

防衛大学校 正員 〇大野 友則 学生員 石郷岡 靖夫
 同 正員 石川 信隆 学生員 池見 俊介
 東京電機大学 正員 松井 邦人

1. はじめに 地震動を受ける構造物の弾塑性応答解析を行なうには、微分方程式を数値的に解くために考案された各種の公式を利用することができる。このうち最も一般的に使用されているのがNewmarkのβ法である。この方法は微小時間内の加速度の変化を仮定することによって微小時刻後での状態を近似的に推定して、繰り返し計算によって各時刻での解を求めてゆくものである。この方法によれば、非線形な履歴復元力を有する構造物に非定常外力が作用する場合でも解が求められるので極めて有効で便利であるが、数値積分によって順次解を求めてゆくとき時間刻みが問題となることもある。これに対し、Nigam-Jennings法は、ある微小時間の区間の初めと終わりの応答量の関係を厳密解に基づいた遷移マトリックスの形で表わした計算法である。この方法では、各時刻毎の応答量を求めるのに繰り返し計算を必要としないので、弾性範囲では非常に効率的であると言われているが、¹⁾弾塑性範囲における研究は未だ見当たらない。本研究は、Nigam-Jennings 法を弾塑性応答解析に拡張し、その有効性について検討したものである。

2. Nigam-Jennings法による弾塑性応答解析の基本式

図-1に示すようなバイリニア型の弾塑性復元力を有する1質点系の運動方程式は、次式で表わされる。

$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + Q(y) = -\ddot{y}_0$ (1) ここに、 \ddot{y}_0 は地動の加速度であり、微小時刻区間における加速度の変化を図-2のように仮定すれば、時刻 $t(t_n-t_{n+1})$ における加速度は次のように表わされる。

$\ddot{y}_0(t) = \ddot{y}_{0n} + \Delta\ddot{y}_0(t - t_n)/\Delta t$ (2)

ここに、 $\Delta\ddot{y}_0 = \ddot{y}_{0n+1} - \ddot{y}_{0n}$, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ である。

また、弾塑性履歴復元力 $Q(y)$ は、図-1を参照して次式で与える。

$$Q(y) = \omega^2 q(y)$$

$$q(y) = \begin{cases} y & : AA' \\ y + \text{sgn}(\dot{y})(1-\gamma^2)(\delta - \delta_y) & : BC, DE \\ y + \text{sgn}(\dot{y})(1-\gamma^2)\delta_y & : EB, CD \end{cases} \dots\dots (3)$$

式(3)を(1)に代入すれば、時刻 t における運動方程式が次式で表わされる。

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0 - \text{sgn}(\dot{y})(1-\gamma^2)(\delta - \delta_y) : BC, DE \dots\dots (4)$$

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \gamma^2\omega^2 y = -\ddot{y}_0 - \text{sgn}(\dot{y})(1-\gamma^2)\delta_y : EB, CD$$

式(4)の一般解は、次式で与えられる。

$y = e^{-h\omega(t-t_n)} \{ C_1 \cos \omega'(t-t_n) + C_2 \sin \omega'(t-t_n) \}$

ただし、 $\omega' = \omega\sqrt{1-h^2}$ または $\omega\sqrt{\gamma^2-h^2}$ である。次に、特解を $y = at + b$ とおき、係数 a, b, C_1, C_2 を定めれば、時刻 t_{n+1} における変位応答値 y_{n+1} が次のような形で定式化できる。

$y_{n+1} = a_{11}y_n + a_{12}\dot{y}_n + b_{11}\ddot{y}_{0n} + b_{12}\ddot{y}_{0n+1} + c_1 \dots (5)$

式(5)の各係数 $a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}, c_1$ は以下のように与える。

