立体ラーメンの静的解析におけるネットワークトポロジーの応用

京都大学工学部　正　員　工博　小西一郎
京都大学工学部　正　員　工博　白石成人
京都大学工学部　学生員　工修　玉村三郎
京都大学工学部　学生員　　○谷口健男

1. まえがき

複雑な骨組構造物を電子計算機を用いて解析する方法として骨組構造物のもつトポロジー的性質に注目した解法がある。これは電気回路への骨組構造物のアナロジーによる解法であって、電気回路問題でいう*Node method, Mesh method*[1,2]は骨組構造解析における*Displacement method, Force method*であり、その解法は確立されている。しかし、電気回路問題におけるいま一つの解法であり、かつ*Node method*の変形ともいうべきTree method[1,2]は*rigid*なconnectionをもつ骨組構造物解析への応用が可能であり、しかも多くの*merit*があるにもかかわらず、いままで応用されていない。そこで本研究においては、Tree methodを応用した骨組構造物解析について考察する。

2. Tree method

*Tree method*は与えられた骨組構造物をTree部材, Link部材に分け、Link部材に関する量を、すべて、これに等価なTree部材の量へ変換することにより、与えられた構造物(荷重を含む)に等価な静定構造物としてのTree systemにおきかえ、このTree systemの解析結果から、すべての解をえようとするものである。従来のDisplacement methodでは、まず節点変位が求められ、これから部材力，部材変形が算出されるのに対し、この方法では節点変位を求めることなく直接部材力，部材変形が求められる。

基準座標系を用いたDisplacement methodによる基本式[1]は、

$$\hat{u} = (A^t\hat{K}A)^{-1}(\hat{P} - A^t\hat{K}\hat{U}') \tag{1}$$

ここで　$\hat{u}$：節点変位　　$\hat{P}$：節点荷重　　A：Incidence matrix
　　　　$\hat{K}$：Stiffness matrix　　$\hat{U}'$：温度変化等による部材変形

Tree部材としてえらばれた部材の変形$\hat{V}_T$は

$$\hat{V}_T = \hat{U}_T + \hat{U}'_T = A_T\hat{u} + \hat{U}'_T \tag{2}$$

ここで　$\hat{U}'_T$：温度変化等によるTree部材の変形，　添字T：Tree部材に関する諸量

(1)式を(2)式に代入すると、Tree部材の変形$\hat{V}_T$は

$$\hat{V}_T = (D^t\hat{K}D)^{-1}(B_T\hat{P} - D^t\hat{K}\hat{U}') + \hat{U}'_T \tag{3}$$

ここで　D：Basic cut set matrix　　B_T：Node-to-datum path matrix

(3)式の$D^t\hat{K}D$について、Basic cut set matrix DとStiffness matrix $\hat{K}$をTree部分とLink部分に分けると、

$$D^t\hat{K}D = [I_T \ D_L^t]\cdot\begin{bmatrix}\hat{K}_T & 0\\ 0 & \hat{K}_L\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}I_T\\ D_L\end{bmatrix} = \hat{K}_T + D_L^t\hat{K}_L D_L \tag{4}$$

添字L：Link部材に関する諸量

(4)式の逆行列を求めるためにHousholderの式[3]を用いると、

$$(D^t\hat{K}D)^{-1} = \hat{F}_T - \hat{F}_T D_L^t (D_L \hat{F}_T D_L^t + \hat{F}_L)^{-1} D_L \hat{F}_T \tag{5}$$

Link部材の変形 $\hat{V}_L$，および部材力 $\hat{R}$ は

$$\hat{V}_L = D_L(\hat{V}_T - \hat{U}'_T) + \hat{U}'_L, \qquad \hat{R} = \hat{K}\hat{V} = \hat{K}_T\hat{V}_T + \hat{K}_L\hat{V}_L \tag{6}$$

(4)式からわかるように $D^t\hat{K}D$ を計算する場合，$D^t\hat{K}D$ を計算する必要はなく，$D_L^t\hat{K}_L D_L$ を計算すればよいので計算回数はTree部材の数の3乗回だけ減少する。また(5)式をみると逆行列の次元が構造物の全部材の次元からLink部材数の次元へ低下することがわかり，逆行列を求めることが容易となる。しかし，(1)～(6)式はすべて基準座標系による式であるから求まる値も基準座標系による値であり，その値を設計に用いようとする場合，いま一度局所座標系に変換する必要が生じる。この欠点をなくするために，局所座標表示による基本式を導びく。

