

# I-3

## たわみの影響を考慮したアーチの弾塑性解析

九州大学 正員 山崎徳也

学生員 石川信隆

### 1. 緒言

近年、構造物の軽量化と長大化が進むにつれ、軸力と曲げモーメントを受ける部材に対しては、系の変形による応力の変化を単に2次応力として無視することはできなくなってきた。特に構造物に弾性限界を越える漸増荷重が働き、崩壊に至る過程を考える場合には、支間が比較的短いときでもたわみは弾性限界時の2~4倍にも達し、支間が長大化すれば益々その傾向は大きくなることが予想される。たわみの影響を考慮したアーチの既往の研究としては、高尾氏の差分法による弾性解析があるが、弾塑性解析に関してはその例を知らない。本研究は、著者<sup>3</sup>が先にアーチに対する新しいたわみ計算式として導いたφ-法公式を用いて、たわみによる付加曲げモーメントの2次的効果を考慮した円弧アーチの弾塑性解析法を確立し、さらにかかる影響を考察せんとするものである。

なお、本論文で用いる仮定は文献(2)に準ずる。

### 2. 基本式の誘導

#### (1) 塑性領域の双生ずる場合

いま図-1に示すとき2ヒンジ円弧アーチを考えれば、任意点*i*における水平、垂直変位 $\delta_i^x$ ,  $\delta_i^y$ およびたわみ角 $\theta_i$ はA~*i*間の第1および第2塑性領域を考慮して次式で与えられる<sup>2)</sup>。

$$\delta_i^x = h\theta_A - \left[ \int_A^i (\phi_0(h-y) + \epsilon_0 \cos \varphi) ds + \int_{P(A-i)} \{ (\phi_1 - \phi_0)(h-y) + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \cos \varphi \} ds + \int_{R(A-i)} \{ (\phi_2 - \phi_0)(h-y) + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \cos \varphi \} ds \right] \dots (1a)$$

$$\delta_i^y = a\theta_A - \left[ \int_A^i \{ \phi_0(a-x) + \epsilon_0 \sin \varphi \} ds + \int_{P(A-i)} \{ (\phi_1 - \phi_0)(a-x) + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \sin \varphi \} ds + \int_{R(A-i)} \{ (\phi_2 - \phi_0)(a-x) + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \sin \varphi \} ds \right] \dots (1b)$$

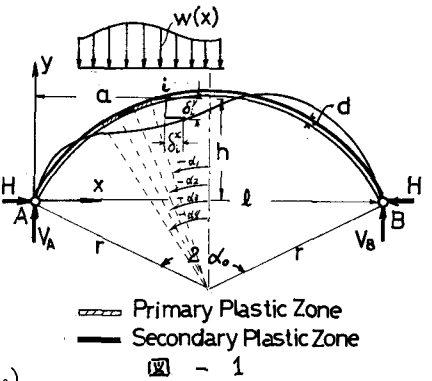
$$\theta_i = \theta_A - \left[ \int_A^i \phi_0 ds + \int_{P(A-i)} (\phi_1 - \phi_0) ds + \int_{R(A-i)} (\phi_2 - \phi_0) ds \right] \dots (1c)$$

ここに $\phi_0, \phi_1, \phi_2$ および $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ はそれぞれ弾性、第1弾塑性、第2弾塑性状態における曲率の変化および軸線の縮みで矩形断面の場合には次式のごとく与えられ、また積分範囲を示すP(A~i), R(A~i)はそれぞれA~i間のアーチ外縁面での第1, 第2塑性領域の枝軸方向の長さを表わす。

$$\left. \begin{aligned} \text{すなわち, } \frac{\phi_0}{\phi_y} = \bar{\phi}_0 = \frac{M}{M_y} = m, \quad \frac{\phi_1}{\phi_y} = \bar{\phi}_1 = \frac{\pm 4(1-m)^3}{[3(1-m)-|m|]^2}, \quad \frac{\phi_2}{\phi_y} = \bar{\phi}_2 = \frac{\pm 1}{\sqrt{3-3m^2-2|m|}} \\ \frac{\epsilon_0}{\epsilon_y} = \bar{\epsilon}_0 = \frac{N}{N_y} = n, \quad \frac{\epsilon_1}{\epsilon_y} = \bar{\epsilon}_1 = \frac{4(1-m)^2(2m-2+|m|)}{[3(1-m)-|m|]^2} + 1, \quad \frac{\epsilon_2}{\epsilon_y} = \bar{\epsilon}_2 = \frac{n}{\sqrt{3-3m^2-2|m|}} \end{aligned} \right\} (2)$$

