

IV-9

地震時に於ける斜組杭の挙動

九州大学工学部 正員 小坪 清 真
 同上 学生員 荒牧 暲 治
 同上 〇学生員 川 人 達 男

1. 緒言

近年、土木構造物に斜組杭が多く使用されているが、その耐震設計法は通常、上部構造物に地震時慣性力が静的に水平方向に作用するように取扱っている。すなわち、地盤は深さ方向に同一振動と行い杭の変位に比例した抵抗を及ぼすとしている。しかし、地盤はせん断振動と行いその変位は深さ方向に一定でないと考えらる。従って杭の変位はこの地盤の変位からの影響を受け、これを無視した杭の変位と当然違ふであろう。また、この相違は杭の地中部の深さ、土のせん断弾性係数、あるいは土の地盤反力係数等の要素によつても影響を受けるであろうと考えらる。そこで、これらの要素の値を種々変え、後述の仮定を用いて地震時の地盤のせん断振動による変位の影響を考えた斜組杭の理論的考察を試みた。

2. 地震時に於る斜組杭の解析

2-1. 基本的な考え方と仮定

地盤が変形しない場合の斜組杭のr次の振動型を Υ_r とすると杭変位 Υ は $\Upsilon = \sum \alpha_r \Upsilon_r$ で表わされる。

また、地盤のp次の振動型を U_p とすると地盤変位 u は $u = \sum b_p U_p$ と表わされる。

この地盤変形による杭変位を Υ' とし、 U_p なる振動型の変形と地盤が変形しない時の杭の振動型を Υ_r とすると、 $\Upsilon = \sum b_p \Upsilon_r$ となる。従って杭の実際の変位 Υ は $\Upsilon = \Upsilon' + \Upsilon$ で表わされる。

この理論に基づき Modal analysis を用い動的解析を行う。この斜組杭を解くにあつて次のような仮定を設ける。

1. 地盤のせん断弾性係数、地盤反力係数は深さ方向に一定。
2. 杭下端は基礎に到達していてピン構造とし、杭上端は回転拘束である。即ち、ロッキング振動は行わぬものとする。
3. 直杭は曲げのみを受け、斜杭は曲げと軸力を受ける。
4. 杭長は20mとし、土の深さは5, 10, 15mで代表させる。
5. 地盤反力係数 k は、2, 5, 8 kg/cm^3 とする。

2-2. 地盤が変形しない場合の杭の固有振動数及び振動型

(a) 斜杭の曲げ基礎微分方程式

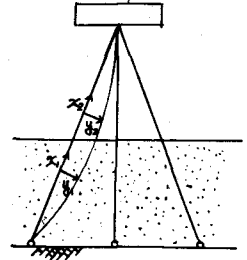
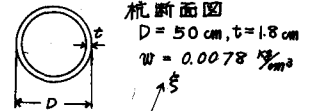
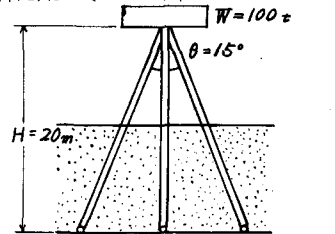
$$\begin{cases} \frac{W A}{\gamma} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} (E I \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2}) - k D \Upsilon, & \dots \text{地中部} \\ \frac{W A}{\gamma} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} (E I \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2}), & \dots \text{空中部} \end{cases}$$

$$\Upsilon_1 = Y_1 \sin n t, \quad \Upsilon_2 = Y_2 \sin n t \quad \text{とし}$$

$$S^* = \frac{1}{4 E I} (k D - \frac{W A}{\gamma} n^2), \quad \epsilon^* = \frac{W A}{4 \gamma E I} n^2 \quad \text{とおくと}$$

$$\text{解は、} \quad Y_1 = C_1 \cos \xi + A_1 \cos \epsilon \xi + A_2 \sin \epsilon \xi + B_1 \sin \xi + A_3 \cos \epsilon \xi + A_4 \sin \epsilon \xi$$

$$Y_2 = B_2 \cos \epsilon \xi + B_3 \sin \epsilon \xi + B_4 \cos \xi + B_5 \sin \xi$$



