\left\{-\frac{\rho_{y\dot{y}}}{2(1-\rho_{y\dot{y}}^2)}\left(\frac{Y}{\sigma_y}\right)^2\right\}+\sqrt{2\pi}\,\rho_{y\dot{y}}\left(\frac{Y}{\sigma_y}\right)\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho_{y\dot{y}}}{\sqrt{2(1-\rho_{y\dot{y}}^2)}}\frac{Y}{\sigma_y}\right)\right\}\right]dt$$

となる。また $Q_2(t)$ は $Q_2(t)=P\left[|y(t)|\leq Y\right]=\mathrm{erf}\left(Y/\sqrt{2}\sigma_y\right)$

よって確率分布関数は、次式のようになる。

$$\Phi(Y;\tau)=\mathrm{erf}\left(\frac{Y}{\sqrt{2}\sigma_{y(0)}}\right)\exp\left[-\int_0^{\tau}\frac{m(Y;t)\,dt}{\mathrm{erf}(Y/\sqrt{2}\sigma_y)}\right]\qquad\text{------(12)}$$

Ⅳ 平均応答スペクトル

最大地震応答の期待値 $E[Y]$ に対して

$$S_D=E[Y],\quad S_V=\omega_0 S_D,\quad S_A=\omega_0^2 S_D\qquad\text{------(13)}$$

とおいたとき、S_D,S_V,S_A と固有周期 T_0 との関係を減衰定数をパラメータとして図示したものが、実際の地震波によってあたえられる平均応答スペクトルに対応するもので、式(13)は、それぞれ変位・速度・加速度応答スペクトルを表わす。純出生過程による解法から求めた確率分布関数 $\Phi(Y)$ より、最大地震応答の期待値 $E[Y]$ を求めるには次式を用いる。また、動的設計震度の検討はこの平均応答スペクトルを用いるものとする。

$$E[Y]=\int_0^{\infty}\left\{1-\Phi(Y)\right\}dY$$

なお、数値計算結果例ならびに考察は、講演当日に述べる予定である。

参考文献
1) Y.K.リン：構造動力学の確率論的方法 培風館
2) 星田弘行：不規則地震動に対する構造物の最大応答の推定法について 建築学会論文報告集 201号