$\phi_y = M_y/EI$ ,  $\epsilon_y = \sigma_y/E$ ,  $M_y$ : 純曲げによる降伏曲げモーメント,  $N_y$ : 軸力のみにによる全断面降伏力  
 なお、式(1a), (1b), (1c)中のA端のたわみ角である $\theta_A$ は、支間の境界条件 $\delta_0^y = 0$ より次式のごとく求められる。  

$$\theta_A = \int_A^0 \left\{ \phi_0 \frac{l-x}{l} + \epsilon_0 \frac{\sin \varphi}{l} \right\} ds + \int_{P(A-B)} \left\{ (\phi_1 - \phi_0) \frac{l-x}{l} + (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{\sin \varphi}{l} \right\} ds + \int_{R(A-B)} \left\{ (\phi_2 - \phi_0) \frac{l-x}{l} + (\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{\sin \varphi}{l} \right\} ds \dots (3)$$



一方、任意点  $i$  の曲げモーメント  $M_i$  は水平、垂直変位  $\delta_i^x, \delta_i^y$  による付加曲げモーメントを考慮し、また軸力  $N_i$  は変形前後とも変わらないとすればそれぞれ次式のごとく表わされる。

$$M_i = M_0(x + \delta_i^x) - H \cdot (y - \delta_i^y), \quad N_i = N_0(\varphi) + H \cdot \cos \varphi \quad \text{--- (4)}$$

ただし、 $M_0(x + \delta_i^x)$  および  $N_0(\varphi)$  はアーチ AB を単純アーチばりとして見做したときの荷重による  $i$  点での曲げモーメントおよび軸力を示す。

さて、不静定力を水平反力  $H$  とすれば、これは支束の境界条件  $\delta_B^x = 0$  より以下のごとく求められる。まず式(1a)に  $n = 0, i = B$  とおけば

$$\delta_B^x = - \left[ \int_A^B \{ \phi_0(-y) + \varepsilon_0 \cos \varphi \} ds + I_p \right] = 0 \quad \text{--- (5)}$$

ただし、 $I_p = \int_{P(A-B)} \{ (\phi - \phi_0)(-y) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \cos \varphi \} ds + \int_{B(A-B)} \{ (\phi - \phi_0)(-y) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \cos \varphi \} ds$   
 次いで式(5)に式(4)を代入のうえ、 $I_p$  を右辺に移項して第1項の弾性項より  $H$  を求めれば次式が誘導される。

$$H = - \frac{\int_A^B \left\{ \frac{M_0(x + \delta_i^x)}{EI} \cdot (-y) + \frac{N_0(\varphi)}{EA} \cdot \cos \varphi \right\} ds + I_p}{\int_A^B \left\{ \frac{y}{EI} \cdot (y - \delta_i^y) + \frac{\cos^2 \varphi}{EA} \right\} ds} \quad \text{--- (6)}$$

式(6)の演算は、当初  $\delta_i^x, \delta_i^y$  および  $I_p$  中に含まれる第1、第2塑性領域長が未知なるゆえ、これらを零すなわちたわみを無視した弾性時の  $H$  を第1次近似値として用い、以後式(1a)~式(4)および弾塑性境界条件式<sup>2)</sup>を併用する数値積分により繰返し試算で  $H$  を求めることとなる。

(2) 塑性領域に引き続き塑性ヒンジが生ずる場合

図-2に示すごとく塑性領域の発生に引き続きC点に塑性ヒンジが形成される場合は、E. T. Onat<sup>3)</sup>の導いた次のごとき完全塑性条件式が成立する。

$$|m_c| = \begin{cases} \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{|m_c|}{2} \right), & |m_c| \leq 0.5 \\ \frac{9}{4} \left( 1 - |m_c| \right), & |m_c| \geq 0.5 \end{cases} \quad \text{--- (7)}$$

式(7)に式(4)を代入のうえ水平反力  $H$  を求めれば次式がえられる。

$$\frac{H}{N_y} = H = \begin{cases} \frac{\frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{N_0(\varphi)}{2} \right\} - M_0(x + \delta_i^x)}{\frac{3}{4} \cos \varphi_c - K_e \cdot \left( \frac{y_c}{l} - \delta_c^y \right)}, & |m_c| \leq 0.5 \\ \frac{\frac{9}{4} \left\{ 1 - N_0(\varphi) \right\} - M_0(x + \delta_i^x)}{\frac{9}{4} \cos \varphi_c - K_e \cdot \left( \frac{y_c}{l} - \delta_c^y \right)}, & |m_c| \geq 0.5 \end{cases} \quad \text{--- (8)}$$

