

構造物の地震時最大応答推定について

京都大学工学部 正員 山田善一
同上 正員 竹宮滋和

§1. まえかき 最近、構造物の地震時挙動の解析は、不規則振動論を適用して行なわれ
ていふが、それは、地震動、すなわちそれによる構造物の応答工統計量である平均値、分散
値あるいは共分散を求めることに終始している傾向がある。しかし、構造物設計に際して
は、最大応答値の正確な推定がより重要である。しかも、通常、地震動の強度はその最大
加速度で評価されるので、構造物最大応答値をこれより推定することと試みは、

構造物を介してのランダム変数の入力関係にはスペクトル解析と、それらの最大値推
定にはピーク値分布理論を採用している。

§2. ランダム変数の最大値推定

ランダム変数 $X(t)$ の継続時間 (t_1, t_2) のレベル ξ 以上のピーク数は D. Middleton によれば

$$N(\xi, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \dot{X}(t) \delta[X(t) - \xi] \Pi[X(t) - \xi] dt \quad (1)$$
 ここで、 $\delta[\cdot]$ は Dirac の delta 関数、 $\Pi[\cdot]$

は Heaviside の step 関数である。(1)式の変数 $X(t)$, $\dot{X}(t)$, $\ddot{X}(t)$ の結合確率密度 $f(X, \dot{X}, \ddot{X}; t)$ を導
入すれば
$$N(\xi, t_1, t_2) = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\xi} \dot{X} f(X, 0, \ddot{X}; t) dX d\ddot{X} \quad (2)$$
 いま、結合確率密度を三次

元 Gauss 分布を採用すると
$$f(X, 0, \ddot{X}; t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi^3 |M|}} \exp\left[-\frac{M_{xx}X^2 + M_{\ddot{x}\ddot{x}}\ddot{X}^2 + 2M_{x\ddot{x}}X\ddot{X}}{2|M|}\right] \quad (3)$$

ここで

$$|M| = \begin{vmatrix} \sigma_{\dot{x}\dot{x}} & \sigma_{\dot{x}\ddot{x}} & \sigma_{\dot{x}\ddot{\ddot{x}}} \\ \sigma_{\dot{x}\dot{x}} & \sigma_{\dot{x}\ddot{x}} & \sigma_{\dot{x}\ddot{\ddot{x}}} \\ \text{対称} & & \sigma_{\ddot{x}\ddot{x}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \sigma_{\dot{x}\dot{x}}^2 \sigma_{\ddot{x}\ddot{x}}^2 - \sigma_{\dot{x}\ddot{x}}^2 \\ M_{\ddot{x}\ddot{x}} &= \sigma_{\ddot{x}\ddot{x}}^2 \sigma_{\ddot{\ddot{x}}\ddot{\ddot{x}}} - \sigma_{\ddot{x}\ddot{\ddot{x}}}^2 \\ M_{x\ddot{x}} &= \sigma_{\dot{x}\dot{x}} \sigma_{\ddot{x}\ddot{x}} \sigma_{\ddot{\ddot{x}}\ddot{\ddot{x}}} - \sigma_{\dot{x}\ddot{x}} \sigma_{\ddot{x}\ddot{\ddot{x}}} \end{aligned}$$

$\sigma_{\dot{x}\dot{x}}, \sigma_{\ddot{x}\ddot{x}}, \sigma_{\ddot{\ddot{x}}\ddot{\ddot{x}}}$; $\sigma_{\dot{x}\ddot{x}}, \sigma_{\ddot{x}\ddot{\ddot{x}}}, \sigma_{\dot{x}\ddot{\ddot{x}}}$ はそれぞれ
添字のランダム変数に関する
分散値及び共分散値である。

(3)式を(2)式へ代入して、単位時間あたりレベル ξ 以上の

ピーク数は
$$E[N(\xi, t)] = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi M_{\ddot{x}\ddot{x}}} \int_{-\infty}^{\xi} \left[\frac{2}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{M} \exp\left(-\frac{M_{xx}X^2}{2|M|}\right) + \frac{\sqrt{M_{\ddot{x}\ddot{x}}}}{\sqrt{M_{\ddot{x}\ddot{x}}}} X \left(\text{erfc}\left(\frac{M_{x\ddot{x}}X}{2|M| M_{\ddot{x}\ddot{x}}}\right) \right) \right] \exp\left(\frac{M_{\ddot{x}\ddot{x}} - M_{xx} M_{\ddot{x}\ddot{x}} X^2}{2|M| M_{\ddot{x}\ddot{x}}}\right) dX$$

