

# I-13 スペクトル分析によるつり橋タワーの耐震計算法

京都大学工学部 正員 工博 小西一郎  
 京都大学工学部学生員 工修 高岡宣善  
 京都大学工学部学生員 岡廣昌史

## 1. まえがき

これまでに行なつてきたつり橋の耐震計算の研究によれば、タワーと補剛桁の剛性は一般に非常に異なり、そのため両者の振動モードは画然と分離される。この研究ではつり橋のタワーのみを取り出して地震に対する最も重要な最大レスポンス(最大たわみ、最大曲げモーメント、最大剪断力など)を計算しようとするものである。この場合 Benioff, Biot により提唱された Response Spectrum という概念を用いて耐震計算を行なう方法を考へてみよう。

## 2. 運動方程式の樹立

図-1 はこれから解析しようとするタワーを模型的に示したものである。タワーは初等構造力学における梁の理論にしたがい、等間隔分割点  $i$  に分布荷重が集中していると考へ、これを  $M_i$  とし、タワーの下端は固定端で、その基礎(真)は水平方向のみ振動するとする。図-1 において  $z_i$  は空間に固定されたある座標軸から測り、たゞ点  $i$  の水平変位を表わし、 $z_0$  はタワー基礎の水平変位、すなわち地震動による地動である。 $y_i$  はタワーの基礎を過ぎ鉛直線を基準として測り、たゞ点  $i$  の水平変位である。おまらひ、

$$z_i = y_i + z_0, \quad y_0 = 0, \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (1)$$

カンピニングがないと、点  $i$  の質点の運動方程式は、

$$i=1, 2, \dots, 7 \text{ に対して} \quad m_i \ddot{z}_i - \frac{1}{L} (M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}) + \frac{P}{L} (z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}) = 0 \quad (2)$$

$$i=8 \text{ に対して} \quad m_8 \ddot{z}_8 - \frac{M_7}{L} + \frac{P}{L} (z_7 - z_8) + F \cdot y_8 = 0 \quad (3)$$

$$\text{ただし} \quad F = E_c A_c / \int_0^L \frac{dx}{\cos \varphi} + E_c A_c / \int_0^L \frac{dx}{\cos \varphi_p} \quad (4)$$

ここで  $M_i$  は点  $i$  における曲げモーメント、 $L$  はタワー分割間隔長、 $P$  は塔頂に作用する軸方向圧縮力、 $F$  は塔頂におけるケーブルによる拘束の影響をあらわし、 $E_c, A_c$  はケーブルのヤング率、断面積を、 $L, l, \phi, \phi_p$  は主・側径間の径間長およびケーブルの傾斜角をあらわす。次に梁の基礎方程式  $M = -EI \frac{d^2 \theta}{dx^2}$  を階差法であらわし、さらに(1)の関係を用いると、結局、運動方程式(2), (3)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} i=1 \text{ に対して} \quad & m_1 \ddot{y}_1 + \left\{ \frac{1}{L} (2B_0 + 4B_1 + B_2) - \frac{2P}{L} \right\} y_1 + \left\{ -\frac{2}{L} (B_1 + B_2) + \frac{P}{L} \right\} y_2 + \frac{B_2}{L} y_3 = -m_1 \ddot{z}_0 \\ i=2 \text{ に対して} \quad & m_2 \ddot{y}_2 + \left\{ -\frac{2}{L} (B_1 + B_2) + \frac{P}{L} \right\} y_1 + \left\{ \frac{1}{L} (B_1 + 4B_2 + B_3) - \frac{2P}{L} \right\} y_2 + \left\{ -\frac{2}{L} (B_2 + B_3) + \frac{P}{L} \right\} y_3 + \frac{B_3}{L} y_4 = -m_2 \ddot{z}_0 \\ i=3 \sim 6 \text{ に対して} \quad & m_i \ddot{y}_i + \frac{B_{i-1}}{L} y_{i-2} + \left\{ -\frac{2}{L} (B_{i-1} + B_i) + \frac{P}{L} \right\} y_{i-1} + \left\{ \frac{1}{L} (B_{i-1} + 4B_i + B_{i+1}) - \frac{2P}{L} \right\} y_i \\ & \quad + \left\{ -\frac{2}{L} (B_i + B_{i+1}) + \frac{P}{L} \right\} y_{i+1} + \frac{B_{i+1}}{L} y_{i+2} = -m_i \ddot{z}_0 \\ i=7 \text{ に対して} \quad & m_7 \ddot{y}_7 + \left\{ -\frac{2}{L} (B_6 + B_7) + \frac{P}{L} \right\} y_6 + \left\{ \frac{1}{L} (B_6 + 4B_7) - \frac{2P}{L} \right\} y_7 + \left\{ -\frac{2B_7}{L} + \frac{P}{L} \right\} y_8 = -m_7 \ddot{z}_0 \\ i=8 \text{ に対して} \quad & m_8 \ddot{y}_8 + \frac{B_7}{L} y_8 + \left\{ -\frac{B_7}{L} + \frac{P}{L} \right\} y_7 + \left\{ \frac{B_7}{L} - \frac{P}{L} + F \right\} y_8 = -m_8 \ddot{z}_0 \end{aligned} \right\} (5)$$