ただし  $K_e = N_y l / M_y = 6(l/d)$

式(8)の演算も当初  $\delta_i^x, \delta_i^y$  が未知なるゆえ、式(1a)~式(4)および弾塑性境界条件式を用いる繰返し試算となる。

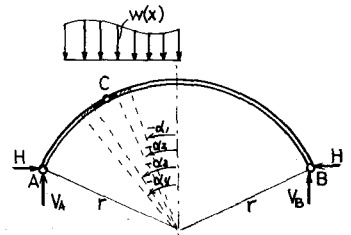


図-2

3. 解法の手順 ①データとしてアーチの半開角  $\alpha_0$ 、断面高さ-スパン比  $\alpha/l$  および降伏歪  $\varepsilon_y (= \sigma_y/E)$  を与え、まず初期降伏荷重  $P_0$  と初期降伏の条件式  $|m| = 1 - |m|$  より求める。

②次に  $P > P_0$  になった状態に移り、たわみを無視した弾性時の  $H$  を求め、これを用いて第1、第2塑性領域の境界を指定する  $\alpha_j (j=1, 2, \dots)$  を弾塑性境界条件式より算出する。

③ここでえた  $H$  および  $\alpha_j (j=1, 2, \dots)$  を用いて式(1a), (1b)より  $\delta_i^x, \delta_i^y$ 、また式(5)の  $I_p$  をそれぞれ算定する。

④  $\delta_i^x, \delta_i^y$  を式(6)に代入して  $H$  を数値積分により求め、これを用いて再び  $\alpha_j (j=1, 2, \dots)$  を算出する。

⑤以下③, ④の操作を繰返すことによりHを収斂させ, この収斂値を式(4)および式(1a), (1b)に代入すれば各断面の $M_i, N_i$ および $\delta_i^x, \delta_i^y$ がえられる。

⑥さらに荷重を増加させ, 塑性ヒンジが形成される場合には式(8)よりHを求め, 以下フーチが崩壊機構を形成するときの荷重まで計算を続ける。

以上の解法の手順をフローチャートで示せば図-3のごとくである。

#### 4. 計算例

図-4に示すとき2ヒンジ円弧フーチの中央点Cに集中荷重Pが作用する場合について解析すれば以下のごとくである。

まず塑性領域のみ生ずる場合の水平反力Hは式(6)より決式となる。

$$\frac{H}{N_y} = H = \frac{(\mu_1 - D_A) V_A - \bar{I}_P / K_r}{\mu_2 - D_B} \quad (9)$$

ただし  $V_A = P/2N_y, K_r = N_y r / M_y = (l/d) \cdot (3/\sin \alpha_0)$

$$\mu_1 = \frac{\sin^2 \alpha_0}{2} - \alpha_0 \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0 + \cos \alpha_0 - \frac{3 \sin^2 \alpha_0}{2 K_r^2}$$

$$\mu_2 = \frac{\alpha_0}{2} - \frac{3}{2} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 + \alpha_0 \cos^2 \alpha_0 + \frac{3}{2 K_r^2} (\alpha_0 + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0)$$

$$\left. \begin{aligned} D_A &= \int_{-\alpha_0}^0 (\cos \varphi - \cos \alpha_0) \frac{\delta_i^x}{r} d\varphi \\ D_B &= \int_{-\alpha_0}^0 (\cos \varphi - \cos \alpha_0) \frac{\delta_i^y}{r} d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_P &= \int_{-\alpha_1}^0 \{ (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) (\cos \varphi - \cos \alpha_0) + R_d (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \cos \varphi \} d\varphi \\ &+ \int_{-\alpha_2}^{-\alpha_1} \{ (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) (\cos \varphi - \cos \alpha_0) + R_d (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) \cos \varphi \} d\varphi \\ &+ \int_{-\alpha_3}^{-\alpha_2} \{ (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) (\cos \varphi - \cos \alpha_0) + R_d (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \cos \varphi \} d\varphi \\ &+ \int_{-\alpha_4}^{-\alpha_3} \{ (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) (\cos \varphi - \cos \alpha_0) + R_d (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) \cos \varphi \} d\varphi \\ &+ \int_{-\alpha_6}^{-\alpha_4} \{ (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) (\cos \varphi - \cos \alpha_0) + R_d (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \cos \varphi \} d\varphi \end{aligned}$$

