

東京都立大学工学部

学生会員

○ 塩野計司

正会員

国井隆弘

## 1. まえかき

本研究は、水平な成層構造を持つ地盤層を SH 波が鉛直方向に伝播する場合を解析する為に、一次元波動方程式の差分解を用いる際の問題点について検討を加えたものである。

地震動の特性を知る事の重要性が認められる事から、SH 波の鉛直方向の伝播を対象とした研究は多く行われてきてあり、波動伝播解析の数学的手段としては、一次元波動方程式から導かれる、重複反射理論による数値計算を用いたものが多い。波動方程式を重複反射理論に変形せずに、地中の一点での地震波形を境界条件の一つにして、差分解法によって方程式を解いたものは、地盤構成物質の剛性変化に注目したものにみられる。<sup>(1),(2)</sup> 重複反射理論が、地層の境界のみに注目して組み立てられたものであるのに対し、差分解による方法が、地盤内の多くの点について計算が進められるという性質のものである為、地盤の特性(深さ方向のあらゆる点において、各々、独自のものがあろう。)を反映させての解析、あるいは、地震記録の解析から、地盤の構成物質の特性を推定しようとする目的に対して、より適当であると考えられる。

近年は、ある地点の地表と地中に地震計が設置される事が多くなり、地震の地表-地中同時記録が得られ、地震を利用しての地盤特性の推定を行なう研究もなされる様になっている。<sup>(3)</sup> 地中地震計が、波動インピーダンスの急激な変化を示す層境界面以浅に設けられている場合、地震計は、上昇波と下降波の和としての震動を記録していると考えられ、重複反射理論を適用する際に、地中地震記録を入射波形による振幅と考える事には疑問がある。波動方程式の差分解は、この点に関し、地震という現象を地下の一点における変位、速度等の量で記録した震動を方程式の境界条件の一つとする事でもとり入れる為、地震記録をそのまま用いる事ができ、便利である。

## 2. 一次元波動方程式の差分化

慣性と粘性と剛性を持つ物質を媒質とする一次元の剪断波動伝播を表わす方程式は、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (i)$$

ただし、 $u$  : 剪断変位

$x$  : 位置を示す座標、 $t$  : 時間

$\rho$  : 密度、 $c$  : 粘性係数、 $G$  : 剛性率

であるが、現在の研究では、粘性のない場合を扱っている。従って、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (ii)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (iii)$$

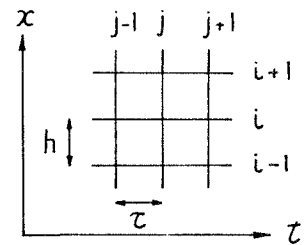


図1 差分格子

が扱う方程式である。(i)式の方程式を用いても、差分化が特に困難になるとは考えられない。

双曲形の偏微分方程式の数値解法としては、特性曲線法によるものが、物理的意味が明らかであり、計算精度が最も高いと言われるが、ここでは、直交格子による差分化を行なう事にした。

差分格子の間隔は、長さ方向に  $h$ 、時間方向に  $\tau$  とし、格子の場所は、長さについて  $i$ 、時間について  $j$  の添字を用いて示す。(図1)

一般に行われる様に、二階偏導関数を中央差分を用いて書けば、(ii)式は、

$$u_{i,j+1} = 2u_{i,j} - u_{i,j-1} + \lambda^2 (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \quad (iv)$$

$$\text{更に、} \quad \lambda = \frac{V_s \cdot \tau}{h} \quad (v)$$

の様に、陽解法が実行できる形で差分化できる。(iv)式を用いるものを、P差分化と呼ぶ。(図2)

また、(ii)式は、

$$u_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

として、

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{1}{\tau} \left\{ u_{i,j+1} - \frac{1}{2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \right\}$$

という差分化<sup>(4)</sup>を用いて、 $(\partial^2 u / \partial t^2)_{i,j}$ を書き、 $(\partial^2 u / \partial x^2)_{i,j}$ を普通の中央差分を用いて書くと、