(b) 直杭の曲げ基礎微分方程式

$$\begin{cases} \frac{20A}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) - R D u, & \dots\dots \text{地中部} \\ \frac{20A}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} (EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) & \dots\dots \text{空中部} \end{cases}$$

$$u_1 = U_1 \sin nt, \quad u_2 = U_2 \sin nt \quad \text{と おく と}$$

解は、 $U_1 = \cos \delta z \{ C_1 \cos \delta z + C_2 \sinh \delta z \} + \sin \delta z \{ C_3 \cos \delta z + C_4 \sinh \delta z \}$

$$U_2 = D_1 \cos \epsilon z + D_2 \sin \epsilon z + D_3 \cosh \epsilon z + D_4 \sinh \epsilon z$$

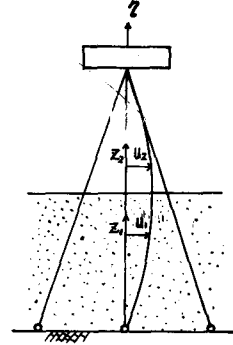
(c) 斜杭の軸方向基礎微分方程式

$$\begin{cases} \frac{20A}{8} \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} = EA \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} - R \pi D x_1, & \dots\dots \text{地中部} \\ \frac{20A}{8} \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2} = EA \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2} & \dots\dots \text{空中部} \end{cases}$$

$$x_1 = X_1 \sin nt, \quad x_2 = X_2 \sin nt \quad \text{と し } \beta^2 = \frac{1}{EA} (R \pi D - \frac{20A}{8} n^2), \quad \epsilon^2 = \frac{20A}{8EA} n^2 \quad \text{と おく と}$$

解は、 $X_1 = E_1 \cosh \beta \xi + E_2 \sinh \beta \xi$

$$X_2 = F_1 \cos \epsilon \xi + F_2 \sin \epsilon \xi$$



未知係数を減らすため、杭下端の境界条件を代入する。即ち、 $\xi=0$ に於て $z-X$ と、変位が共に 0 である。また、 $z=0$ に於ても同様である。

即ち、 $z=\xi=0$ に於て、 $Y_1 = X_1 = U_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = 0$ の条件より $A_1 = A_4 = C_1 = C_4 = E_1 = 0$ となる。

以上の式を定数を書き変え整理すると次のようになる。

* 地中部の杭の変位式

$$\begin{cases} Y_1 = A_1 \cos \delta \xi \sinh \delta \xi + A_2 \sin \delta \xi \cosh \delta \xi \\ U_1 = C_1 \cos \delta z \sinh \delta z + C_2 \sin \delta z \cosh \delta z \\ X_1 = E \sinh \beta \xi \end{cases}$$

* 空中部の杭の変位式

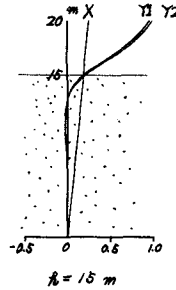
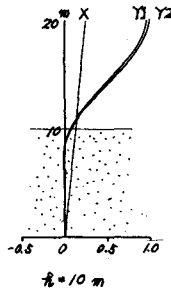
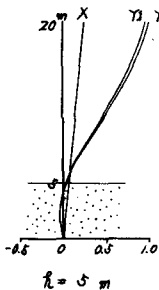
$$\begin{cases} Y_2 = B_1 \cos \epsilon \xi + B_2 \sin \epsilon \xi + B_3 \cosh \epsilon \xi + B_4 \sinh \epsilon \xi \\ U_2 = D_1 \cos \epsilon z + D_2 \sin \epsilon z + D_3 \cosh \epsilon z + D_4 \sinh \epsilon z \\ X_2 = F_1 \cos \epsilon \xi + F_2 \sin \epsilon \xi \end{cases}$$