$$R_d = \frac{3}{K_r} = \frac{d}{l} \sin \alpha_0$$

また任意点のたわみ $\delta_i^x$ および $\delta_i^y$ は式(1a)および式(1b)よりそれぞれ決式のごとく求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta_i^x}{r} &= (\cos \varphi_i - \cos \alpha_0) \cdot D_A - \frac{M_y r}{EI} \left[ \int_{-\alpha_0}^{\varphi_i} \{ \bar{E}_0 (\cos \varphi_i - \cos \varphi) + R_d \bar{E}_0 \cos \varphi \} d\varphi \right. \\ &+ \int_{-\alpha_6}^{\varphi_i} \{ (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) (\cos \varphi_i - \cos \varphi) + R_d (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \cos \varphi \} d\varphi + \int_{-\alpha_5}^{\varphi_i} \{ (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) (\cos \varphi_i - \cos \varphi) + R_d (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \cos \varphi \} d\varphi \\ &+ \int_{-\alpha_4}^{\varphi_i} \{ (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) (\cos \varphi_i - \cos \varphi) + R_d (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \cos \varphi \} d\varphi + \int_{-\alpha_1}^{\varphi_i} \{ (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) (\cos \varphi_i - \cos \varphi) + R_d (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \cos \varphi \} d\varphi \\ &\left. + \int_{-\alpha_1}^{\varphi_i} \{ (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) (\cos \varphi_i - \cos \varphi) + R_d (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) \cos \varphi \} d\varphi \right] \quad (11a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta_i^y}{r} &= (\sin \varphi_i + \sin \alpha_0) \cdot D_A - \frac{M_y r}{EI} \left[ \int_{-\alpha_0}^{\varphi_i} \{ \bar{E}_0 (\sin \varphi_i - \sin \varphi) + R_d \bar{E}_0 \sin \varphi \} d\varphi \right. \\ &+ \int_{-\alpha_6}^{\varphi_i} \{ (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) (\sin \varphi_i - \sin \varphi) + R_d (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \sin \varphi \} d\varphi + \int_{-\alpha_5}^{\varphi_i} \{ (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) (\sin \varphi_i - \sin \varphi) + R_d (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \sin \varphi \} d\varphi \\ &+ \int_{-\alpha_4}^{\varphi_i} \{ (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) (\sin \varphi_i - \sin \varphi) + R_d (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \sin \varphi \} d\varphi + \int_{-\alpha_1}^{\varphi_i} \{ (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) (\sin \varphi_i - \sin \varphi) + R_d (\bar{E}_1 - \bar{E}_0) \sin \varphi \} d\varphi \\ &\left. + \int_{-\alpha_1}^{\varphi_i} \{ (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) (\sin \varphi_i - \sin \varphi) + R_d (\bar{E}_2 - \bar{E}_0) \sin \varphi \} d\varphi \right] \quad (11b) \end{aligned}$$

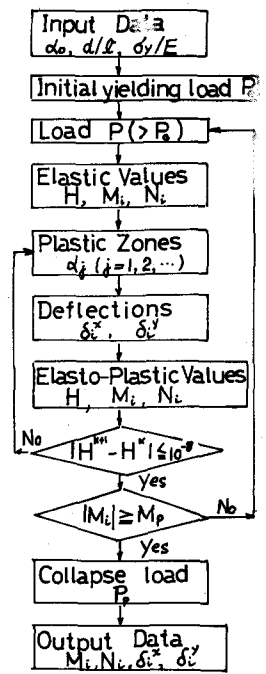


図-3

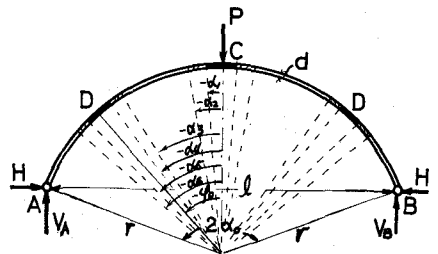


図-4

式(1a), (1b)中の $\theta_A$ は対称条件 $\theta_c=0$ より次式をうる。

$$\theta_A = \frac{M_0 r}{EI} \left[ \int_{-\alpha_0}^0 \bar{\sigma}_0 d\varphi + \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_0) d\varphi + \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1) d\varphi + \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2) d\varphi + \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\bar{\sigma}_4 - \bar{\sigma}_3) d\varphi + \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (\bar{\sigma}_5 - \bar{\sigma}_4) d\varphi \dots \right] \quad (12)$$