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= 2u_{i,j} - u_{i,j-1} \\ &+ \lambda^2 (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} u_{i+1,j} - u_{i-1,j-1} \\ -2(u_{i,j} - u_{i-1,j-1}) \\ + u_{i-1,j} - u_{i-1,j-1} \end{array} \right\} \quad (vi) \end{aligned}$$

の様に差分化(陽解法)できる。(vi)式を用いるものを、L差分化と呼ぶ。(図3)

L差分式の特徴は、初期条件と変位境界条件に最も近い点(波の入射は、 $(x, t) = (0, 0)$ で行われるとすると)、 $(h, \tau)$ の変位の計算に、初期条件であり、境界条件である二点、 $(0, -\tau)$ と $(0, 0)$ における変位を用いる事であり、この事は、変位による初期条件と境界条件を与える事によって、波の先端の速度を与えらる事に相当する。P差分式では、点 $(0, 0)$ の変位 $U$ から、 $(h, \tau)$ の変位を計算している。

### 3. 自由表面の境界条件

自由表面の境界条件として、剪断応力 $\tau$ がゼロである事を探る。自由表面を表わす添字を $s$ とし、地表上 $h$ の高さまで地盤が存在するとすると、上記の境界条件は、中心差分を用いて、

$$G \frac{u_{s+1} - u_{s-1}}{2h} = 0 \quad (vii)$$

と書ける。 $u_{s+1}$ は、地表上 $h$ の高さにと、二階層の格子での変位である。波動方程式の差分式は、自由表面の位置において、

$$u_{s,j+1} = f(u_{s,j}, u_{s,j-1}, u_{s+1,j}, u_{s-1,j}, u_{s+1,j-1}, u_{s-1,j-1}, \lambda)$$

として書けるから、これと(vii)式より、 $u_{s+1}$ を消去して、自由表面における変位を計算する式が得られる。P差分化、L差分化各々の場合、

$$(P) \quad u_{s,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{s,j} - u_{s,j-1} + 2\lambda^2 u_{s+1,j} \quad (viii)$$

$$(L) \quad u_{s,j+1} = (3-2\lambda^2)u_{s,j} - 2u_{s,j-1} + (2\lambda^2+1)u_{s-1,j} - u_{s-1,j-1} \quad (ix)$$

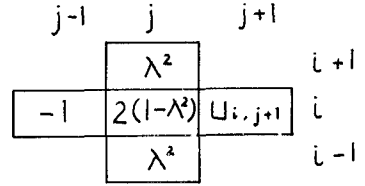


図2 P差分式の係数

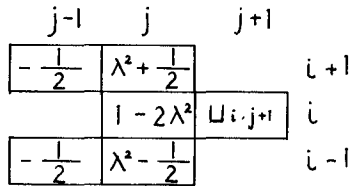


図3 L差分式の係数

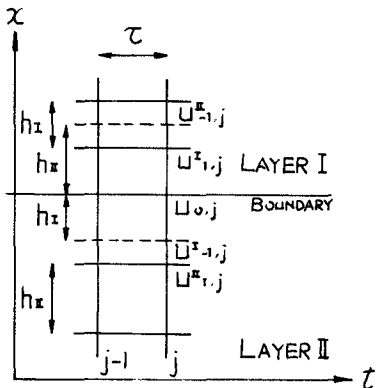


図4 層境界付近の格子

#### 4 層境界における境界条件

剪断剛性・密度の異なる二層の接す境界において、境界条件を変位と応力の連続性にとると、応力の連続を満たす様に境界における変位を決定すれば良い。

P差分化の時の、境界における変位を決定する式は、以下の様にして求められる。

各層における剛性率を  $G_I \cdot G_{II}$  として応力の連続は、図4の記号を用いて、

$$G_I \frac{U_{i,j}^I - U_{i,j}^{I-1}}{2h_I} = G_{II} \frac{U_{i,j}^{II} - U_{i,j}^{II-1}}{2h_{II}}$$

