

1. はしがき

複雑な現象を把握する手法としてフーリエ解析が、種々の形で多方面に用いられているが、この手法には問題もある。すなわちフーリエスペクトルは積分核が周期性と相似性の両方の性質を持っていることによる現象の生じた時刻に関する情報の欠落という欠点を持っている。これを改善する手法として最近ウェーブレット解析が注目されるようになってきた¹⁾。本研究は、ウェーブレット解析として、有限ウェーブレット変換を用いて地震波記録を解析し、その基礎的な特性について若干考察を加えたものである。

2. 有限ウェーブレット変換に関する基礎式

ウェーブレット変換における積分核に相当する関数はかなり自由度をもって定義されるが、本研究は、S. G. Malletが定義した形式²⁾を用いる。すなわち、ウェーブレット関数 $\phi(x)$ を用いて、

$$e^{m_j} = 2^{-j/2} \phi_{2^j}(x-2^{-j}m) \quad (1)$$

$$\text{ここに、} \phi_{2^j}(x) = 2^j \phi(2^{-j}x) \quad (2)$$

なる正規直交基底が定義される。いま、データ数 $2N$ を 2^n なる偶数とすると、離散量 $f(x)$ はつぎのように表示できる。

$$f(x) = \sum_{j=-n}^{-1} 2^{-j} \sum_{m=-2^j}^{2^j} D_{2^j}^m f \phi_{2^j}(x-2^{-j}m) \quad (3)$$

$$\text{ここに、} D_{2^j}^m f = \langle f(u), \phi_{2^j}(u-2^{-j}m) \rangle \quad (4)$$

係数 $D_{2^j}^m f$ は、与えられたデータ $f(u)$ と関数 $\phi_{2^j}(u-2^{-j}m)$ との演算 $\langle \rangle$ ：内積によって定義される。 m は整数値であり、変数 u は、 $2^{-j}m$ ごとの整数値をとる離散量となっている。この $D_{2^j}^m f$ がウェーブレット変換した量に相当する。

つぎに、 $D_{2^j}^m f$ を計算するアルゴリズムは、直接式(4)の内積計算を

行なうのではなく、スケール関数 $\phi(x)$ を用いた関数 $\phi_{2^{j+1}}(x)$ のフーリエ変換を仲介して求め、求まった $D_{2^j}^m f$ のフーリエ変換の逆変換を実施して求める。すなわち、

$$\phi_{2^{j+1}}(x) = 2^{j+1} \phi(2^{j+1}x), g(m) = \langle \phi^2(u), \phi(m-u) \rangle \quad (5)$$

を定義し、それぞれのフーリエ変換を $\Phi_{2^{j+1}}(Y), G(Y)$ とすると、 $D_{2^j}^m f$ のフーリエ変換は、次式となる。

$$F(Y) \Psi_{2^j}(Y) = F(Y) \Phi_{2^{j+1}}(Y) G(2^{-j-1}Y) \quad (j=-1, -2, \dots, -n) \quad (6)$$

式(6)の左辺は、分解係数 j での有限ウェーブレット変換のスペクトルを表わしている。なお、 $\Phi_{2^{j+1}}(Y)$ はつぎのような漸化式より求まる。

$$\Phi_{2^j}(Y) = \Phi_{2^{j+1}}(Y) H(2^{-j-1}Y) \quad (7)$$

ここに、 $H(Y)$ は、 $h(m) = \langle \phi^2(u), \phi(m-u) \rangle$ のフーリエ変換

本研究では、式(2)、(5)の関数はP. G. Lemarieの方法³⁾により表-1のように作成して用いた。

3. 数値シミュレーションによる検討

まず、本研究で用いたスケール関数 ϕ およびウェーブレット関数 ϕ のフーリエ変換は図-1に示す関数であ

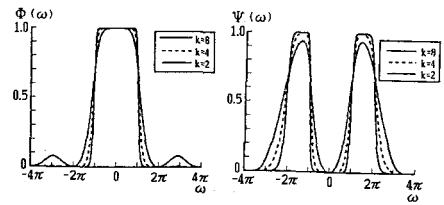


図-1 スケール関数 $\Phi(\omega)$ および $\Psi(\omega)$

表-1 スケール関数 $\Phi(\omega)$ 、ウェーブレット関数 $\Psi(\omega)$

$\Phi(\omega)$	$\left\{ \frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right\} \cdot \sqrt{\left(\frac{638512875}{A_1} \right)}$
$\Psi(\omega)$	$\cos(\omega/2)H_d \Phi_d - i \sin(\omega/2)H_d \Phi_d$ ここに $\Phi_d = \left\{ \frac{4 \sin(\omega/4)}{\omega} \right\} \cdot \sqrt{\left(\frac{638512875}{A_2} \right)}$ $H_d = \sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{B_1}{A_1} \right)}$
$A_1 = 8 \cos^{14}(\omega/2) + 65476 \cos^{12}(\omega/2) + 6715896 \cos^{10}(\omega/2) + 88951490 \cos^8(\omega/2) + 273021880 \cos^6(\omega/2) + 225028452 \cos^4(\omega/2) + 43800104 \cos^2(\omega/2) + 929569$ $A_2 = 8 \cos^{14}(\omega/4) + 65476 \cos^{12}(\omega/4) + 6715896 \cos^{10}(\omega/4) + 88951490 \cos^8(\omega/4) + 273021880 \cos^6(\omega/4) + 225028452 \cos^4(\omega/4) + 43800104 \cos^2(\omega/4) + 929569$ $B_1 = 8 \sin^{14}(\omega/4) + 65476 \sin^{12}(\omega/4) + 6715896 \sin^{10}(\omega/4) + 88951490 \sin^8(\omega/4) + 273021880 \sin^6(\omega/4) + 225028452 \sin^4(\omega/4) + 43800104 \sin^2(\omega/4) + 929569$	

