

## II-4

### 橋脚基礎地盤の地震時挙動の解析

九州大学 工学部 正員 小坪 清真  
九州工業大学 正員 高西 照 考

#### 1. まえがき

筆者等は前論において、鋼管橋脚の地震応答に及ぼす地盤変形の影響について考察を行ひ、地震時における地盤変形が橋脚の地震応答に及ぼす影響の大きさを指摘した。その際一応地盤を完全弾性体と仮定して地盤の地震応答を求めた。地震時に地盤が実際にどのような動きをするかを説明することは非常に重要な問題であるが、現在には未解決な部分が多く残されている。大地震に際して地盤が単純な線型振動を行なっているとは考え難い。B. Seed<sup>2)</sup>等の実験によれば土がくり返し荷重をうけるときの応力-歪曲線は *bilinear* で近似できるという。そこで本論においては地盤を構成する土の応力-歪曲線を *bilinear* であると仮定して地震時における地盤変形を求める計算を行った。一般に非線型振動の解析は面倒であり、勢い電子計算機等による数値解析に頼らねばならないが、これとてまかなり面倒で計算時間も長くなる。筆者等は次節に述べるような方法で計算すれば地盤振動の非線型性を考慮した地盤の地震応答を比較的容易に求め得るのではないかと考え本論においてはその方法の妥当性を検討し、更に地盤振動の非線型性が地盤の地震応答に及ぼす影響について考察した。

#### 2. 解析の基本的考え方

地盤はその下層基盤から入射する地震波によって図-1に示すように *bilinear* の応力-歪曲線に従うせん断振動を行なうものとする。地盤を図-2に示すような多質点系に置換してその非線型振動を考えるとき、その振動型<sup>\*</sup>及び固有振動数<sup>\*</sup>は振巾の函数となるが、振動型に関しては線型振動のそれと比較してその差はそれ程大きくはないものとするれば、今考えている非線型振動を線型振動の振動型の重ね合せによって近似することができる。その際固有振動数については、それを振巾の函数と考えることは勿論である。さてここで一質点の非線型系をそれに等価な線型系に置換する方法が種々提案されていることに考え及べば、前述の如く振動型が振巾の大きさに関係しないということから等価線型系の概念を適用することができる。したがって、上述のような考え方をすれば面倒な多質点系の非線型振動をいわゆる *modal analysis* の概念を用いて処理することができる<sup>\*)</sup> 初速を0とし、各質点が同時に中立位置を通過するような初期変位を求めて、この変位における振動型と考える。また中立位置を通過するまでの時間から固有振動数を求めることができる。

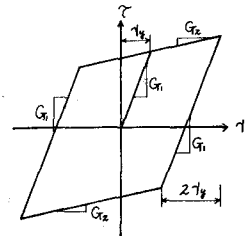


図-1

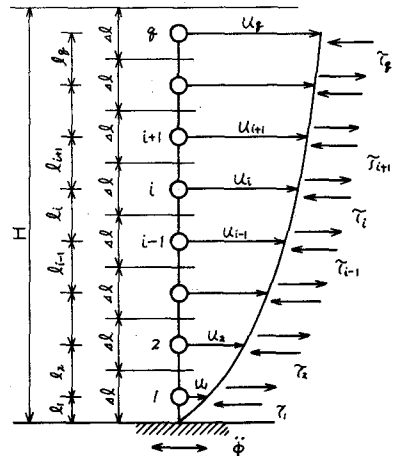


図-2

て比較的簡単に、多質点系に置換した地盤の非線形地震応答を計算することができる。さて、つぎに地盤が地震動を受けたときの減衰作用と永久変位が問題となる。地震応答の計算を等価線型系の概念を用いて行えば、地盤の永久変位という現象は説明できない。耐震という見地から地盤中に築造された構造物に対する地盤の永久変位の影響は重要な問題ではあるが、本論ではこれを取上げない。減衰作用の影響については、つぎのように考える。すなわち、各振動型について、振動系が正弦波の強制振動を受けたときに生ずる *hysteresis loop* の面積が、等価線型系において速度に比例する抵抗によって消費される *energy* に等しくなるように等価線型系の減衰常数を選ぶ。したがって、減衰常数も振動振巾によってその値が変わることは勿論である。

