

—積分方程式を用いた地震時動水圧の解析に関する研究—

京都大学 工博 正会員 小林昭一  
 京都大学 工博 正会員 田村 武  
 京都府 正会員 浮田長嗣

—はじめに—

ダムの地震時動水圧の解析に関しては、Westergaardによる解析解<sup>(1)</sup>以来、有限要素法を用いた研究など、いくつかの手法によって行われている。

ここでは、ダム-貯水池系を境界値問題として取り扱い、連立境界積分方程式として定式化し、解析する方法を採用した。本手法の利点は、ダム面及び貯水池の境界だけでモデルを構成するので、任意形状のモデルに対しても容易に適用することができる事である。また数値計算上も比較的小容量であり、短時間計算が可能である。

—基礎理論—

圧縮流体を考えると、その運動方程式、連続式、状態方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j v_{j,i} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} \quad (1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_{j,i} = 0 \quad (2) \quad \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \rho' \quad (3) \quad \text{但し } c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad \text{水中の音速}$$

但し、 $v_i$ は速度ベクトル、 $p$ は圧力、 $\rho$ は密度であり、総和規約を適用している。また  $p = p_0 + p'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$  (4) で  $p_0, \rho_0$ は平衡状態の値で、 $p', \rho'$ は変化分。

これらの式より、2次以上の微小量を無視し、また  $v_i = \Phi_{,i}$ なる速度ポテンシャルを導入することによって次の水についての運動の基礎式を得る。

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_s^2 \Phi_{,ii} = 0 \quad (6)$$

定常な状態を想定すると、 $\Phi(x,t) = \text{Re}\{\varphi(x) e^{-i\omega t}\}$  (7) と表現される、従って

$$\varphi_{,ii} + k^2 \varphi = 0 \quad \text{但し } k = \omega/c_s \text{ : 波数} \quad (8)$$

となり、これが基礎式である。Green 公式よりこれを積分方程式として定式化すると、

$$F_{\alpha\beta} v = \int_{\Omega} (u_i \varphi_{,i\alpha} - v_i \varphi_{,i\beta}) d\Omega \quad (9)$$

但し、 $u, v$ は  $v_{,ii} + k^2 v = 0$  (10),  $u_{,ii} + k^2 u = -\delta(x-y)$  (11) を満している。

ダムについては、等方均質な線形弾性体と仮定すると、運動方程式、構成式、ひずみ変位式より、運動方程式を変位で表現すると Navier の式を得る。

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (12)$$

但し、 $f_i, u_i$ は物体力ベクトル、変位ベクトル、 $\lambda, \mu$ は Lamé 定数である。

流体の場合同様、定常な状態では、 $u_i = \text{Re}\{u_{i\alpha} e^{-i\omega t}\}$ ,  $f_i = \text{Re}\{f_{i\alpha} e^{-i\omega t}\}$  (13) とおける。これを(12)式に代入し、次の演算子  $\mathcal{L}_{ij}$  を用いて表現すると、

$$\mathcal{L}_{ij} u_j = (c_1^2 - c_2^2) u_{i,jj} + c_2^2 u_{j,ji} + \omega^2 u_i = -f_i \quad \text{但し } c_1^2 = \lambda + 2\mu/\rho, c_2^2 = \mu/\rho \quad (14)$$

応力も変位によって表現すると、次の演算子  $\mathcal{T}_{ij}$  を用いて、

$$\mathcal{T}_{ij}^n u_j = \lambda n_i u_{k,k} + \mu n_j (u_{i,j} + u_{j,i}) = \tau_i \quad (15)$$

Shoichi KOBAYASHI Takeshi TAMURA Nagatsugu UKITA

相反定理における2つの状態に対して、 $\sum_{ij} U_{ij}(x) = 0$  (16) 及び  $\sum_{ij} U_{ij}^R(x, y) = -\delta(x-y) \delta_{i-j}$  (17) を満たすものを選び、(14)(15)式をさらに適用すると次の積分方程式が得られる。

$$F(x) U_{i0}(x) = \int_{\Omega} \{ U_{ij}^R(x, y) t_{ij}(y) - U_{ij}(y) T_{ij}^R(x, y) \} dS_y \quad \text{但し、} T_{ij}^R(x, y) = \sum_{k=1}^n U_{ij}^R(x, y) \quad (18)$$

(11)式(12)式を満たす  $U_{ij}$  及び  $U_{ij}^R$  は各々基本特異解といわれ、二次元の問題に対しては次式で与えられる。

$$U_{ij}(x, y) = \frac{1}{4} H_0^0(x, r) \quad (19) \quad U_{ij}^R(x, y) = \frac{1}{4} H_0^0(x, r) \delta_{i-j} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \{ H_0^0(x, r) - H_0^0(x, r_k) \} \quad (20)$$

