

## II-2

### 進行地震波による橋梁の過渡振動

九州大学工学部 正員 小坪 清 真  
 同上 〇学生員 原 田 謙 二  
 同上 城 戸 繁 幸

#### 1. 緒言

地震時に構造物の基礎に急に外乱が加わった場合、各基礎に入った波は構造物中を波動として移動する。構造系が桁などのように剛性が小さいものであると、また、各基礎に作用する地動が異なる場合にこの波動伝播の影響は大きいと思われる。各基礎に作用する地動に位相のずれがある場合や、作用する地動が異なる場合の構造系の応答に関する研究は若干あるが<sup>(1)</sup>、いずれも簡単なバネ質量系に Modal Analysis の手法を適用したもので波動の影響は考慮されていない。

Modal Analysis が限られた自由度を持つ系について理論を展開しているのに対し、波動系の概念は無限の自由度を持つ連続体を取り扱っており、応答の過渡現象を求めるのに適していると思われる。

著者らは前論<sup>(2)</sup>においてある程度連続する支点の外乱に対する両端支持の桁の応答を Modal Analysis により計算した結果が実験値のそれと良く合うことを示した。本研究では、両端単純支持の桁の外乱による応答の解を波動法により誘導し、Modal Analysis による計算結果、更に簡単な装置を用いた実験の結果と比較して、Modal Analysis の適用性を調べようとするものである。

#### 2. Modal Analysis による解法

両端単純支持の一樣断面を持つ桁の一端を  $\ddot{\phi}(t)$  なる加速度で変位させた場合、この端より  $x$  の距離の桁上の点の変位を一般座標  $a_s$  を用いて

$$y(x) = \sum_s a_s \sin \frac{s\pi x}{l} \quad \dots (1)$$

で表わせば、運動方程式は

$$\ddot{a}_s + 2h_s n_s \dot{a}_s + n_s^2 a_s = \frac{g}{wA} \int_0^l \left\{ -\frac{wA}{g} f(x) \ddot{\phi}(t) \right\} \sin \frac{s\pi x}{l} dx \\ = -\frac{l}{s\pi} \ddot{\phi}(t) \quad \dots (2)$$

で表わされる。ここで  $h_s, n_s$  はそれぞれ桁の  $s$  次の減衰常数、固有振動周期、 $l$  は桁長で  $f(x)$  は一端を単位変位させた場合の桁の弾性線である。端よりの距離  $x$  の点のひずみは縁距離を  $e$  とすれば(1)式より次式で表わされる。

$$\varepsilon(x) = \frac{\pi^2 e}{l^2} \sum_s a_s s^2 \sin \frac{s\pi x}{l} \quad \dots (3)$$

#### 3. 無限の長さを持つ桁の波動法による解法

一端単純支持で半無限の長さを持つ桁の一端 ( $x=0$ ) を単位跳躍速度で変位させた場合の応答について考える。基礎方程式は減衰を無視すれば、

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \dots (4)$$

で表わされる。ここで  $k^2 = EIg/wA$   $\dots (5)$

境界条件は、  
 $x=0$  で  $y = t$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$   
 $x = \infty$  で  $y = 0$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$  ( $t > 0$ )  $\dots (6)$

初期には変位、速度ともに零として(4)式に $t$ に関するラプラス変換を行ない、境界条件(6)式を入れて解けば変位に関する次のラプラス変換を得る。

$$\bar{y} = \frac{1}{s^2} e^{-\sqrt{\frac{s}{2k}} x} \cos \sqrt{\frac{s}{2k}} x \quad (7)$$

ここで  $\bar{y} = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt$ ,  $s$  は変換の演算子である。(7)式を $x$ について2回微分すれば次の曲率のラプラス変換が得られる。

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} = \frac{1}{sk} e^{-\sqrt{\frac{s}{2k}} x} \sin \sqrt{\frac{s}{2k}} x \quad (8)$$

複素積分を用いて(8)式 of 反転積分を行なえば、曲率は次の有限積分の表現で求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{2}{\pi k} \int_0^\infty e^{-zktu^2} \cos(ux) \sin k(ux) \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{k} \{ C(z) - S(z) \} \quad (9) \end{aligned}$$

ここで  $C(z), S(z)$  は Fresnel の積分で  $z = x^2/2kt$  として次の式で表わされる。

$$C(z) = \int_0^z \frac{\cos f}{\sqrt{2\pi f}} df, \quad S(z) = \int_0^z \frac{\sin f}{\sqrt{2\pi f}} df \quad (10)$$

(9)式を用いて、一端に単位跳躍速度を作用させた場合の端より $x$ の距離にある桁上の点のひずみの応答は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} F(t) \equiv \varepsilon_0(t) &= -eE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ &= -\frac{eE}{k} (C(z) - S(z)) \quad (11) \end{aligned}$$