基準座標系から局所座標系への2つの変換行列 T_{A0}，$(T_{A0})_T$ を定める。

T_{A0}：すべての部材に関する変換行列，　$(T_{A0})_T$：Tree部材に関する変換行列

T_{A0}，$(T_{A0})_T$ を用いて(3)式を局所座標系に変換すると

$$(T_{A0})_T D^t (T_{A0})^{-1} K (T_{A0}^{-1})^t D (T_{A0})_T^t (V_T - U'_T) = (T_{A0})_T D^t (T_{A0})^{-1} (P' - KU') \tag{7}$$

$(T_{A0}^{-1})^t D (T_{A0})_T^t = \mathbb{D}$ とおき，またGraphの理論よりえられる $D = A \cdot B_T^t$ を同じように変換してえた $\mathbb{D} = \mathbb{A}\mathbb{B}_T^t$ を(7)式に代入し，まとめると Tree部材の変形 V_T は

$$V_T = (\mathbb{D}^t K \mathbb{D})^{-1} (\mathbb{B}_T P - \mathbb{D}^t K U') + U'_T \tag{8}$$

Link部材の変形 V_L，部材力 R も同じようにして

$$V_L = \mathbb{D}_L (V_T - U'_T) + U'_L, \qquad R = K \cdot V = K_T V_T + K_L V_L \tag{9}$$

(7)～(9)式は局所座標表示によるTree methodの基本式であって，この諸式より求まる値は直ちに設計に用いることのできる実際量である。

上式中の $\mathbb{D}$ はModified basic cut set matrixである。$\mathbb{D}$ は D よりつぎのように求まる。

(1) $D_{ij} = 1$ のとき

$$\mathbb{D}_{ij} = \begin{bmatrix} \Lambda_i \Lambda_k^t, & \Lambda_i X \Lambda_k^t \\ 0, & \Lambda_i \Lambda_k^t \end{bmatrix}$$

(2) $D_{ij} = -1$ のとき

$$\mathbb{D}_{ij} = -\begin{bmatrix} \Lambda_i \Lambda_k^t, & \Lambda_i X \Lambda_k^t \\ 0, & \Lambda_i \Lambda_k^t \end{bmatrix}$$

(3) $D_{ij} = 0$ のとき

$$\mathbb{D}_{ij} = [\,0\,]$$

ここで Λ_i，Λ_k は i，k 部材の ξ, η, ζ 軸に対する方向余弦

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_\xi^i & \mu_\xi^i & \nu_\xi^i \\ \lambda_\eta^i & \mu_\eta^i & \nu_\eta^i \\ \lambda_\zeta^i & \mu_\zeta^i & \nu_\zeta^i \end{bmatrix}, \qquad \Lambda_k = \begin{bmatrix} \lambda_\xi^k & \mu_\xi^k & \nu_\xi^k \\ \lambda_\eta^k & \mu_\eta^k & \nu_\eta^k \\ \lambda_\zeta^k & \mu_\zeta^k & \nu_\zeta^k \end{bmatrix}$$

X は k 部材の始端から i 部材の始端への平行移動に関する変換行列である。

$$X = \begin{bmatrix} 0, & z_i - z_k, & -y_i + y_k \\ -z_i + z_k, & 0, & x_i - x_k \\ y_i - y_k, & -x_i + x_k, & 0 \end{bmatrix}$$

(x_i, y_i, z_i) は i 部材の基準座標における座標値

3．あとがき

1. Tree methodを骨組構造物解析に応用する場合のmeritを考察した。
2. 基準座標系を用いたTree methodの基本式の局所座標表示をおこなった。

参考文献

1．玉村"骨組構造物の静的解析に関するトポロジー的考察" 京都大学修士論文 326号

2．F.H. Branin "The Relation between Kron's Method and the Classical Methods of Network Analysis" I.R.E. WESCON Convention Record Part 2, 1959

3．A.S. Housholder "A Survey of Some Closed Method for Inverting Matrices" Jr. of Soc. of Ind. and Appl. Math. Vol.5 No.3 1957