地震応答解析への確率有限要素法の適用に関する基礎的研究

（株）ピー・エス　正会員　○石田邦洋
山口大学 工学部　学生員　玉井知孝
山口大学 工学部　正会員　中村秀明
山口大学 工学部　正会員　浜田純夫

１．まえがき

近年、構造物の最適設計や信頼性あるいは安全性が重視されるようになり、安全性・機能性を保持するとともに、経済性をぎりぎりまで追求した設計が要求されるようになった。そこで従来のような確定的な構造解析では十分と言えなくなってきており、構造物に含まれる不確かさを考慮した構造解析法が必要となってきている。ここに従来の設計法に代わり新しい設計法として不確定要因を定量的に評価し、安全性を確保する確率有限要素法を用いた設計法が注目されている。

そこで、本研究では動的問題における確率有限要素法の定式化と、その適用例として１自由度系に本手法を用いた場合について示す。本研究では、構造パラメターに不確かさが含まれる場合の動的解析における確率有限要素法の定式化を行い、簡単な例題による妥当性の検討として、摂動法による構造解析の精度および減衰の取扱いについて研究したものである。

２．解析理論・モデル

解析は確率有限要素法を用いて行う。この方法では、解析対象となるモデルの運動方程式を確率変数で微分することにより１次変動率を、さらに微分することで２次変動率を求めることができる。

確率有限要素法の基礎を与えるテイラー展開による近似理論解析として、構造応答が確率変数X_1、X_2、…X_nの関数とすれば、

$$Y=g\ (X_1\ ,X_2\ ,\cdots,X_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

これを期待値$\overline{X}=\{\overline{X_1},\overline{X_2},\cdots\overline{X_n}\}$ のまわりでテイラー展開すると次のようになる。

$$Y=g\ (\overline{X_1},\overline{X_2},\cdots,\overline{X_n})+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_{\overline{X}}(X_i-\overline{X_i}) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial X_i\partial X_j}\right)_{\overline{X}}(X_i-\overline{X_i})(X_j-\overline{X_j})+\cdots$$

ここで、摂動解の１次近似は式(2)のXの１次項まで考慮し、２次近似はXの２次の項まで考慮するものである。また、$(\cdot)_{\overline{X}}$ は微分を（$\overline{X}_1,\overline{X}_2,\cdots,\overline{X}_n$）　で評価することを意味するが、それらの微分値が与えられるような滑らかな関数である場合に、本手法の適用範囲は限られる。

解析モデルは１自由度系モデルで、系のバネ剛性は$k=3EI/\ell^3$とし$I=\alpha A^2(\alpha=1.0)$の関係を仮定している。モデルの不確定要因としてモデルの断面積を仮定し、基準となる断面積を1%,2%,3%,4%,5%,7%,10%,15%,20%と変化させてその応答値を比較した。また、減衰はRayliegh減衰を仮定し、剛性に対してのみの比例形とした。運動方程式の解は複素応答法により求め、式(2)に代入し、摂動解を求めた。入力加速度として、El Centro NS成分の最大値を100galに修正したものを用い、解析条件は以下のように６種類用意した。

Example 1 : $\frac{\partial K}{\partial A}$、$\frac{\partial^2 K}{\partial A^2}$ かつ $\frac{\partial C}{\partial A}=\frac{\partial^2 C}{\partial A^2}=0$

Example 2 : $\frac{\partial K}{\partial(1/A)}$、$\frac{\partial^2 K}{\partial(1/A)^2}$ かつ $\frac{\partial C}{\partial(1/A)}=\frac{\partial^2 C}{\partial(1/A)^2}=0$

Example 3 : $\frac{\partial K}{\partial I}$、$\frac{\partial^2 K}{\partial I^2}$ かつ $\frac{\partial C}{\partial I}=\frac{\partial^2 C}{\partial I^2}=0$

Example 4 : $\frac{\partial K}{\partial(1/I)}$、$\frac{\partial^2 K}{\partial(1/I)^2}$ かつ $\frac{\partial C}{\partial(1/I)}=\frac{\partial^2 C}{\partial(1/I)^2}=0$

Example 5 : $\frac{\partial K}{\partial A}$、$\frac{\partial^2 K}{\partial A^2}$ かつ $\frac{\partial C}{\partial A}=\frac{h}{\pi f}\cdot\frac{\partial K}{\partial A}$、$\frac{\partial^2 C}{\partial A^2}=\frac{h}{\pi f}\cdot\frac{\partial^2 K}{\partial A^2}$

Example 6 : $\frac{\partial K}{\partial(1/A)}$、$\frac{\partial^2 K}{\partial(1/A)^2}$