以上の式に境界条件を代入し固有振動数、振動型を求める。境界条件として、頭部に於ては回転角が 0 である条件、せん断力の釣合いの条件、変位の連続の条件等、また、空中部と地中部の境界層に於ては連続の条件がある。この境界条件より 15 個の式ができるがこの式の Determinant をとり、この Determinant = 0 となる n が所要の固有円振動数である。各々の値に対応する 1 次の固有円振動数は右表のようなになる。

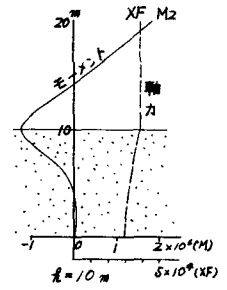
$k \%$	2.0			5.0			8.0		
β (m)	5	10	15	5	10	15	5	10	15
n (rad/s)	13.824	14.627	17.287	13.841	14.698	17.762	13.849	14.727	18.006

次にこの固有円振動数を用いて振動型を求めると、下図のようなになる。

< $k=5.0 \text{ kg/m}^3$ の場合 > Y_1 : 斜杭横方向振動型 Y_2 : 直杭横方向振動型 X : 斜杭軸方向振動型
・直杭頭が 10 変位する場合の Mode



・応力 Mode



2-3. 地盤が変形する場合の杭の変形曲線

地盤の振動型は次のように与えられる。

$$U_p = C_2 (-1)^n \sin \frac{2n-1}{2} \pi \frac{z}{L} \quad \text{なお } C_2 = 1.0 \text{ とする。}$$

また、固有振動数は $N = \frac{2n-1}{2L} = \frac{2n-1}{4L} \sqrt{\frac{EG_m}{W_m}}$ で表わされる。

但し、 G_m : 土のせん断弾性係数 W_m : 土の単位体積重量
 地盤が U_p なる撓変位を起す時の杭変形及びモーメントは次の式より求まる。

(a) 直杭 (横方向)

$$\begin{cases} EI \frac{d^4 u}{dz^4} = -kD(u - U) & \dots \text{地中部} \\ EI \frac{d^4 u}{dz^4} = 0 & \dots \text{空中部} \end{cases}$$

(b) 斜杭 (横方向)

$$\begin{cases} EI \frac{d^4 y}{dz^4} = -kD(y - U \cos \theta) & \dots \text{地中部} \\ EI \frac{d^4 y}{dz^4} = 0 & \dots \text{空中部} \end{cases}$$

(c) 斜杭 (軸方向)

$$\begin{cases} EA \frac{d^2 x}{dz^2} = k_r D(x - U \sin \theta) & \dots \text{地中部} \\ EA \frac{d^2 x}{dz^2} = 0 & \dots \text{空中部} \end{cases}$$

[2-2]と同じく境界条件を代入し、 $\frac{kD}{4EI} = \alpha^2$, $\frac{2n-1}{2L} \pi = m$, $\frac{k_r D}{EA} = \gamma^2$ とおくと上式の解は次のようになる