### 問題の定式化

貯水池については(9)式で  $F(x) = \frac{1}{2}$  の場合に境界積分方程式として次のように定式化される

$$\begin{bmatrix} G_{b1} & G_{r1} & G_{r2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{b1} \\ \varphi_{r1} \\ \varphi_{r2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{b1} & H_{r1} & H_{r2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_{b1} \\ \psi_{r1} \\ \psi_{r2} \end{Bmatrix} \quad \text{但し、} [G] = \left[ \int_{\Omega} U_{ij}^R(x_k, x_l) dS \right] \quad (k, l \text{ は境界番号}) \quad (21)$$

$$[H] = \left[ \frac{1}{2} \delta_{i-k} + \int_{\Omega} \frac{\partial U_{ij}^R(x_k, x_l)}{\partial n} dS \right] \quad (U_{ij} \text{ は (19) 式を参照})$$

一方ダムについても(18)式より次のように定式化される。

$$\begin{bmatrix} U_{d1} & U_{d2} & U_{b2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{d1} \\ t_{d2} \\ t_{b2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{d1} & T_{d2} & T_{b2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{d1} \\ U_{d2} \\ U_{b2} \end{Bmatrix} \quad \text{但し } [U] = \left[ \int_{\Omega} U_{ij}^R(x_k, x_l) dS \right] \quad (22)$$

$$[T] = \left[ \frac{1}{2} \delta_{i-k} \delta_{i-j} + \int_{\Omega} T_{ij}^R(x_k, x_l) dS \right]$$

$\varphi$  は  $\varphi$  の法線微分を、 $t, U$  は表面力、変位を表わしている。また添字は Fig 1 の各境界上の値である事を示している。境界条件は貯水池については、 $\varphi_{r1} = 0, \varphi_{r2} = 0$ 、ダムについては、 $t_{d1} = 0, U_{d2}$  は地震動が決めば与えられる。境界  $S_{b1} - S_{b2}$  ではダムと貯水池の間を応力と法線方向の速度について連続条件が成立する。また (1)(2)(3)(7)式より  $p = i\omega \rho \varphi$  (23) なので、  
 $t_{ib2} = -n_i i \rho \omega \varphi_{b1}$  (24)       $\varphi_{b1} = -i \omega n_i U_{ib2}$  (25)

(21)(22)(24)(25)式をまとめると、

$$\begin{bmatrix} -T_{d1} & U_{d2} & -T_{b2} & U_{b1} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{b1} N_2 & H_{b1} & -G_{r1} & H_{r2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{d1} \\ t_{d2} \\ U_{b1} \\ \varphi_{b2} \\ \varphi_{r1} \\ \varphi_{r2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_{d1} & T_{d2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_{r1} & G_{r2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{d1} \\ U_{d2} \\ \varphi_{r1} \\ \varphi_{r2} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

### 一適用例

Fig 2 は Fig 1 に示したダムで水深を 50m とし、ダムは全くの剛体とした場合の動水圧分布を、地震動周期を変化させて示したものである。分布形状は、ほぼ放物線形を示しており、Westergaard の結果とよく一致している。

また周期が 0.15 秒から 0.1 秒に変化すると動水圧の大きき分布形に差違が現れるが、これは貯水池の固有周期のためであると思われる。

なお、適用例の詳細は当日会場にて発表する。

#### 参考文献

(1) H.M. Westergaard; Water Pressures on Dams during Earthquakes; American of Civil Engineering, 1952, P1303-P1318

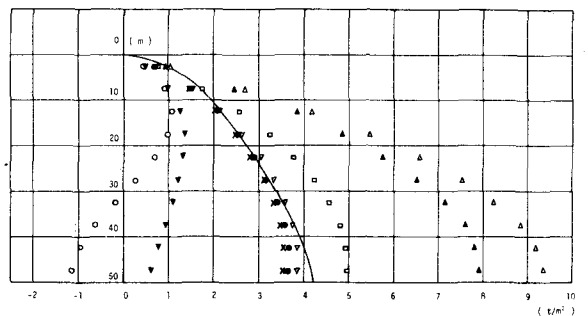
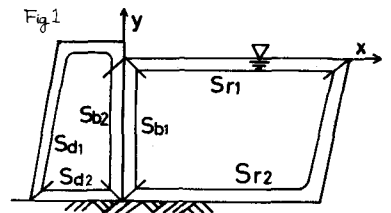


Fig 2 動水圧分布 周期 1.00 x 0.20 □ 0.07 ▽ 実験 Westergaard  
 0.50 ● 0.15 △ 0.05 ○  
 0.35 ▽ 0.10 ▲ (参考)