かつ $\frac{\partial C}{\partial(1/A)}=\frac{h}{\pi f}\cdot\frac{\partial K}{\partial(1/A)}$、$\frac{\partial^2 C}{\partial(1/A)^2}=\frac{h}{\pi f}\cdot\frac{\partial^2 K}{\partial(1/A)^2}$

3．解析結果

図1～4はExample 1～Example 4の場合（減衰の１次変動率と２次変動率を無視した場合）の時刻2.2秒における加速度の応答値であるが、図中の線は以下のようである。

- ── 確定値
- ----- １次近似値
- ── ２次近似値

これを比較すると、微分する変数を変えることで、実際に断面積を変化させた場合の応答値（確定値）と本手法による予測された応答値（予測値）の誤差は、その微分する変数により異なることがわかる。しかし、剛性が変化する場合の１自由度系モデルにおいては微分係数にどの変数を用いてもあまり差がないということがわかる。そして、断面積の変化率が小さな範囲ではどの微分係数を用いても変化がないということがわかる。また、摂動解の近似は２次近似を用いることで１次近似よりも確定値に近づくことができるということがわかる。また、図5～6はExample 5,6の場合（減衰の１次変動率と２次変動率を考慮した場合）の時刻2.2秒における加速度の応答値を示した図であるが、これらの図と図1、2を比較するとある時刻における応答値を予測する際、減衰がRayliegh減衰の場合においては、減衰の１次変動率と２次変動率は考慮しない方が、予測値は確定値に近いということがわかる。したがって、Rayliegh減衰を仮定した場合には、各微分係数で偏微分した減衰の１次変動率と２次変動率は計算の簡単のため考慮しなくても良いということが言える。

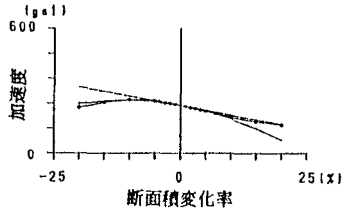

図1 応答加速度(Example 1)

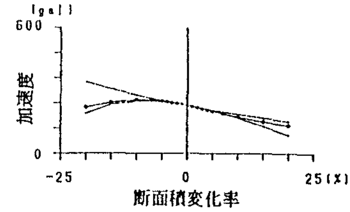

図2 応答加速度(Example 2)

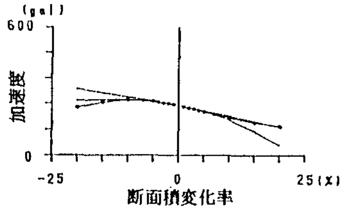

図3 応答加速度(Example 3)

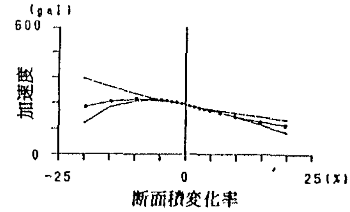

図4 応答加速度(Example 4)

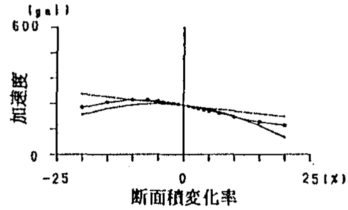

図5 応答加速度(Example 5)

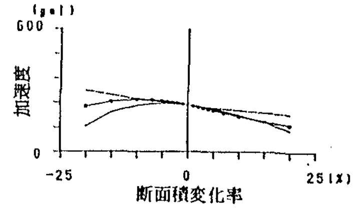

図6 応答加速度(Example 6)

また、本研究では、不確定要因としてモデルの断面積を用いたが、バネ剛性の変化によって固有振動数が変化したにもかかわらず、断面積が5%程度の範囲で増減する場合、すなわちバネ剛性の変化が10%程度の範囲までは、変数変換の如何によらずExample 1～Example 4の場合（減衰の１次変動率と２次変動率を考慮しない場合）において、変化率のわずかな範囲ではどの微分係数によっても十分に評価することがわかる。

4．結論

本研究において、適用例として、１自由度系モデルで本手法の妥当性を検討した結果、モデルが１自由度系モデルの場合、不確定要因として固有振動数の変化するバネ定数を用いても、バネ定数の変動係数が10%程度の範囲では確率変数の影響を十分な精度で推定できることがわかった。また微分係数を変化させることで応答の予測値の精度の向上させることができるかどうか検討したが、本研究で用いた解析例では微分係数としてどれを用いても解析結果に大差はなかった。また、解析に用いた減衰は剛性に比例するRayliegh減衰であるが、この減衰定数を微分係数で偏微分した減衰の１次変動率と２次変動率を考慮しても応答の予測値の精度は良くならないことがわかった。

【参考文献】

１）中桐 滋・久田俊昭：確率有限要素法入門 ～不確定構造の解析～　培風館　1985