* 地中部の杭の変位式

* 空中部の杭の変位式

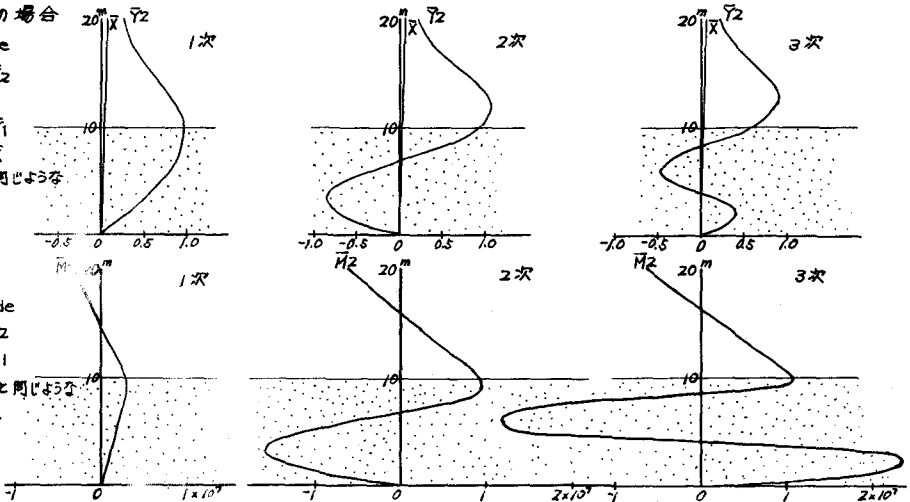
$$\begin{cases} y_1 = A_1 \cos \alpha z \sinh \alpha L + A_2 \sin \alpha z \cosh \alpha L + \frac{(-1)^n 4\alpha^4 \cos \theta}{m^2 \cosh^2 \alpha L + 4\alpha^2} \sin m L \\ x_2 = E \sinh \gamma z + \frac{(-1)^n \gamma^2 \sin \theta}{m^2 \cosh^2 \alpha L + \gamma^2} \sin m L \\ u_4 = C_1 \cos \alpha z \sinh \alpha L + C_2 \sin \alpha z \cosh \alpha L + \frac{(-1)^n 4\alpha^4}{m^2 + 4\alpha^2} \sin m L \end{cases} \begin{cases} y_2 = B_1 + B_2 z + B_3 z^2 + B_4 z^3 \\ x_2 = F_1 + F_2 z \\ u_4 = D_1 + D_2 z + D_3 z^2 + D_4 z^3 \end{cases}$$

上の変位式に頭部、境界面、下端等に対する境界条件を代入し、15個の条件式を求め、更に $n=1, 2, 3$ 次を代入し、掃出法により未知係数を求めて杭の振動型を求めると次のようになる。

<地盤が U_p なる変形する場合の杭の振動型 (1~3次)>

• 変位 Mode
 直杭 \bar{y}_2
 斜杭
 横方向 \bar{y}_1
 軸方向 \bar{x}
 \bar{y}_1 は \bar{y}_2 と同じような型をとる。

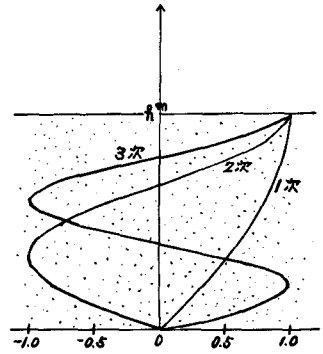
• 応力 Mode
 直杭 M_2
 斜杭 M_1
 M_1 は M_2 と同じような型をとる。



<地盤の振動型 U_p >

$$W_m = 1.8 \times 10^3 \text{ kg/cm}^3$$

$$G_m = 10 \text{ kg/cm}^2$$



2-4. 応答計算

地盤が変形しない場合の直航横方向、斜航横方向、斜航軸方向の振動型を Y_r, Y_r, X_r とする。

なお、丁は杭頭部の振動型で $T_r = 1.0$ とする。

系'の全運動エネルギー—口直交の条件を満足するように決めると

$$K = \frac{20A}{2g} \int_0^H (\sum a_r^2 Y_r^2) dz + \frac{20A}{g} \int_0^{H/2} (\sum a_r^2 Y_r^2) dz + \frac{20A}{g} \int_0^{H/2} (\sum a_r^2 X_r^2) dz + \frac{W}{2g} (\sum a_r^2 T_r^2)$$

また、全歪エネルギーは n_r と r 次の固有円振動数とすると

$$V = \frac{20A}{2g} \int_0^H (\sum n_r^2 a_r^2 Y_r^2) dz + \frac{20A}{g} \int_0^{H/2} (\sum n_r^2 a_r^2 Y_r^2) dz + \frac{20A}{g} \int_0^{H/2} (\sum n_r^2 a_r^2 X_r^2) dz + \frac{W}{2g} (\sum n_r^2 a_r^2 T_r^2)$$