ここに  $B_i = \frac{E I_i}{L}$  であり、 $I_i$  は点  $i$  の断面二次モーメント

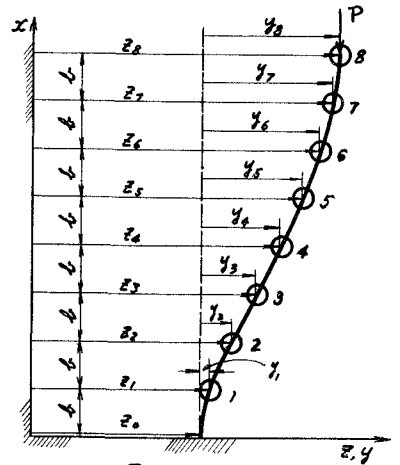


図-1

### 3. モード分析

式(6)は一般的に書けば

$$m_i \ddot{y}_i + \sum_{r=1}^n a_{ir} \dot{y}_r = -m_i \ddot{z}_0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

今、点*i*のたわみ $y_i$ が次式であらわされたとしよう。

$$y_i = \sum_{k=1}^n f_k Y_i^{(k)} \delta_k \quad (7)$$

ここに $Y_i^{(k)}$ は(6)式において、 $k$ 次の固有値 $\lambda_k$ に属する点*i*の振動モードであり、

$$\lambda_k m_i Y_i^{(k)} = \sum_{r=1}^n a_{ir} Y_r^{(k)} \quad (8)$$

から求められ、 $\delta_k$ は時間*t*のみに依存する関数であり、また $f_k$ は次式で与えられる。

$$f_k = \frac{\sum_{i=1}^n m_i Y_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^n m_i [Y_i^{(k)}]^2} \quad (9)$$

この式で正規化されている場合は、この分母は1となる。(6)式に(7)式を代入して、両辺に $Y_i^{(k)}$ をかけて、 $i=1$ から*n*まで合計し、(8)式およびモード間の直交条件を用いて変形すると結局次式のようになる。

$$\ddot{\delta}_j + \lambda_j \delta_j = -\ddot{z}_0, \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

ダンピングがない場合、この解 $\delta_j(t)$ は次式のようになる。

$$\delta_j(t) = -\frac{1}{\omega_j} \int_0^t \ddot{z}_0(\tau) \sin \omega_j (t-\tau) d\tau \quad (11)$$

ここに $\omega_j$ は、 $j$ 次振動の円振動数である。結局、ダンピングのない場合の*n*次自由振動系の運動方程式(6)は、モード分析を行なうことにより、最も簡単な一自由度系の運動方程式(10)に還元される。

### 4. 地震波のスペクトル分析

(11)式にあらわれた積分は、時間*t*の関数であるが、実際の耐震計算に重要なのは、その最大値である。次式で定義される $S_D$ は速度スペクトルと呼ばれている。

$$\text{ダンピングのない場合} \quad S_D = \left[ \int_0^t \ddot{z}_0(\tau) \sin \omega_j (t-\tau) d\tau \right]_{\max} \quad (11)$$

$$\text{ダンピングのある場合} \quad S_D = \left[ \int_0^t \ddot{z}_0(\tau) e^{-\beta \omega_j S(t-\tau)} \sin \omega_j \sqrt{1-S^2} (t-\tau) d\tau \right]_{\max} \quad (12)$$

ここに  $S = \frac{\beta}{\omega_j}$  たゞし $\beta$ はdamping factorである。

### 5. 構造物のレスポンス

$$\text{上の } S_D \text{ を用いると, } \delta_{j, \max} = \frac{1}{\omega_j} \cdot S_D \quad (13)$$

$$\text{したがって, } i \text{ 点の最大変位は: } y_{i, \max} \leq \sum_{j=1}^n |f_j Y_i^{(j)} \delta_{j, \max}| \quad (14)$$

$$\text{最大曲げモーメント: } i=0 \text{ に対して } M_{0, \max} \leq \frac{2B_0}{h} \sum_{j=1}^n |f_j Y_1^{(j)} \delta_{j, \max}| \quad (15)$$

$$i=1, 2, \dots, 7 \text{ に対して } M_{i, \max} \leq \frac{B_i}{h} \sum_{j=1}^n |f_j (Y_{i-1}^{(j)} - 2Y_i^{(j)} + Y_{i+1}^{(j)}) \delta_{j, \max}| \quad (16)$$

$$\text{最大剪断力: } i=0 \text{ に対して } Q_{0, \max} \leq \frac{B_0}{2h} \sum_{j=1}^n |f_j (3Y_1^{(j)} - 3Y_2^{(j)} + Y_3^{(j)}) \delta_{j, \max}| \quad (17)$$

$$i=1 \text{ に対して } Q_{1, \max} \leq \frac{B_i}{2h} \sum_{j=1}^n |f_j (Y_{i-1}^{(j)} + 2Y_i^{(j)} - Y_{i+1}^{(j)}) \delta_{j, \max}| \quad (18)$$

$$i=2, \dots, 6 \text{ に対して } Q_{i, \max} \leq \frac{B_i}{2h} \sum_{j=1}^n |f_j (Y_{i-2}^{(j)} - 2Y_{i-1}^{(j)} + 2Y_{i+1}^{(j)} - Y_{i+2}^{(j)}) \delta_{j, \max}| \quad (19)$$

$$i=7 \text{ に対して } Q_{7, \max} \leq \frac{B_7}{2h} \sum_{j=1}^n |f_j (Y_5^{(j)} - 2Y_6^{(j)} + Y_7^{(j)}) \delta_{j, \max}| \quad (20)$$

### 6. 数値計算例・結言

これらについては講演会当日 会場でお発表する。