り、それぞれは矩形近似のフィルターが1および2つある関数となっているのがわかる。

つぎに、異なった振動数を区間ごとにもった正弦波の波形データ（時間刻み0.02秒）に対するフーリエ変換とウェーブレット変換の結果を図-2

に示す。ウェーブレット変換は、分解係数 j ごとに時間軸に相当する整数値に対する値を表示している。この場合、分解係数 j ごとの時間に対する変動は、 j の次数が低いほど不連続となる時刻を明確に表わしている。すなわち、高振動数域でのバンドパスフィルターにより、変動の不連続を生じる時刻でのウェーブレット係数が大きく現れている。

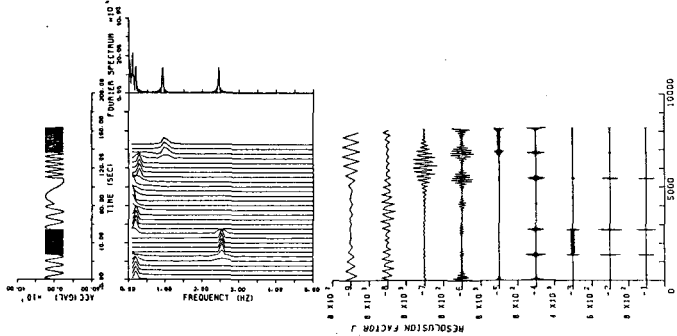


図-2 区間定常正弦波に対するフーリエ変換およびウェーブレット変換

地震波記録⁴⁾（1968年十勝沖地震、 $M=7.8$ 、観測地青森）に対して同様の交換を施したのが図-3である。分解係数 j ごとのウェーブレット変換の結果は、 j が-1~-4において元の波動の高振動数成分による変動の生じた時刻20秒付近にピークを生じている。さらに、 $j=-5$ の結果をみると、約20~60秒に元の波形から中心振動数0.78125Hzでのバンドパスフィルター通過後に相当する

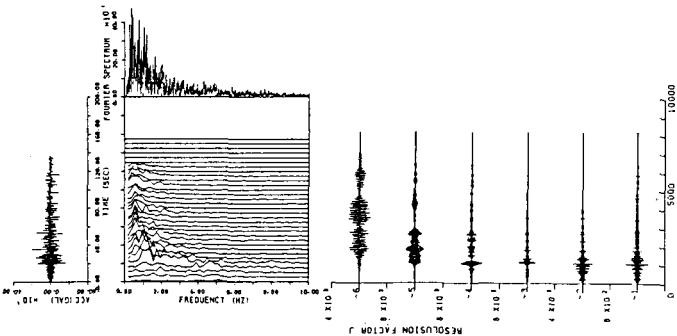


図-3 地震波に対するフーリエ変換およびウェーブレット変換

包絡線の結果となっており、フーリエ変換のピーク振動数付近に対応している。分解係数 j におけるウェーブレットされた変動のフーリエスペクトルをとり、これの総和をウェーブレットスペクトル（WSP）としたときの結果を表示したのが図-4（a）である。この結果を比較するため固有振動数を分解係数 j に相当する値にとり、減衰定数5%においたときの構造物の地震応答を求め、そのフーリエスペクトルの総和を応答フーリエスペクトル（RFS）とし、また同様に地震応答スペクトル（ERS）をも求めた結果は、

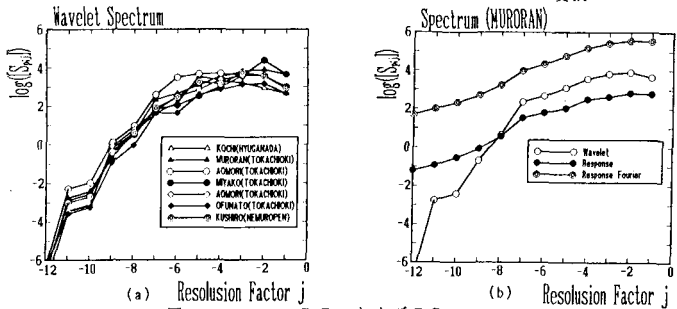


図-4 WSP, RFSおよびERS

図-4(b)に示す。図より、WSPの特徴は、RFS、ERSの特性と同様の結果となっているが、少し詳細にみるとERSとWSPの特徴が、 $-7 < j$ で良い相似関係を持っている。

4. あとがき

本報告は、地震波に対して有限ウェーブレット変換を行い、つぎのようなことがわかった。

- (1) ウェーブレット解析はフーリエ解析において欠陥するデータの時刻に関する情報を明確に把握できた。
- (2) 分解係数 j での包絡線の結果がフーリエ変換での卓越振動数の変動と良い相関をもっていた。
- (3) $j > -7$ でWSPは耐震設計での1自由度構造物のERSと非常に良い相似関係を示していた。

<参考文献>1) 山口昌哉・山田道夫：科学，Vol.60, No. 6, 1990. 6, pp. 398-405. 2) Mallat, S.G.: IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 11, No. 7, 1989, 7, pp. 674-693. 3) 前述2) : pp. 689-690. 4) 亀田弘行：土木学会論文報告集，Vol.235, 1975. 3, pp. 55-62.