### 3. 地盤の振動方程式 (多質点系による厳密解)

下層基盤における地震加速度  $\ddot{u}_g$  が与えられた場合の上層地盤の振動を求めるのに、上層地盤を図一に示すように多質点系に置換して計算を行った。いま、地盤を深さ方向に  $nl$  に等分し、その中実質量が集中しているものとし、単位中および単位奥行の土を考へれば、 $i$  実の集中重量  $W_i$  は  $W_i = \rho \cdot nl$  で与えられる。ここに、 $\rho$  は土の単位体積重量である。地盤の振動は基盤の動き  $\dot{u}_g$  によって惹起されるせん断振動であるとするればその振動方程式は  $i$  実に対して次のようになる。

$$\frac{W_i}{g} \ddot{u}_i = \tau_{i+1} - \tau_i - \mu_i (\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) + \mu_{i+1} (\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) - \frac{W_i}{g} \dot{u}_g \quad (1)$$

( $i = 1, 2, \dots, n, \quad u_0 = 0, \quad u_{gn} = u_g, \quad \tau_{gn} = 0, \quad \mu_{gn} = 0$ )

ここに、 $n$  は地盤中の質点の数、 $u_i$  は  $i$  実の基盤に対する相対変位、 $\mu_i$  は  $i-1$  実と  $i$  実との間のせん断変形速度に比例する減衰係数である。 $\tau_i$  は  $i$  実と  $i-1$  実との間に働くせん断力であつて地盤の垂直方向の函数である。本論では  $\tau_i$  と  $u_i$  は図-3 に示すように *bilinear* な関係で結ばれていると仮定した。

図-3 において、 $G_{11}, G_{12}$  はともに地盤のせん断弾性係数で、 $\gamma_{11}$  は地盤の限界歪を示し、弾性領域から塑性領域へ移る実の歪を表わす。これより  $\tau_i$  と  $u_i$  の関係を *explicit* に示すことができ、例えば、地盤が  $C_1 \rightarrow C_2$  の方向に変位する場合には  $\tau_i$  は次式のように表わすことができる。

$$\tau_i = G_{11} \gamma_i - G_{11} (1 - \beta) (\gamma_{10} + \gamma_{11}) \quad (2)$$

ここに、 $\beta = G_{12}/G_{11}$ 、 $\gamma_{10}$  は  $C_1$  実での歪である。

また、地盤は  $i$  実と  $i-1$  実の間では直線的に変位すると仮定すれば歪  $\gamma_i$  は次のように表わせる。 $\gamma_i = (u_i - u_{i-1})/l_i$  ----- (3)

ここに、 $l_i$  は図-2 に示すように各質点間の距離である。

$G_{11}$  の分布は図-4 に示すように各質点間では一定とし、 $G_{11}$  と各質点の中間にプロットすればそれは上端で 0、下端で  $G_{01}$  の三角形分布の直線上にのるものとする。 $\dot{u}_g$  が与えられると (1), (2), (3) 式を用いて刻々における  $u_i$  を求めることができる。

### 4. 地盤の振動方程式 (modal analysis による近似解法)

地盤が地震加速度  $\ddot{u}_g$  を受けて弾性振動を行う場合にその地震応答を *modal analysis* で求める理論は次に述べる通りである。

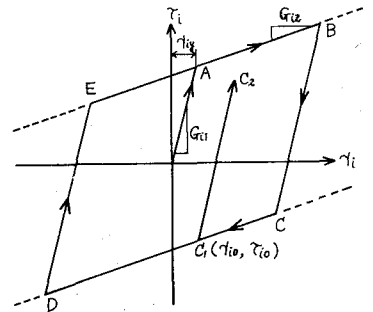


図-3

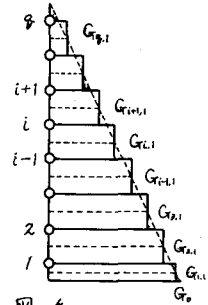


図-4

地盤の $\alpha$ 次の振動型を  $U_{pi}$  とすれば地盤のしるの変位は次式のように表わせる。

$$U_i = \sum_{p=1}^P b_p U_{pi} \text{ ----- (4)}$$

ここに、 $b_p$  は $\alpha$ 次の振動型の大きさを表わす。また、 $P$  は採用する振動型の最高次数を示す。  
地盤の運動エネルギー  $K$ 、歪エネルギー  $V$  および一般座標  $b_p$  に対する一般力  $Q_p$  は次式で表わされる

$$K = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{g} b_p^2 U_{pi}^2, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{g} m_{gp}^2 b_p^2 U_{pi}^2, \quad Q_p = - \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{g} \dot{\phi} U_{pi} \text{ ----- (5)}$$