従って継続時間 $(0, t_2)$ の ξ 以上の総ピーク数は
$$E[N(\xi, t_2)] = \int_0^{t_2} E[N(\xi, t)] dt \quad (5)$$

これより、ランダム変数 $X(t)$ の絶対最大値は、上限値、下限値として推定される。すなわち、

下限値: $E[N(\xi_{max}, t_2)] = 1.0 \quad (6-a)$ 上限値: $E[N(\xi_{max}, t_2)] = 0.5 \quad (6-b)$

§3. 地震動のシミュレーション及びその最大値推定

不規則振動論における地震動のシミュレーションは、そのパワー・スペクトル密度と実際のそれ
と近似したものを作成することと意味する。本研究においては、より
正確な近似を目指す。Fig.1 のような地盤構成を想定し、基礎に white noise
を入力させ、1自由度系の並列構造から成る地盤の速度応答を構造物へ
の地震外力と見做す。いま、地盤の1自由度系の運動方程式と

$$\ddot{X}_g + 2k_g \dot{X}_g + (\omega_g^2 + \mu_g^2) X_g = \ddot{X}_0 \quad (7)$$

と表わせば、横揺地震動

のパワー・スペクトル密度は
$$S_{X_g}(\omega) = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i H_{X_g}(\omega) \right|^2 D \quad (8)$$
 本文では

(8)式の単純化された
$$S_{X_g}(\omega) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i H_{X_g}(\omega)|^2 D \quad (9)$$
 を用いる。Fig.2は

(9)式のシミュレーションと強震記録のものを比較していふ。

次に、上の地震動のシミュレーションを用いて、(6)式よりピーク値分布と

*土木学会論文報告集第249号

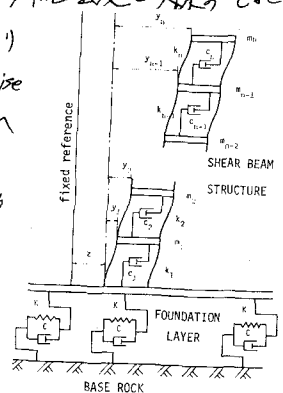


Fig.1 Structural system

調った。その結果、地震動の最大値と標準偏差との間に Fig.3 に示すような関係式が成立することが判明した。

5.4. 1自由度系構造物の最大応答

不規則振動論における1自由度系の振動数領域における入力関係式は $f_R(\omega) = |G^a H(\omega)|^2 S_F(\omega)$ (10) と表わされ、 f_R , f_a はそれぞれ外力、応答のパワースペクトル密度であり、 $G^a H(\omega)$ は加速度外力に対する系の変位応答の伝達関数である。 f_R に (9) 式を用いると、

$$f_R(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 |G^a H(\omega)|^2 |H_{X_i}(\omega)|^2 \frac{1}{2} \quad (11)$$

従って変位分散値は $\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_R(\omega) d\omega$ (12)

また、速度分散値は $\sigma_V^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |G^a H(\omega)|^2 \alpha_i |H_{X_i}(\omega)|^2 \frac{1}{2} d\omega$ (13)

絶対加速度分散値は、加速度入力に対する絶対加速度応答の伝達関数 $G^a H(\omega)$ を用いて、 $\sigma_a^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G^a H(\omega)|^2 \alpha_i |H_{X_i}(\omega)|^2 \frac{1}{2} d\omega$ (14)

$$\therefore G^a H(\omega) = \frac{-1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i 2\zeta \omega \omega_0}, \quad G^v H(\omega) = \frac{\omega_0^2 + i 2\zeta \omega \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i 2\zeta \omega \omega_0}$$

上式 (12), (13), (14) の積分はいずれも留数定理を用いて行われる。

次に、1自由度系構造物の最大値を求めよう。この場合、初めに

を用いた場合、軽減表のとき、そのピーク値分布に Rayleigh 分布が適用できること判明した。このため、(6) 式の代わりに応答の上限値に対して $E[N(\xi_{max}^2, T)] = \int_0^{\xi_{max}^2} E[N(\alpha)] \int_0^{\xi_{max}^2} P(X) dX dt = 1.0$ (15a)