と得られ、(-1の添字で与えられる格子は境界の外側に仮想的に作られたものである。)運動方程式からの、各層側ごとの二つの差分式

$$(I \text{層側}) \quad U_{0,j+1} = 2U_{0,j} - U_{0,j-1} + \lambda_I^2 (U_{1,j}^I - 2U_{0,j} + U_{i,j}^I) \quad \lambda_I = V_{SI} \cdot \tau / h_I$$

$$(II \text{層側}) \quad U_{0,j+1} = 2U_{0,j} - U_{0,j-1} + \lambda_{II}^2 (U_{1,j}^{II} - 2U_{0,j} + U_{i,j}^{II}) \quad \lambda_{II} = V_{SII} \cdot \tau / h_{II}$$

が得られるので、以上三式より、仮想的格子における変位  $U_{1,j}^I, U_{1,j}^{II}$  を消去すると、層境界における変位を求める式

$$U_{0,j+1} = \frac{2 \{ G_I h_{II} (1 - \lambda_I^2) \lambda_{II}^2 - G_{II} h_I (1 - \lambda_{II}^2) \lambda_I^2 \}}{G_I h_I \lambda_{II}^2 - G_{II} h_{II} \lambda_I^2} U_{0,j} - U_{0,j-1} + \frac{2 G_I h_{II} \lambda_{II}^2}{G_I h_I \lambda_{II}^2 - G_{II} h_{II} \lambda_I^2} U_{1,j}^I + \frac{2 G_{II} h_I \lambda_I^2}{G_I h_I \lambda_{II}^2 - G_{II} h_{II} \lambda_I^2} U_{1,j}^{II} \quad (X)$$

を得る。

#### 5. 数値計算例

##### 5-1 モデル地盤

以上に導いてきた差分式を用いて、具体的な計算を行ない、計算精度を検討した。

モデル地盤は上下二層よりなり、上層は、厚さ 10 m を持ち、下層は無限の深さまで続くものとした。二層ともに、完全弾性体よりなり、境界における波動インピーダンス比が 1/3 であるとした。上層における剪断波速度が 100 m/sec ~ 30 m/sec の場合を検討した。

差分格子間隔は 1 m とした。

##### 5-2 モデル地震

モデル地震は、上層底面に入射波として与えた。こうする事により、重複反射理論を用いて、地表および層境界における変位の厳密解を得る事ができ、層境界における変位を方程式の境界条件として、地表における変位を数値積分の精度検討の際の真の値として利用した。

地震継続時間は 2 秒とし、地震波の読みとり間隔 — 時間方向の差分格子間隔、は実録地震記録における標準的の値と考えられる 1/100 秒を採った。入射波には 正弦波と複雑な形の波 (実録地震加速度記録) を用いた。

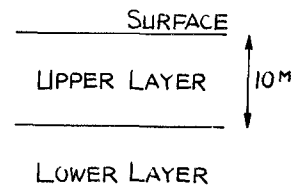


図5 モデル地盤

#### 6. 計算例の結果 ———— $\lambda$ の値と計算精度に注目して.

(v) 式に示される様に、 $\lambda = V_S \tau / h$  によって  $\lambda$  は与えられる。

$\lambda = 1$  (モデル計算では、 $V_S = 100$  m/sec.) の時、数値積分による地表における変位の解は、特別な場合を除いては、真の値に対して、1% にも満たない差を持って求められる事が確かめられた。しかし、P差分式によ

る時、 $\lambda < 1$  で  $\lambda = 1$  から離れる場合、計算精度が低下する事も認められた。 $\lambda = 0.5$  ( $V_s = 50$  m/sec.) の時の 4 CPS の正弦波入射に対する地表の震動波形を図 6 に示す。直接および反射後の入射波の先端が地表に達する時刻を矢印で示すが、この付近での波形の乱れが著しい。これは、P 差分式が、波の先端が持つ速度を計算の中に取り入れられない事に起因すると考えられる。

波動方程式の差分解法を、実地盤の解析に適用する場合には、 $V_s$ ,  $\tau$  および層厚の関係から、 $h$  を適当に選んで、 $\lambda = 1$  とする事が何時でも可能であるとは限らない。この点を考慮すると、 $\lambda < 1$  の場合の計算精度の低下の程度を知る事、あるいは、 $\lambda < 1$  に対しくより良い精度を与える差分式を作る事が重要であると考えらる。