ここに、 $m_{gp}$  は地盤の $\alpha$ 次の固有円振動数である。

$\alpha$  次の振動の減衰常数を  $h_{gp}$  とおけば、上式を Lagrange の方程式に入れて次の微分方程式が得られる。

$$\ddot{b}_p + 2h_{gp} m_{gp} \dot{b}_p + m_{gp}^2 b_p = -\delta_p \dot{\phi}, \quad \delta_p = \left( \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{g} U_{pi} \right) / \left( \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{g} U_{pi}^2 \right) \text{ ----- (6)}$$

ここで、オス節で述べたように、 $m_{gp}, h_{gp}$  をそれぞれ振動振中の函数と考え、更にその函数型が与えられれば、地盤が地震加速度 $\dot{\phi}$ を受けて非線型振動を行う場合に(4),(6)の両式から地盤の刻々の変位  $U_i$  を求めることができる。 $m_{gp}, h_{gp}$  については次節に述べる。

### 5. $m_{gp}$ について

オス節で述べたように本論における modal analysis による近似解法では、地盤の振動型は振中には関係せず一定であるとしておけるので、 $m_{gp}$  を求める理論は各振動次数についてそれぞれ1質点系の非線型振動理論を適用すればよい。地盤の応力-歪曲線が図-5に示すように bilinear な曲線で表わされる時  $m_{gp}$  を振中の函数として求めることは既知であるが、これは  $m_{gp}$  の表式が面倒になるので本論ではこれを採用せず、次に述べるように図-5と等価な線型系を考えてその固有円振動数  $m_{gp}$  を用いる。(以下同じ記号  $m_{gp}$  を使用する。) すなわち、応力-歪関係が図-5の hysteresis loop の骨 OA で表わされるような線型系の  $m_{gp}$  を用いる。したがって  $m_{gp}$  は次のようにして求められる。 $\alpha$  次の振動型についてその運動エネルギーの最大値は  $K_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{g} (\alpha_p H U_{pi} m_{gp})^2$  と表わせる。ここに、 $H$  は地盤の深さ、 $\alpha_p H U_{pi}$  はしるの $\alpha$  次の振動の振中を表わす。一方、A点にたくわえられた歪エネルギーは  $\Delta OAB$  の面積によつて表わされるから、それを各英について加え合せれば次式のようになる。

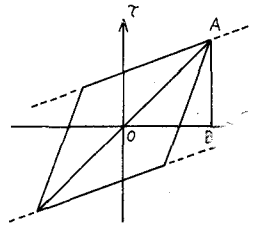


図-5

$V_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n G_i l_i \gamma_{pi} \{ \gamma_{pi} - (1-\beta)(\gamma_{pi} - \gamma_{pi}) \} U(\gamma_{pi} - \gamma_{pi})$       ここに、 $\gamma_{pi} = \alpha_p H (U_{pi} - U_{pi-1}) / l_i$ ,  $U(\gamma)$  は階段函数を表わす。ここで、 $K_p = V_p$  とおけば、 $m_{gp}$  の表式が次のように得られる。

$$m_{gp}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n G_i l_i \gamma_{pi} \{ \gamma_{pi} - (1-\beta)(\gamma_{pi} - \gamma_{pi}) \} U(\gamma_{pi} - \gamma_{pi})}{(\alpha_p H)^2 \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{g} U_{pi}^2} \text{ ----- (7)}$$

上述の考え方の妥当性を検討するため1質点系について固有円振動数の厳密解 ( $m_e$ ) と等価線型系のそれ ( $m_a$ ) を求めて、最大振中  $u$  に対してプロットした。図-6にこれを示す。図中  $m_0$  は線型振動の固有円振動数、 $u_0$  は弾性限界を示す。図-6から両者は比較的良好に一致していることが分る。

### 6. $h_{gp}$ について

(6)式の  $h_{gp}$  については、これを非線型振動にもとづく減衰常数  $h_{gp}^{nl}$  と弾性変形に対する粘性抵抗にもとづく減衰常数  $h_{gp}^{vis}$  とに分けて考える。すなわち、 $h_{gp} = h_{gp}^{nl} + h_{gp}^{vis}$ 。  $h_{gp}^{vis}$  についてはこれを振動

