

地震応答をも考慮したトラス構造物の最適化に関する基礎的研究

愛媛大学工学部 正会員 大久保禎二
愛媛大学工学部 正会員 ○谷脇 一弘

1. まえがき

本研究は、応答スペクトル法を用いたトラス構造物の動的解析法において、振動方程式から導入される固有値問題の基礎式を設計変数で直接偏微分することにより得られる固有値・固有ベクトルの感度係数を用いて、地震荷重による応力度および節点変位の感度係数を解析的に求め、静荷重のみならず動荷重による部材応力度および節点変位の制約条件を考慮したトラス構造物の最適設計を行った結果について述べるものである。

2. 地震応答をも考慮したトラス構造物の最適設計法

(1) 原設計問題

本研究では、設計変数としてトラス構造物の各部材の断面積 A および節点座標 S 、制約条件として次に示す静的荷重および動的荷重による応力度および変位の制約を考慮し、目的関数としてトラス構造物の総製作費 W を最小する最適設計問題を考える。

$$g_j = \frac{|N_{sj}| + |N_{dj}|}{A_j} - \sigma_a \leq 0 \quad (j=1 \cdots n) \quad (1), \quad g_k = |\delta_{sk}| + |\delta_{dk}| - \delta_a \leq 0 \quad (k=1 \cdots d) \quad (2)$$

ここに、 N_s, δ_s はそれぞれ静荷重による軸力およびたわみ、 N_d, δ_d はそれぞれ動荷重による軸力およびたわみ、また σ_a および δ_a はそれぞれ許容応力度および許容たわみを示す。

(2) 最適設計法

上で述べた原設計問題の解法として、本研究では、設計変数に関する1次の偏微分係数の符号により順変数もしくは逆変数を用いて変数分離型の凸近似設計問題を導入し、双対法により改良解を求めることを反復することにより最適解を決定する方法を用いた。

(3) 動的挙動の感度係数の計算

動的応答変位および部材力の感度係数の計算に必要な固有値・固有ベクトルの感度係数は、それぞれ次のようにして計算することができる。すなわち、

j 次モードに関する固有値 λ_j の設計変数 x_i ($x = [A_1, \dots, A_n, S_1, \dots, S_p]^T$) に対する感度係数は、固有値問題の基礎式を設計変数 x_i で偏微分することにより、次式により計算することができる。

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} = \phi_j^T \left(\frac{\partial K}{\partial x_i} - \lambda_j \frac{\partial M}{\partial x_i} \right) \phi_j, \quad \text{ただし、} \phi_j^T M \phi_j = 1 \quad (j=1, \dots, m) \quad (3)$$

ここに、 ϕ_j は j 次モードの固有ベクトル、 K, M はそれぞれ全体剛性マトリックスおよび質量マトリックスである。また、上式における λ_j および ϕ_j の計算にはサブスペース法を用いている。

設計変数 x_i に対する j 次の固有ベクトルの感度係数 $\partial \phi_j / \partial x_i$ の計算では、固有ベクトル ϕ_j の各要素を要素の最大値 $\phi_{j_{max}}^k$ で除すことにより最大値が1となるように基準化された固有ベクトルを $\bar{\phi}_j$ とし、 K, M ($q \times q$) の k 行要素および k 列要素、 $\bar{\phi}_j$ の k 要素を取除き縮約した行列をそれぞれ \bar{K}, \bar{M} ($(q-1) \times (q-1)$)、 $\bar{\phi}_j^k$ とすれば、 $d \bar{\phi}_j^k / d x_i$ は次式より計算することができる。

$$\frac{\partial \bar{\phi}_j^k}{\partial x_i} = (\bar{K} - \lambda_j \bar{M})^{-1} \left\{ - \left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial x_i} - \lambda_j \frac{\partial \bar{M}}{\partial x_i} \right) \bar{\phi}_j^k + \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} \bar{M} \bar{\phi}_j^k \right\}, \quad \frac{\partial \bar{\phi}_j^k}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$\phi_j^T M \phi_j = 1$ の条件を満たす $\partial \phi_j / \partial x_i$ は、基準化に用いた $\bar{\phi}_j = \phi_j / \phi_{j_{max}}^k$ の関係式より、次式より計算することができる。

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi_{j_{max}}^k}{\partial x_i} \bar{\phi}_j^k + \phi_{j_{max}}^k \frac{\partial \bar{\phi}_j^k}{\partial x_i} \quad (5)$$

ここに、

$$\frac{\partial \phi_{j_{max}}^k}{\partial x_i} = -(\phi_{j_{max}}^k)^2 \phi_j^T M \frac{\partial \bar{\phi}_j^k}{\partial x_i} - \frac{\phi_{j_{max}}^k}{2} \phi_j^T \frac{\partial M}{\partial x_i} \phi_j \quad (6)$$

j 次のモードに関する応答変位の感度係数 $\partial u_j / \partial x_i$ は、上で得られた固有値および固有ベクトルの感

度係数を用いて、応答変位 u_j と規準座標 Q_j との関係式 $u_j = \phi_j Q_j$ を x_i で偏微分することにより、次式により計算することができる。

