

1. まえがき 時系列モデルとしては、自己回帰(AR)モデル、移動平均(MA)モデルあるいは自己回帰移動平均(ARMA)モデル等がある。この内のどのモデルを採用するかは対象により異なるが、ここではできるだけ少ない数のパラメータで表現できるモデルであると同時に、対象として取り上げる現象の生成機構を時系列で表現できるモデルが望ましい。この観点より、ここではARMAモデルを採用し、この係数を用いた非定常相互スペクトルの解析法について述べる。また、本解析法を実地震加速度記録に適用し、本解析法の妥当性を検討したものである。

2. 多次元非定常ARMAモデル 平均値0のm次元非定常確率過程  $x_i(t)$ ;  $i=1, 2, \dots, m$  に対するm次元非定常ARMAモデルを次式で定義する。

$$x_i(j) = \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} c_{ip}(k, j) x_p(j-k) + \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} h_{ip}(k, j) a_p(j-k) + a_i(j) \quad ; i=1, 2, \dots, m \quad (1)$$

ここで、 $a_i(j)$  は平均値0、時刻が異なる場合には互いに独立で、同一時刻では共分散  $\sigma_{pp}^2(j) = E[a_p(j) a_p(j)]$  を持つ帯域ホワイトノイズである。 $x_i(j)$  は  $a_i(j)$  を入力としたときのフィルター出力となっている。係数  $c_{ip}(k, j)$  および  $h_{ip}(k, j)$  は Gersch<sup>1)</sup> 他のも提案した1次元定常モデルに対する二段階最小二乗法を多次元非定常モデルに適用できるように拡張し、この方法を用いて同定した。

3. 非定常相互スペクトル 非定常相互スペクトルは屋谷<sup>2)</sup> の提案に従い次式で表わされるものとする。

$$S_{pp}(\omega, \pm) = E \left[ \frac{1}{2\pi} X_p(\omega, \pm) X_p^*(\omega, \pm) \right] \quad ; \quad \begin{array}{l} -\infty < \omega < \infty \\ -\infty < \pm < \infty \\ p=1, 2, \dots, m \quad ; \quad j=1, 2, \dots, m \end{array} \quad (2)$$

ここで、 $X_p(\omega, \pm) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\pm-u) x_p(u) e^{-i\omega u} du \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\pm) d\pm = 1 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \pm^2 d\pm = -1$

\* は共役複素数を、また  $W(\cdot)$  はウィンドウ関数(本解析ではガウス型ウィンドウを使用)を表わす。式(1)の両辺に重みつきフーリエ変換をほどこせば、

$$\begin{aligned} X_p(\omega, j) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} W(j-l) x_p(l) e^{-i\omega l \Delta t} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} W(j-l) \left\{ \sum_{r=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} c_{pr}(k, l) x_r(l-k) + \sum_{r=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} h_{pr}(k, l) a_r(l-k) + a_p(l) \right\} e^{-i\omega l \Delta t} \end{aligned} \quad (3)$$

$j$  と  $l$  が近い値をとるときには、 $c_{pr}(k, j) \cong c_{pr}(k, l)$ 、 $h_{pr}(k, j) \cong h_{pr}(k, l)$ 、また入力  $a_i(j)$  の共分散  $\sigma_{pp}^2(j)$  に対しても  $\sigma_{pp}^2(j) \cong \sigma_{pp}^2(l)$  とみなして、変数変換を行ない、上式をマトリックスの形に整理すれば、次式で示す非定常相互スペクトル  $S_x(\omega, j)$  を得る。

$$S_x(\omega, j) = \frac{\Delta t}{2\pi} C^{-1}(\omega, j) G(\omega, j) \Sigma^2(j) G^T(\omega, j) \left\{ C^*(\omega, j) \right\}^{-1} \quad ; \quad T \text{ は転置を表わす。} \quad (4)$$

ここで、 $S_x(\omega, j) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega, j) & S_{12}(\omega, j) & \dots & S_{1m}(\omega, j) \\ S_{21}(\omega, j) & S_{22}(\omega, j) & \dots & S_{2m}(\omega, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1}(\omega, j) & S_{m2}(\omega, j) & \dots & S_{mm}(\omega, j) \end{bmatrix}$ 、 $\Sigma^2(j) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2(j) & \sigma_{12}^2(j) & \dots & \sigma_{1m}^2(j) \\ \sigma_{21}^2(j) & \sigma_{22}^2(j) & \dots & \sigma_{2m}^2(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2(j) & \sigma_{m2}^2(j) & \dots & \sigma_{mm}^2(j) \end{bmatrix}$

$$C(\omega, j) = \mathbf{I} - \sum_{k=1}^{M(j)} e^{-i\omega k \Delta t} \begin{bmatrix} c_{11}(k, j) & c_{12}(k, j) & \dots & c_{1m}(k, j) \\ c_{21}(k, j) & c_{22}(k, j) & \dots & c_{2m}(k, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(k, j) & c_{m2}(k, j) & \dots & c_{mm}(k, j) \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{I} = \text{単位マトリックス}$$

$$G(\omega, j) = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{L(j)} e^{-i\omega k \Delta t} \begin{bmatrix} h_{11}(k, j), h_{12}(k, j), \dots, h_{1m}(k, j) \\ h_{21}(k, j), h_{22}(k, j), \dots, h_{2m}(k, j) \\ \vdots \\ h_{m1}(k, j), h_{m2}(k, j), \dots, h_{mm}(k, j) \end{bmatrix}$$