数に無関係な一定値をとるものとする。 $h_{gp}^{*}$ については、これを以下に示すようにオス節に述べた考え方に従って求める。すなわちオス節の振動型における hysteresis loop の面積の総和は  $E_p^* = \sum_{i=1}^n G_{0i} \gamma_{pi} (1-\beta)(\gamma_{pi} - \gamma_{pi0}) U(\gamma_{pi} - \gamma_{pi0})$  と表わされる。一方、等価線型系において速度に比例する粘性抵抗によって消費される energy の総和は  $E_p^* = 2\pi h_{gp}^{*} (\alpha_p H M_{gp})^2 \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{\omega} U_i^2$  と表わすことができる。ここで  $E_p^* = E_p^*$  とおけば  $h_{gp}^{*}$  に対する表式が次のように得られる。

$$h_{gp}^{*} = \frac{\sum_{i=1}^n G_{0i} \gamma_{pi} (1-\beta)(\gamma_{pi} - \gamma_{pi0}) U(\gamma_{pi} - \gamma_{pi0})}{2\pi (\alpha_p H M_{gp})^2 \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{\omega} U_i^2} \quad (8)$$

### 7. 減衰係数 $\mu_i$ について

前節の減衰定数  $h_{gp}^{*}$  に応じて  $\mu_i^{vis}$  を定め、 $\mu_i = \mu_i^{vis}$  とする。ここで  $\mu_i$  は次のようにして定めた。すなわち、 $\mu_i$  は地盤中どこでも等しいと仮定し、地盤がオス節の自由振動を行う場合の減衰定数が  $h_{gi}^{vis}$  となるように  $\mu_i$  を定めた。結果のみを示せば次式の通りである。

$$\mu_i = 2h_{gi}^{vis} \eta_{gi} \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{\omega} U_i^2 / \left\{ \sum_{i=1}^n (U_i - U_{i-1})^2 \right\} \quad (9)$$

地盤の固有円振動数  $\eta_{gi}$ 、振動型  $U_i$  がわかれば、上式から  $h_{gi}^{vis}$  に対する  $\mu_i = \mu_i^{vis}$  が求められる。

### 8. 数値計算例及び考察

(4),(6) の両式から地盤振動の非線型性を考慮した地震応答の計算を行い、その結果を(1)式から求めた厳密解と比較検討し、本論の解法の妥当性を論ずる。実際に(6)式の微分方程式を刻々数値積分するときには、 $M_{gp}$  等が振巾の函数であることを考えれば、現在計算中の cycle の振巾の最大値が既知でなければならぬことになる。したがって厳密には、試行錯誤的にまず最大振巾を仮定して計算を進め、その結果得られた最大振巾が最初に仮定した最大振巾に一致するように何度も計算をくり返して行うことが必要である。しかしこれは大変面倒で、これではせつかくの近似計算の価値が半減する。そこで本論では、現在計算中の半 cycle の最大振巾値としてその直前の半 cycle の最大振巾値の絶対値を採用して計算を行った。相隣り合った半 cycle 毎の振巾の最大値はそれ程大きな差がないのが普通であり、たとえ差があったとしても、それが  $M_{gp}$ ,  $h_{gp}$  の値に及ぼす影響は小さい。このように考えてよければ(6)式の数値積分の計算は線型の微分方程式を解く場合とさして変わらず、したがって、多質点系の非線型振動の応答を比較的簡単な計算で求めることができる。

地盤の深さは  $H=15m$  とし、それを 10 等分して質点数を 10 個とした。土の単位体積重量  $\rho=1.8 \text{ t/m}^3$  とした。地盤のせん断弾性係数は図-4 で  $G_0=80 \text{ kg/cm}^2$  とし、 $\beta=G_0/G_{01}=0.4$  について計算した。弾性限界歪  $\gamma_0$  は地盤中すべて一定とし  $\gamma_0=0.002$  とおいた。また、 $h_{gp}^{*}=0.25$  とした。図-7 に(7),(8)式の  $\eta_{gi}$ ,  $h_{gi}^{vis}$  の値を示す。 $\mu_i$  は(9)式から  $h_{gi}^{*}=0.25$  に相当する値  $20000 \text{ kg/cm}^2$  を採用した。地震波  $\alpha$  としては El Centro 地震波 (1940.5.18. N-S 成分) を用いた。

なお、応答計算については、現在計算中でありその詳細は講演時に発表する予定である。

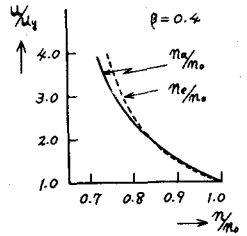


図-6

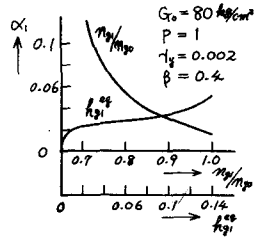


図-7

(1): 小坪 高西「鋼管橋脚の地震応答計算法」土木学会オス3回年次学術講演会 昭43年10月

(2): B. Seed 他「Cyclic stress-strain characteristics of clay」Proc. A.S.C.E., vol. 94 No. SM2 1968-3.