一般力は次の2つの部分から成る。

- (a) 地震の加速度による一般力 (b) 地盤変形による一般力

地盤が下なる振動型を n 次の時の杭の静変位を \bar{Y}_p とすると全一般力は

$$\begin{aligned} Q = & -\frac{20A}{g} \phi \int_0^H Y_{zp} dz - \frac{20A}{g} \phi \cos \theta \int_0^{H/2} Y_{rp} dz - \frac{20A}{g} \phi \sin \theta \int_0^{H/2} X_{rp} dz - \frac{W}{g} \phi T_r \\ & - \sum \frac{20A}{g} b_p \int_0^H Y_{zp} Y_{zn} dz - \sum \frac{20A}{g} b_p \int_0^{H/2} Y_{rp} Y_{rn} dz - \sum \frac{20A}{g} b_p \int_0^{H/2} X_{rp} X_{rn} dz - \sum \frac{W}{g} b_p T_r T_n \end{aligned}$$

以上の式を Lagrange の運動方程式に代入して最終的に応答式は次のようになる。

$$\ddot{a}_r + 2\beta_r n_r \dot{a}_r + n_r^2 a_r = -\frac{1}{M_r} \{ M_r \ddot{\phi} + \sum b_p \ddot{M}_{pr} \}$$

b_p は地盤の運動方程式より次のように表わされる。

$$\ddot{b}_p + 2\beta_p n_p \dot{b}_p + n_p^2 b_p = -\beta_p \ddot{\phi}$$

但し、
$$\beta_p = \frac{\int_0^H \bar{Y}_p dz}{\int_0^H \bar{Y}_p^2 dz}$$

β_1	β_2	β_3
1.27324	-0.42441	0.25465

< 刺数係数 β_p の値 >

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{20A}{g} \int_0^H Y_{zp}^2 dz + \frac{20A}{g} \int_0^{H/2} Y_{rp}^2 dz + \frac{20A}{g} \int_0^{H/2} X_{rp}^2 dz + \frac{W}{g} T_r^2 \\ M_{rp} &= \frac{20A}{g} \int_0^H Y_{zp} Y_{zn} dz + \frac{20A}{g} \int_0^{H/2} \cos \theta \cdot Y_{rp} Y_{rn} dz + \frac{20A}{g} \int_0^{H/2} \sin \theta \cdot X_{rp} X_{rn} dz + \frac{W}{g} T_r T_n \\ M_{rp} &= \frac{20A}{g} \int_0^H Y_{zp} Y_{zn} dz + \frac{20A}{g} \int_0^{H/2} Y_{rp} Y_{rn} dz + \frac{20A}{g} \int_0^{H/2} X_{rp} X_{rn} dz + \frac{W}{g} T_r T_n \end{aligned}$$

ϕ としては既往の ELCENTRO 地震波を入力応答計算を試みた。

右図は ELCENTRO 地震波と秒角の杭頭の応答例。

$y = a_r Y_r + \sum b_p \bar{Y}_p$ < 地盤変形を考慮した場合 >

$y' = a_r Y_r$ < 地盤変形を考慮しない場合 >

但し、 y' は考慮しない場合の一般座標である。

3. 結論

右図口直航頭の変位応答例であるが、杭の地中深さが 5 m の浅い杭では地盤変形の影響は少く杭の自由振動に左右される。また、地中深さ 15 m の深い杭では地盤変形の影響が大きく、ほとんどの影響に左右され、その変位も大きくなるのでこの影響を考慮すべきである。なお、地中深さが杭の半分である 10 m の場合、地盤変形による影響が安全側に作用し、地盤変形を考慮しない杭の変位の方が大きくなるが、この原因は目下検討中である。

< ELCENTRO 地震波に対する応答 >

$R = 5.0 \text{ m}^2/\text{cm}^2$ の場合