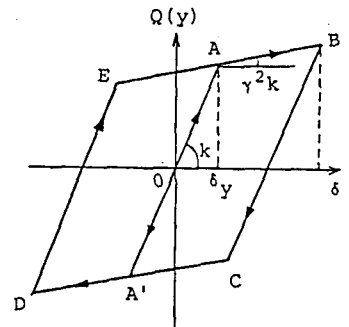


図-1 バイリニア型復元力

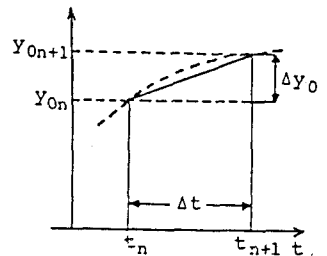


図-2 加速度の仮定

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= e^{-h\omega'(t-t_n)} \{ \cos\omega'(t-t_n) + (h\omega/\omega') \sin\omega'(t-t_n) \} \\
 a_{12} &= (1/\omega') e^{-h\omega'(t-t_n)} \sin\omega'(t-t_n) \\
 b_{11} &= [e^{-h\omega'(t-t_n)} \{ (2h^2-\gamma^2)/\gamma^4\omega^2\Delta t + (h/\gamma^2\omega) \} (1/\omega') \sin\omega'(t-t_n) + \{ (2h/\gamma^4\omega^3\Delta t) \\
 &\quad + (1/\gamma^2\omega^2) \} \cos\omega'(t-t_n)] \\
 b_{12} &= [-e^{-h\omega'(t-t_n)} \{ (2h^2-\gamma^2)/\gamma^4\omega^2\Delta t \} \sin\omega'(t-t_n) (1/\omega') + (2h/\gamma^4\omega^3\Delta t) \cos\omega'(t-t_n)] - (1/\gamma^2\omega^2) \\
 &\quad + 2h/\gamma^4\omega^3\Delta t \\
 c_1 &= (1/\gamma^2) [e^{-h\omega'(t-t_n)} \{ h\omega/\omega' \} \sin\omega'(t-t_n) + \cos\omega'(t-t_n)] - 1 \operatorname{sgn}(\dot{y}) (1-\gamma^2) \delta_y \dots\dots (6)
 \end{aligned}$$

さらに、時刻 t_{n+1} における速度および加速度は、式(5)を時間 t で1回および2回微分することによって得られ、結局時刻 t_n と t_{n+1} における応答量の漸化式として次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} y_{n+1} \\ \dot{y}_{n+1} \\ \ddot{y}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_n \\ \dot{y}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_{0n} \\ \ddot{y}_{0n+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \dots\dots (7)$$

式(7)の右辺の各係数 $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$, $\{c_i\}$ は時間刻み Δt が一定であればいずれも h, ω, γ^2 の関数であり定数項となる。また

時刻 t_{n+1} の時点には時刻 t_n における応答値 y_n, \dot{y}_n および入力加速度 $\ddot{y}_{0n}, \ddot{y}_{0n+1}$ は既知量である。したがって、式(7)を各時刻毎に計算してゆけば順次に応答が求まり、各時刻毎の繰返し計算は不要である。

3. 数値検討 Nigam-Jennings法(以下、N-J法と呼ぶ)による弾塑性応答解析結果を、Newmarkの β 法による結果と比較して検討する。表-1には、無次元化した変位応答スペクトルの一部の結果を示した。系の構造特性値は、固有周期 $T_0=0.8$ 秒、減衰定数 $h=0.05$ 、弾塑性剛性比 $\gamma^2=0.01$ とした。入力周期の異なる30種類の正弦波(振幅1.0、時間10秒、入力周期 $T^*=0.1\sim 3.0$ sec)を用いた。計算の時間刻みは $\Delta t=0.005$ 秒である。両者の応答値はほぼ一致している。また、表の最下欄にはHITAC M200Hによる演算時間(CPU time)を示したが、N-J法の場合はNewmarkの β 法に比して約1/3の時間であった。図-3は、計算の時間刻み Δt の違いによる応答計算時間の差異を比較したものである。入力は周期1.2秒の正弦波で、入力時間を50秒とした。構造特性値は前述と同様である。図から、 Δt が0.03秒より大きくなると両者の演算時間はほぼ等しく、かつ一定となることがわかる。 Δt が0.03秒より小さければN-J法の方が効率がよく、とくに $\Delta t=0.001$ 秒ではN-J法はNewmarkの β 法の約1/3になる。また、最大応答変位値は Δt にかかわらず両者はほとんど差がみられず、両者とも Δt が大きくなるにつれて最大2%程度小さくなった。

4. あとがき

表-1 変位応答スペクトルの比較

1) 本研究により、N-J法を弾塑性応答解析へ初めて拡張できた。2) 時間刻み Δt については、弾性系では T_0 の1/20であれば問題ないといわれているが、弾塑性系では T_0 の(1/25 ~ 1/30)以下が望ましい。3) 演算時間については、変位応答スペクトルの計算結果、N-J法はNewmarkの β 法の1/3ですむことが認められた。

T^* (sec)	Newmark's β method	N-J Method
0.8	0.03295	0.03292
1.0	0.04359	0.04354
1.2	0.05450	0.05442
1.4	0.06553	0.06542
1.6	0.07666	0.07648
1.8	0.08772	0.08751
2.0	0.09876	0.09848
2.2	0.10965	0.10934
CPU Time	7.05s	2.48s

$$\begin{bmatrix} \Delta t=0.005\text{sec} \\ T_0=0.8\text{sec} \end{bmatrix}$$

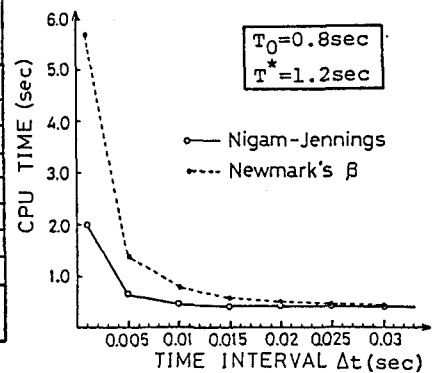


図-3 応答計算時間の比較

参考文献 1) 柴田明徳：最新耐震構造解析、森北出版、pp.111~112,1981.