また、下限値に対して $E[N(\xi_{min}^2, T)] = \int_0^{\xi_{min}^2} E[N(\alpha)] \int_0^{\xi_{min}^2} P(X) dX dt = 1.0$ (15b) $\therefore E[N(\alpha)]$

はランダム応答 $X(t)$ が零と上向き(あるいは下向き)を断つ単位時間内に超過する回数、 $P(X)$ は Rayleigh 分布関数である。よって、 $E[N(\alpha)] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_V^2}{\sigma_a^2}$ (16), $P(X) = \frac{X}{\sigma_a^2} \exp(-\frac{X^2}{2\sigma_a^2})$ (17)

(15) に (16), (17) を代入して結果は

$$\text{下限値: } \sigma_R^2 = \frac{\sigma_a^2 \max}{\sigma_a^2} = \left[2 \log_e \{ E[N(\alpha)] + T \alpha \} \right]^{1/2} (\sigma_a^2), \quad \text{上限値: } \sigma_R^2 = \frac{\sigma_a^2 \max}{\sigma_a^2} = \left[2 \log_e \{ 2 E[N(\alpha)] T \alpha \} \right]^{1/2} (\sigma_a^2)$$

これらの値は、 $\sigma_R^2 = a^2 \log_{10} T + b^2$, (18a); $\sigma_R^2 = a^2 \log_{10} T + b^2$ と系の固有周期 T の関数で係数 a, b は応答継続時間、軽減表で表される。

例題: 以上の結果を用いて、ある入力パワースペクトル密度をもつ、一定最大加速度に対する多自由度系構造物の最大応答を求めよう。対象系は Fig.1 に示した3階建のビルディングで、計算は等価な5質点系に置換して行なう。この系は低次モードが十分分離しているため、系の入力関係式は次式を用いる。

$$\sigma_{Rk}^2 = \sum_{i=1}^5 J_{ik} \{ \beta_i \phi_k^{(i)} \}^2 \alpha_F^2 \quad (20)$$

ここで、 $J_{ik} = \int_{-\infty}^{\infty} |G^a H(\omega)|^2 S_F(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\omega) d\omega$

$\alpha_F^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\omega) d\omega$, 従って、系の最大応答値は $\sigma_{k, \max} = \left[\alpha_F^2 \beta_i^2 \{ \beta_i \phi_k^{(i)} \}^2 \right]^{1/2} \frac{1}{\alpha_F} \quad (21)$

$\therefore \sigma_i = \alpha_F \beta_i$, α_R は (18) 式の α , あるいは α_R に相当する。計算結果を Fig.4 に示す。

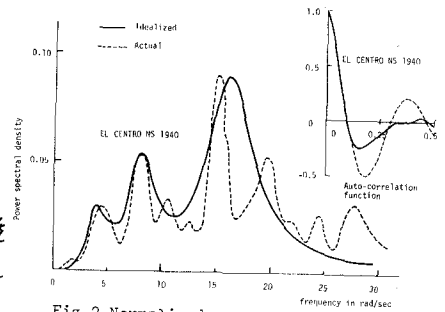


Fig.2 Normalized earthquake characteristics

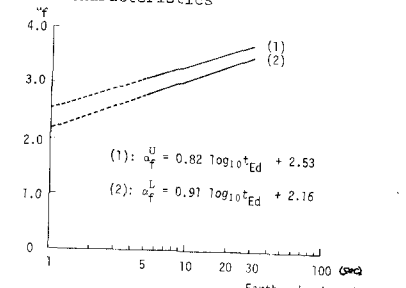


Fig.3 Ratio of earthquake maximum acceleration to its standard deviation

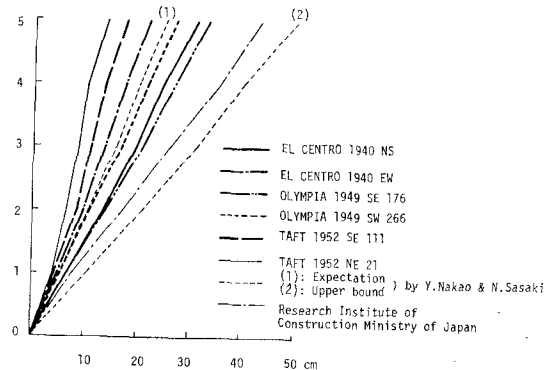


Fig.4 Maximum deformation response
Maximum input acceleration 200 gal
Response duration $t_{ed} = 25$ sec.
Fraction of damping $\zeta = 0.05$ of each mode