ただし  $M_0 r/EI = (\sigma_y/E) \cdot (l/d) \cdot (1/\sin \alpha_0)$

次に中央点Cに塑性ヒンジが形成される時の水平反力Hは式(8)より下記の式(13)となる。

$$\frac{H}{N_y} = Hl = \begin{cases} \frac{3/2 - Kr \sqrt{A} \sin \alpha_0 - Kr \sqrt{A} (\delta_c^2/r)}{Kr (\cos \alpha_0 - 1) + 3/4 + Kr (\delta_c^2/r)}, & |\eta_0| \leq 0.5 \\ \frac{9/4 - Kr \sqrt{A} \sin \alpha_0 - Kr \sqrt{A} (\delta_c^2/r)}{Kr (\cos \alpha_0 - 1) + 9/4 + Kr (\delta_c^2/r)}, & |\eta_0| \geq 0.5 \end{cases} \quad (13)$$

さらにC点に引き抜き中頂点Dに塑性ヒンジが生ずると、本アーチは崩壊機構を形成することになるが、この崩壊荷重 $P_0$ は式(4)および式(7)より次式のごとく求められる。

$$\frac{P_0}{N_y} = \begin{cases} \frac{3 - 3Hl \cos \varphi_0/2 - 2KrHl \{ (\cos \alpha_0 - \cos \varphi_0) - \delta_c^2/r \}}{Kr (\sin \alpha_0 - \sin \varphi_0) + Kr (\delta_c^2/r) + 3 \sin \varphi_0/4}, & |\eta_0| \leq 0.5 \\ \frac{9/2 (1 - Hl \cos \varphi_0) - 2KrHl \{ (\cos \alpha_0 - \cos \varphi_0) - \delta_c^2/r \}}{Kr (\sin \alpha_0 - \sin \varphi_0) + Kr (\delta_c^2/r) + 9 \sin \varphi_0/4}, & |\eta_0| \geq 0.5 \end{cases} \quad (14)$$

ただし  $\varphi_0 = \pi/2 - \tan^{-1}(H/\sqrt{A})$

以上の誘導諸式を用いて $\alpha_0=60^\circ$ ,  $d/l=0.02$ ,  $\sigma_y/E=1.14 \times 10^3$  (SS41の場合)に対し,  $P=0.068N_y$ を与えて数値計算を行なえば, 表-1および図-5に示すM, N-図がえられる。またたわみの影響を無視した場合を併記し両者を比較した。

なお, 式(10)の数値積分を行なうに際し, 任意点 $i$ の $\delta_c^2$ ,  $\delta_c^3$ をすべて電子計算機に記憶させる必要があり, このため本例では部材を40等分に区分して計算を行なった。

### 5. 結語

本論文では, たわみによる付加曲げモーメントの影響を考慮して2ヒンジ円弧アーチに対する弾塑性解析を行なったが, 同様の手法により固定円弧アーチ, さらにパラボラアーチに対しても解析可能となる。また, 本研究ではひずみ硬化の影響を無視したが, かかる影響を考慮した解析については後日発表する予定である。

なお, 数値計算には本学電子計算機OKITAC-5090Hを使用した。

### 参考文献

- 1) 高尾孝二: タワミの影響を考慮したアーチ橋の計算, 第20回土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和40年5月
- 2) 山崎石川: 円弧アーチの弾塑性解析, 土木学会論文集第158号, 昭和43年10月
- 3) E. T. Onat & W. Prager: Limit Analysis of Arches, Jour. of Mech. and Phys. of Solids, 1953

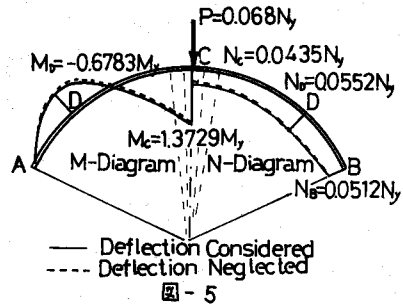


表-1 P=0.068N<sub>y</sub>の場合

	H/N <sub>y</sub>	M <sub>c</sub> /M <sub>y</sub>	M <sub>0</sub> /M <sub>y</sub>	δ <sub>c</sub> <sup>2</sup> /r
①たわみ考慮	0.04354	1.3729	-0.6783	0.1375x10 <sup>-1</sup>
②たわみ無視	0.04328	1.3528	-0.6834	0.1231x10 <sup>-2</sup>
③=①/②x100%	0.6%	1.5%	-0.7%	11.7%