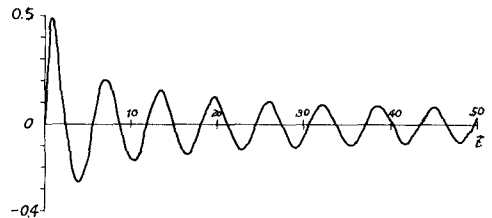


図-1.  $C(z) - S(z) = -F(t)/eE/k$

$F(t)$  は変数 $z$ を用いて図示すると図-1に示すような形になる。桁の一端を $\ddot{\phi}(t)$ なる不規則

な加速度で変位させた場合の $x$ 点のひずみの応答 $\varepsilon(t)$ は(11)式の $F(t)$ と Duhamel の積分を用いて

$$\varepsilon(t) = \dot{\phi}(0)F(t) + \int_0^t \dot{\phi}(\tau)F(t-\tau) d\tau \quad \text{または} \quad \dot{\phi}(0)F(t) + \int_0^t \dot{\phi}(t-\tau)F(\tau) d\tau \quad (12)$$

となり、 $F(t)$  が求まれば(12)式より刻々のひずみを計算することができる。

#### 4. 両端単純支持の桁の波動法による解法

桁が半無限の長さを持つ場合と同様に  $x=0$  なる一端を単位跳躍速度で変位させた場合について考える。基礎方程式は(4)式であるが境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} x=0 \text{ で } & y = t, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \\ x=l \text{ で } & y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (t > 0) \quad (13)$$

(4)式に初期において変位、速度ともに零という条件で $t$ に関するラプラス変換を行ない、(13)式の

境界条件を入れて解けば次式を得る。

$$\bar{y} = \frac{1}{S^2 \Delta} \left\{ (e^{-\sqrt{\frac{S}{2R}} x} + e^{\sqrt{\frac{S}{2R}} x}) \cos \sqrt{\frac{S}{2R}} (2l-x) - (e^{-\sqrt{\frac{S}{2R}} (2l-x)} + e^{\sqrt{\frac{S}{2R}} (2l-x)}) \cos \sqrt{\frac{S}{2R}} x \right\} \quad (14)$$

ここで

$$\Delta = 2 \cos \sqrt{\frac{2S}{R}} l - e^{\sqrt{\frac{2S}{R}} l} - e^{-\sqrt{\frac{2S}{R}} l} \quad (15)$$

$\Delta^{-1}$  を 2 項定理により展開すれば

$$\frac{1}{\Delta} = e^{-2l\sqrt{\frac{S}{2R}}} + 2e^{-4l\sqrt{\frac{S}{2R}}} \cos 2\sqrt{\frac{S}{2R}} l - e^{-6\sqrt{\frac{S}{2R}} l} + 4e^{-6\sqrt{\frac{S}{2R}} l} \cos^2 2\sqrt{\frac{S}{2R}} l - \dots \quad (16)$$

となりこれを (14) 式に入れば次のような変位のラプラス変換が得られる。

$$\bar{y} = \frac{1}{S^2} \left\{ e^{-\sqrt{\frac{S}{2R}} x} \cos \sqrt{\frac{S}{2R}} x - e^{-\sqrt{\frac{S}{2R}} (2l-x)} \cos \sqrt{\frac{S}{2R}} (2l-x) + e^{-\sqrt{\frac{S}{2R}} (2l+x)} \cos \sqrt{\frac{S}{2R}} (2l+x) - e^{-\sqrt{\frac{S}{2R}} (4l-x)} \cos \sqrt{\frac{S}{2R}} (4l-x) + \dots \right\} \quad (17)$$

(17) 式を  $x$  につき 2 回微分すれば曲率のラプラス変換は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} = \frac{1}{S R} \left\{ e^{-\sqrt{\frac{S}{2R}} x} \sin \sqrt{\frac{S}{2R}} x - e^{-\sqrt{\frac{S}{2R}} (2l-x)} \sin \sqrt{\frac{S}{2R}} (2l-x) + e^{-\sqrt{\frac{S}{2R}} (2l+x)} \sin \sqrt{\frac{S}{2R}} (2l+x) - \dots \right\} \quad (18)$$

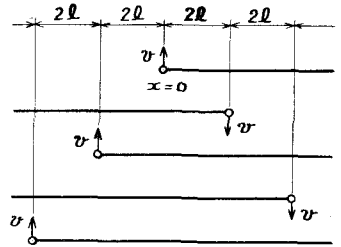


図 2. 半無限桁の重ね合わせ  
 $v$  は単位跳躍速度

(18) 式の第 1 項は (7) 式と同じで第 2 項以下は (7) 式の  $x$  の値を変えたものである。(18) 式の第 1 項は半無限の桁の単位跳躍速度に対する応答の解で、第 2 項以下は桁の端部で反射した曲げ振動による応答を示すものである。これは図-2 に示すように  $x=0$  の点から左右に  $2l$  の倍数だけ離れた点に端部を持つ半無限の桁の単位跳躍速度による応答を重ね合わせた形になっている。(18) 式の第 2 項以下は (8)~(11) 式までの過程と同じ手法で解け、(11)、(12) 式を用いて支点に  $\delta(t)$  なる外乱が作用した場合のひずみの応答が求まる。

