構造物の近傍における不均質性地盤の震動特性

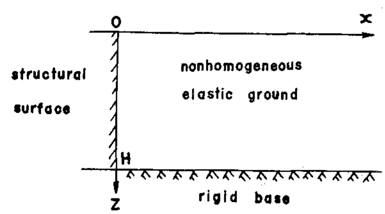
京都大学防災研究所　正員　土岐憲三

まえがき

構造物と地盤とで構成される振動系の地震応答解析においては，地盤中を伝播する波動速度の設定が系の応答に決定的な影響を及ぼす．しかるに，地盤を構成する土の弾性定数は作用応力のほぼ1/2乗に比例し，間げき率の増大に対してはその値が直線的に減少する傾向を示すとされている。[1),2)] これらはいずれも地盤の弾性定数は地表面からの距離に比例して増大する，すなわち不均質性を持つことを示唆しており，その変化率は地表に近いほど著しいことになる。一方，構造物を支持し，構造物と接する地盤は地表面に近い部分であることから，このような地盤の不均質性は構造物の応答にも重要な影響を及ぼすことが考えられる。こうした問題はこれまでは実験的研究にとどまっていたが，本研究はさらに理論的に解析したものである。

運動方程式とその解

厚さHの不均質性表層地盤が基盤上に半無限に拡がり，$x=0$ に構造物表面があるとする．座標を図−1のごとくに定め，この表層地盤の弾性定数が地表面からの距離の1/2乗に比例するものとし，Lamé の定数に対応する二つの弾性定数の比例定数を k_1，k_2 と表わす．



図−1　座標

また，基盤および表層地盤はいずれも x 軸に平行な方向の変位成分 u_0，u のみを持つものとすれば，表層地盤内の相対変位 u についての運動方程式は次式で表わされる。

$$(k_1+2k_2)\sqrt{z}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_2\sqrt{z}\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\rho\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \qquad (1)$$

ここで，　$u=[w(z)\exp(i\gamma x)-\bar{u}_0]\exp(-i\omega t)$　と表わして，u から w，時間領域から周波数領域への変換を行なうと次式が得られる。

$$\frac{d^2 w}{dz^2}+\frac{1}{2z}\frac{dw}{dz}+\left(\frac{\rho\omega^2}{k_2\sqrt{z}}-\frac{k_1\gamma^2}{k_1+2k_2}\right)w=0 \qquad (2)$$

弾性定数が深さの1/2乗に比例するような地盤の運動は座標や境界条件にかかわらず，常に式(2)あるいはそれと類似の微分方程式に支配されることになるが，この式は $z=0$ において正則でなく，$z=0$ は確定特異点でもないからこのままでは解が得られない。そこで，$\sqrt{z/H}=\xi$ なる変数変換を行なうと結局次式が得られる。

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2}+(\alpha\xi+\beta\xi^2)w=0,\quad ただし\ \alpha=\frac{4\rho\omega^2 H^{3/2}}{k_2},\quad \beta=-\frac{4k_2\gamma^2 H^2}{k_2} \qquad (3)$$

上の式(3)において，β が負の場合にはさらに数回の変数変換によってその解を合流型超幾何関数や Whittaker 関数で表わすことができるが，γ が純虚数となる場合には適用できない。しかるに，式(3)は $\xi=0$ で正則であるから，$0\leqq\xi<\infty$ に対しては2つの独立な

級数解を得ることができる。その誘導過程は省略するが，それらの解を $Q_1(\alpha,\beta;\xi)$，$Q_2(\alpha,\beta;\xi)$ と表わすと，それらは次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} Q_1(\alpha,\beta;\xi) &= \xi\sum_{n=0}^{\infty} C_n\xi^n, \quad C_0=1,\ C_1=C_2=0,\quad C_n=-\frac{\alpha C_{n-3}+\beta C_{n-4}}{n(n+1)} \\ Q_2(\alpha,\beta;\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n\xi^n, \quad C_0=1,\ C_1=C_2=0,\quad C_n=-\frac{\alpha C_{n-3}+\beta C_{n-4}}{n(n-1)} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