数値積分によって得られた地表における震動波形の精度を次の様式量で表わす。

$$\alpha = \frac{\int_T (u_{sm} - u_{sm})^2 dt}{\int_T (u_{sm})^2 dt} \quad (xi)$$

ただし  $u_{sm}$  : 地表の変位・真の値  
 $u_{sm}$  : 数値積分で求めた地表の変位  
 $T$  : 計算継続時間

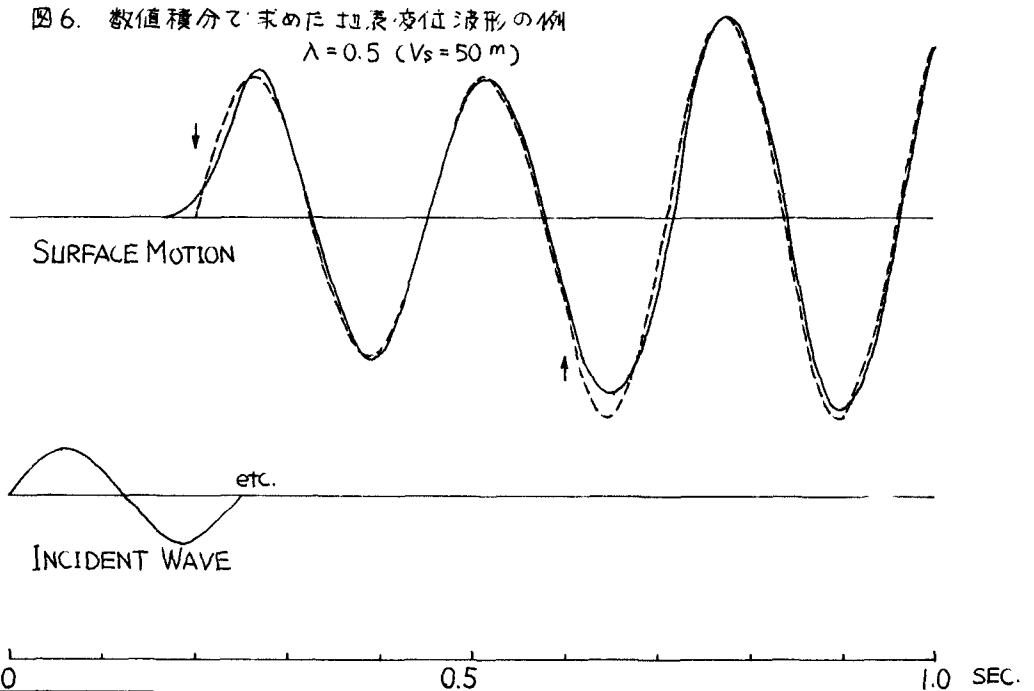
4 CPS の正弦波入射に対する、P 差分、L 差分によって求めた地表での変位について、(xi) 式の  $\alpha$  の値を求めたものを表 1 に挙げる。

$\lambda$ ( $V_s$ M/S)	0.9 (90)	0.7 (70)	0.5 (50)	0.3 (30)
P SCHEME	0.001	0.006	0.026	
L SCHEME				

$$\alpha = \frac{\int_T (u_{sm} - u_{sm})^2 dt}{\int_T (u_{sm})^2 dt}$$

表 1

複雑な入射波についても、同様の検討を実行している。また、多層構造を持つ地盤についても同様である。



文献 (1)石崎・島山(1959)弾塑性状態における横波伝播の数値計算例, 14th 土木年次. (2)岡本・伯野(1962)地盤の非線形振動に関する研究, 日本国内地震工学シンポジウム I. (3)例えば, 太田(1972)八戸市臨時地震観測点の地下構造 — 最適化の手法による推定. (4)G.D スミス(1965), 藤川(1971)電算機による偏微分方程式の解法 pp 119 - 120