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} Q_j + \phi_j \frac{\partial Q_j}{\partial x_i} \tag{7}$$

上式における $\partial Q_j / \partial x_i$ は刺激係数 β_j 、加速度応答スペクトル S_A を用いて次式により計算することができる。

$$\frac{\partial Q_j}{\partial x_i} = \frac{1}{S_{A_j}} \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} + \beta_j \frac{\partial S_A}{\partial x_i} = \frac{\beta_j S_A}{\lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} \tag{8}$$

ここに、 $\frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \right)^T M \{1\} + \phi_j^T \frac{\partial M}{\partial x_i} \{1\}$ 、 $\{1\}$: 要素を1とする q 行1列の行列 $\tag{9}$

j 次のモードに関する部材要素 k の部材力 f_{kj} の感度係数 $\partial f_{kj} / \partial x_i$ は次式により計算することができる。

$$\frac{\partial f_{kj}}{\partial x_i} = \frac{\partial k_k}{\partial x_i} C^T u_j + k_k \frac{\partial C^T}{\partial x_i} u_j + k_k C \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{10}$$

ここに、 k_k は部材要素 k の剛性マトリックス、 C は座標変換マトリックスである。

最大応答変位および部材力の感度係数は、各モードの応答値の2乗和平方根の計算式を設計変数 x_i で偏微分することにより容易に計算することができる。

3. 計算例および考察

上で述べた最適設計法を種々のトラス構造物に適用し最適化を行ったが、ここでは、図1に示す15部材トラスの最適設計例について述べる。この設計問題における形状変数 S として各節点のセンターラインからの水平距離 $X = [X_1, X_2, X_3, X_4]^T$ を考慮している。考慮した質量として、図1に示すごとく節点1および2には一定の集中質量 $M_n = 102.04\text{kg}$ が、また節点1~6には、部材要素の断面積および部材長の変化とともに変化する集中質量 $m_1 \sim m_6$ が付加されている。設計例において、弾性係数を 2000000kgf/cm^2 、許容応力度を 2000kgf/cm^2 、単位体積当りの重量を 0.00785kgf/cm^3 とし、地震応答解析には道路橋示法書に規定されているI種地盤のスペクトルを用いた。

最適解におけるアクティブな制約条件が応力度に関する制約条件のみの場合について、静荷重のみを考慮した場合および動荷重をも考慮した場合の最適解の比較を表1に示す。また、静荷重および動荷重を考慮した場合の最適解を図2に示す。この図において、部材の太さは断面積の大きさを示し、点線は改良過程において断面積が下限値 0.1cm^2 となり、最適解において不必要となった部材を示している。

静荷重のみ、および動荷重をも考慮した場合の最適解を得るまでの改良反復回数はそれぞれ27回および30回とほぼ同程度の反復改良により最適解が得られている。静荷重のみおよび動荷重をも考慮した場合の最適な X_1 の値はそれぞれ1582.58cmおよび1494.75cmとわずかに異なっているが、形状はどちらも2部材トラスの形状を示している。また、部材断面積については、主要な部材の断面積はあまり大きな相違は見られないが、断面積の小さな部材において多少の変化が見られる。

その他種々の設計例より、本研究で述べた方法により静荷重のみならず動荷重による部材力および変位をも考慮したトラス構造物の最適化を能率的に行うことができることが明らかとなった。

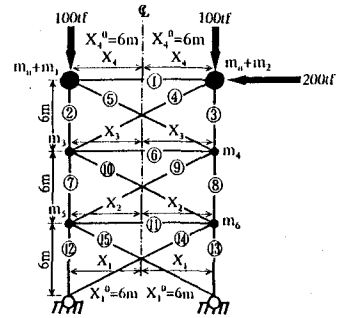


図1 初期15部材トラス

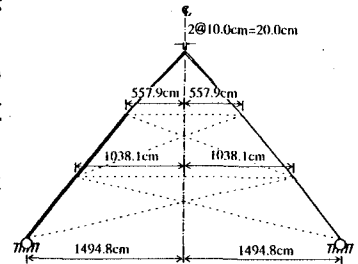


図2 動荷重をも考慮した最適解

表1 静荷重のみおよび動荷重をも考慮した場合の最適解の比較

設計変数	静荷重	静+動荷重
A_2 (cm^2)	70.58	75.43
A_3 (cm^2)	4.34	8.83
A_5 (cm^2)	4.44	12.93
A_8 (cm^2)	8.64	21.09
A_{12} (cm^2)	143.04	144.57
A_{13} (cm^2)	8.65	27.76
X_1 (cm)	1582.58	1494.75
X_2 (cm)	1057.72	1038.11
X_3 (cm)	530.36	557.90
X_4 (cm)	10.00	10.00
反復回数	27	30
総製作費	1.09×10^8	1.27×10^8