これらの関数を用いると，式(2)の解はA，Bを定数として，次式のごとくになる。

$$w(z)=AQ_1\{4\rho\omega^2H^{3/2}/k_2,\ 4(k_1+2k_2)\gamma^2H^2/k_2;\ \sqrt{z/H}\}+BQ_2\{4\rho\omega^2H^{3/2}/k_2,\ 4(k_1+2k_2)\gamma^2H^2/k_2;\ \sqrt{z/H}\} \quad (5)$$

上式の第1解，第2解はそれぞれ，表層地盤を均質な弾性体とした場合には正弦関数，余弦関数により表わされる項である。

表－1　固有値

mode	frequency ratio ω/ω_{HC}				
	0	0.4	0.8	1.2	1.6
1st	4.013	3.595	1.787	3.710 ※	6.258 ※
2nd	10.246	10.091	9.613	8.769	7.460
3rd	16.516	16.420	16.130	15.638	14.930
4th	22.793	22.724	22.514	22.164	21.666
5th	29.075	29.016	28.586	28.586	28.199
6th	35.262	35.245	35.000	34.792	34.561

固有値と固有関数

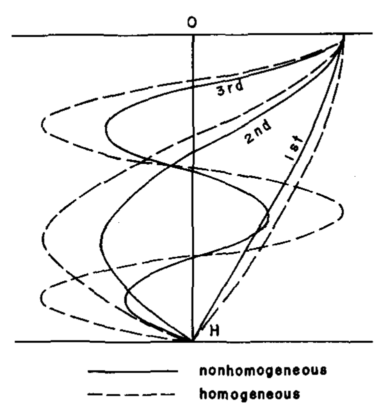
地表面と基盤面での境界条件式として

$$\left[k_2\sqrt{z}\,\partial w/\partial z\right]_{z=0}=0,\quad [w]_{z=H}=0 \quad (6)$$

を考えると，式(5)の第2解だけがこの系の解となり，かつその固有値は

$$Q_2(\alpha,\beta;1)=0 \quad (7)$$

を満足するβの値として得られる。しかるに $Q_2(\alpha,\beta;\xi)$ はαの値によって異なるから，固有値もαをパラメーターとして含むことになる。そこで，$z=H$ での弾性定数を持つ均質な表層地盤の固有円振動数を ω_{HC} と表わせば，$\alpha=\pi^2(\omega/\omega_{HC})^2$ となる。表－1は ω/ω_{HC} をパラメーターとして固有値 β_m の平方根を表にしたものである。表中の※印を持つ値は γ が実数となり，対応するモードはxの正の方向に波動として伝播することを表わしており，他はいずれも γ が純虚数となることから，対象としている系の全域が同位相の振動をすることを示している。また，この場合の cut-off frequency は $J_{-1/3}(4\omega H^{3/4}\sqrt{\rho/k_2}/3)=0$ を満足する最小のωとして与えられるが，この値は ω_{HC} よりも小さく，地盤を均質とみなした場合よりも低振動数のモードが波動として伝播しうることを示している。



図－2　固有関数

図－2の実線は $\omega/\omega_{HC}=0.8$ の場合に対して，1～3次のモードを描いたものであり，破線は均質な地盤でのそれらである。これより高次モードにおいて不均質性の影響が著しく，かつ地表面からの距離に比例して，均質な場合との差異が著しくなることが明らかであろう。また振動数によるモードの変化は低次数のものにおいて明瞭である。一方，$Q_2(\alpha,\beta_m;\sqrt{z/H})$ は $(z/H)^{1/2}$ を重み関数として直交関数系を形成するから，これを利用して，構造物表面が任意の変位と変形をする場合の系の応答を解析することが可能となるが，これについては講演時に譲る。

1) Hardin and Richart: ASCE, SM1, 1963.　2) 柴田・土岐・寺田：京大防災研年報，13号，昭.45.