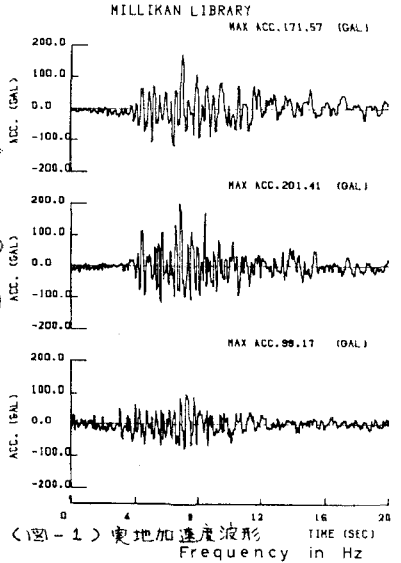
コヒーレンス関数  $\gamma_{pp}^2(\omega, t)$  および位相角  $\theta_{pp}(\omega, j)$  は次式で与えられる。

$$\gamma_{pp}^2(\omega, t) = \frac{|S_{pp}(\omega, t)|^2}{S_{pp}(\omega, t) S_{pp}^*(\omega, t)} \quad ; \quad \theta_{pp}(\omega, j) = \tan^{-1} \left\{ \frac{Q_{pp}(\omega, j)}{C_{pp}(\omega, j)} \right\}$$

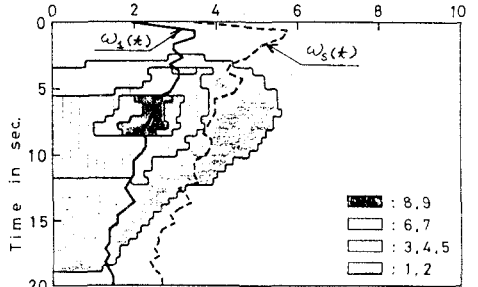
$C_{pp}(\omega, j)$ ,  $Q_{pp}(\omega, j)$  はそれぞれ  $S_{pp}(\omega, j)$  の実部および虚部を表わす。(5)

4. 数値計算例

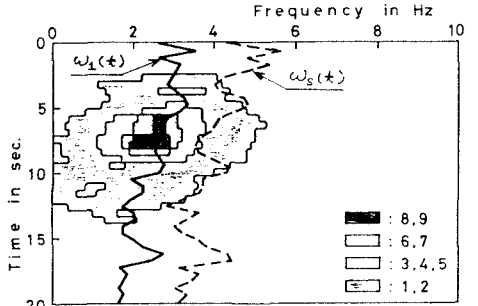
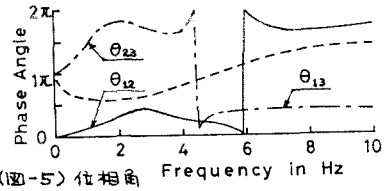
使用した地震加速度記録は図-1に示す三方向成分波(Δt=0.04秒)である。式(2)の係数は、 $M(j)=2$ ,  $L(j)=1$ 、として計算を行ない同定した。なお、約3.2秒間を区間定常と考え、この区間を0.4秒間隔で移動させて計算を行なっている。このようにして同定した係数を用いて、式(4), (5)より計算した相互スペクトルおよびコヒーレンスを図-2~4に、位相角の一例として  $t=8.3$  秒の時のものを図-5に示す。図-6はPhysicalスペクトル(周波数領域での



解析)を示す。図-2と図-6は同一の波形の非定常スペクトルを異なる手法により求めたものであるが、本手法によるスペクトル(図-2)は図-6を平滑化した形状を示しているが、非定常スペクトルの特徴は両者とも良く一致している。本手法による相互スペクトルおよびコヒーレンス等も、過去に行なわれた周波数領域での解析結果を、平滑化した形状を示すが、特徴は非常に良く対応している。この平滑化の傾向は、ARMAモデルの次数を大きくすることにより弱められるものであるが、本解析のように(2,1)次という非常に低次のモデルを使用しているにもかかわらず、非定常特性の特徴を非常に良くとらえていることが判る。以上のように、本解析法は非定常特性解析に十分利用できることが判る。また、1次元定常問題を



(図-2) 非定常スペクトル

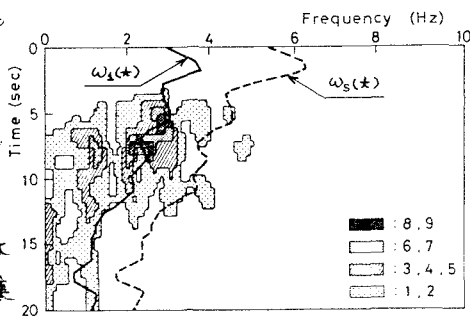


(図-3) クロス・スペクトル

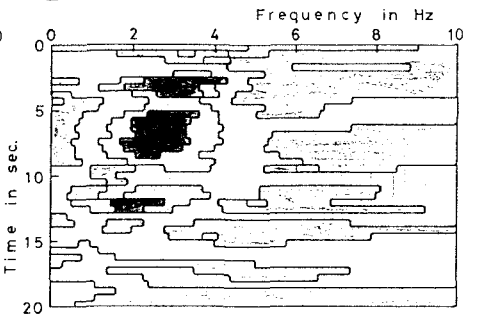
用範囲は広いものと思う。

参考文献

- 1) Gersck 他, J. of EM div. ASCE, 1976-10
- 2) 星谷: 土木学会論文報告集 1976-9



(図-6) Physical Spectrum



(図-4) コヒーレンス