### 5. 振動の伝播速度

(11) 式の解より考えると桁においては弦の場合と異なり、一端を変位させた瞬間に速い波が桁を伝播し、遠点で微小ではあるが変位を生じていることになる。この曲げ振動の伝播速度は減衰を無視すると (4) の基礎方程式より

$$v = kf \quad (19)$$

となる。ここで振動の波長を  $\lambda$  とすると  $f = \frac{2\pi}{\lambda}$  で表わされ、両端単純支持の桁の  $S$  次の振動

次数	固有振動周期	減衰常数
1	1.012 <sup>sec</sup>	0.0146
2	0.494	0.0221
3	0.273	0.0143
4	0.176	0.0123
5	0.121	0.0114
6	0.0856	0.0142
7	0.0681	0.0079
8	0.0531	0.0064
9	0.0426	0.0053

$$k = \sqrt{\frac{EI\theta}{2lA}} = 5.295 \times 10^4 \text{ cm/sec}$$

$$l = 501.6 \text{ cm} \quad c = 0.31 \text{ cm}$$

第 1 表. 振動性状

については  $f = 5\pi/l$  となり次数の高いものほど速度が速いことになる。

### 6. 実験および結果

前述の理論による応答値を検証するために横方向に曲げ剛性の小さい両端単純支持の桁を作って実験を行なった。桁の材料はアルミニウムで桁長は5mである。桁の横方向振動特性は表-1に示す通りである。外乱は一支点をバネにより強制振動させることにより与え、その加速度を計算の外力として用いた。他端の変位は拘束してある。前論<sup>(2)</sup>においては外力が長く継続する強制振動について実験を行なったが、今回は振動の過渡現象をみるために一端に一波の加速度のみを与え、後は自由振動をさせた。外乱の周期が0.13秒程度なのでこれに近い振動が卓越している。

卓越した振動の速度は記録から読みと16 m/sec程度。振動特性の表に載せた長を(49)式に入れて求めた両端単純支持桁の5次の振動速度は16.6 m/secとなり5次の振動が卓越しているのがわかる。

### 7. 実験値と計算値の比較

図-3に実験より求めたひずみの時間的経過と次数を9次までとった Modal Analysis によるひずみの時間的経過を比較して示す。また、表-2には各測定点のひずみの応答の最大値とその生じた時刻を比較して示す。結果は Modal Analysis による計算値と実験値が非常によく一致していることを示している。

8. 結語 簡単な桁の場合には以上のように強制振動時でも自由振動時でも有限次数までとった Modal Analysis による計算が有用であることがわかる。実際の橋梁ではせげ波の速度が制限されるなど問題が残ると思われる。なお波動法を用いた計算値は講演当日発表する予定である。

支距の距離	実験値	計算値
l/6	11.96 (0.075)	12.02 (0.080)
l/3	12.40 (0.130)	13.53 (0.130)
l/2	12.05 (0.175)	12.57 (0.175)
2l/3	9.57 (0.510)	10.81 (0.230)
5l/6	15.52 (0.305)	14.83 (0.305)

表2 歪の最大値( $\times 10^6$ )とその発生時刻(sec)

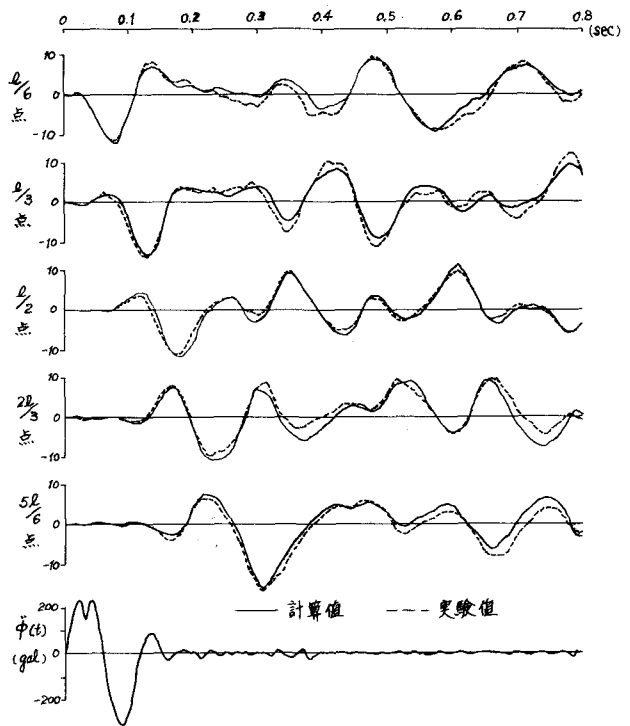


図-3 ひずみの時間的経過 ( $\times 10^6$ ) と外乱加速度

(1) たとえば Bogdanoff 他: 'The Effect of Ground Transmission Time on The Response of Long Structures' Bull. S. S. A. Vol. 55 No. 3 1965

文献: Nakagawa 他: 'Preliminary Study on Modal Analysis of Response of a Structure Subjected to Two Different Earthquake Motions at its Two Supporting Points' Bull. Int. Ins. Sci. Eng. Vol. 4, 1967.

(2) 小坪, 原田: '橋桁の横振動におよぼす波動伝播の影響' 第23回年次学術講演会 講演概要 昭43. 10.