

I-14 三成分地震波入力による構造物の地震応答解析について (その2)

北海道大学 正員 渡辺 昇  
 北海道大学 正員 金子 孝吉  
 北海道大学 学生員 〇岩 倉 肇

1. ま え が き

本研究は、水平動 2成分と上下動の地震波が同時に立体的に入力した場合の構造物の振動性状を扱うものである。対象とする構造物としてガスタンクなどを想定し、それを x, y, z 軸回りの回転成分も考慮した 6自由度の、剛体にモデル化して解析を行なう (図-1)。また非対称支持の円筒タンクを用いた振動実験の結果も示す (図-2)。

2. 6 自由度剛体モデルの運動方程式とその解

剛体の運動範囲を微小範囲に制限するものとすれば、慣性モーメントおよび慣性相乗積を定数とみなすことができ、また剛体の回転運動を座標 3軸回りの角変位の時間的変化で表現できる。さらに、座標軸を剛体の慣性主軸に一致させることにより慣性相乗積を消去できる。

減衰力、減衰モーメントは、それぞれ速度、角速度に比例するものとする。回転を考慮した剛体の運動方程式は、式(1)で表わされる。

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + Ku(t) = -m\ddot{g}(t) \quad (1)$$

$$m = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_\psi \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} & K_{x\theta} & K_{x\phi} & K_{x\psi} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} & K_{y\theta} & K_{y\phi} & K_{y\psi} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} & K_{z\theta} & K_{z\phi} & K_{z\psi} \\ K_{\theta x} & K_{\theta y} & K_{\theta z} & K_{\theta\theta} & K_{\theta\phi} & K_{\theta\psi} \\ K_{\phi x} & K_{\phi y} & K_{\phi z} & K_{\phi\theta} & K_{\phi\phi} & K_{\phi\psi} \\ K_{\psi x} & K_{\psi y} & K_{\psi z} & K_{\psi\theta} & K_{\psi\phi} & K_{\psi\psi} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{u}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{u}_x(t) \\ \ddot{u}_y(t) \\ \ddot{u}_z(t) \\ \ddot{u}_\theta(t) \\ \ddot{u}_\phi(t) \\ \ddot{u}_\psi(t) \end{bmatrix} \quad \dot{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{u}_x(t) \\ \dot{u}_y(t) \\ \dot{u}_z(t) \\ \dot{u}_\theta(t) \\ \dot{u}_\phi(t) \\ \dot{u}_\psi(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \\ u_z(t) \\ u_\theta(t) \\ u_\phi(t) \\ u_\psi(t) \end{bmatrix} \quad \ddot{g}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{g}_x(t) \\ \ddot{g}_y(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

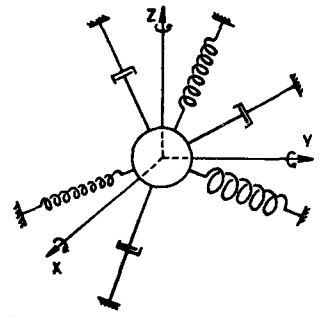


図-1

- m : 剛体の質量 ( kg · sec<sup>2</sup> / cm )
- I<sub>i</sub> : i 軸に関する慣性モーメント ( i=x,y,z : kg · sec<sup>2</sup> · cm )
- c<sub>i</sub> : 減衰係数 ( i=x,y,z : kg · sec / cm. i=θ,φ,ψ : kg · sec · cm )
- K<sub>ij</sub> : 復原係数  $\begin{bmatrix} \text{kg/cm} & \text{kg} \\ \text{kg} & \text{kg} \cdot \text{cm} \end{bmatrix}$  K<sub>ij</sub>=K<sub>ji</sub>
- u<sub>i</sub>(t) : x,y,z 方向の相対変位 ( i=x,y,z : cm )
- x,y,z 軸回りの角変位 ( i=θ,φ,ψ : rad )
- g<sub>i</sub>(t) : i 方向の地震動の加速度 ( i=x,y,z : cm / sec<sup>2</sup> )

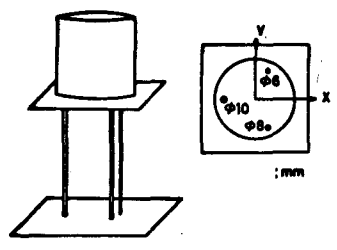


図-2

式(1)を、ゼロ初期条件のもとで Laplace変換することにより特性方程式(式(2))を得る。これを解くと 6組の共役複素根、 $\alpha_k \pm i\beta_k$  が求められる(k=1~6)。 $\alpha_k$ は減衰を、 $\beta_k$ は固有円振動数をそれぞれ表わしている。 $\alpha_k$ が負の実数の場合、その振動系は静的にも、動的にも安定であるが、正の実数の場合、静的には安定な系であるが、動的には不安定な系となる。

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} s^2 + \lambda_x s + \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} & \kappa_{x\theta} & \kappa_{x\phi} & \kappa_{x\psi} \\ \kappa_{yx} & s^2 + \lambda_y s + \kappa_{yy} & \kappa_{yz} & \kappa_{y\theta} & \kappa_{y\phi} & \kappa_{y\psi} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & s^2 + \lambda_z s + \kappa_{zz} & \kappa_{z\theta} & \kappa_{z\phi} & \kappa_{z\psi} \\ \kappa_{\theta x} & \kappa_{\theta y} & \kappa_{\theta z} & s^2 + \lambda_\theta s + \kappa_{\theta\theta} & \kappa_{\theta\phi} & \kappa_{\theta\psi} \\ \kappa_{\phi x} & \kappa_{\phi y} & \kappa_{\phi z} & \kappa_{\phi\theta} & s^2 + \lambda_\phi s + \kappa_{\phi\phi} & \kappa_{\phi\psi} \\ \kappa_{\psi x} & \kappa_{\psi y} & \kappa_{\psi z} & \kappa_{\psi\theta} & \kappa_{\psi\phi} & s^2 + \lambda_\psi s + \kappa_{\psi\psi} \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\lambda_i$  および  $\kappa_{ij}$  は、それぞれ減衰係数マトリックス、復原係数マトリックスの要素を、その要素と同じ行に存在する質量（慣性モーメント）マトリックスの要素で除したものである。

伝達関数マトリックス  $\mathbf{H}(s)$  は、 $\Delta^{-1}$  となり、その要素  $H_{ij}(s)$  およびその Laplace 逆変換である変位インパルス応答関数マトリックス  $\mathbf{h}(t)$  の要素  $h_{ij}(t)$  は、次式で表わされる。

$$H_{ij}(s) = \sum_k \frac{i\gamma_{jk}s + i\delta_{jk}}{(s - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}, \quad h_{ij}(t) = \sum_k \exp(\alpha_k t) \left\{ \frac{1}{\beta_k} (i\gamma_{jk}\alpha_k + i\delta_{jk}) \sin\beta_k t + i\gamma_{jk} \cos\beta_k t \right\} \quad (3)$$

運動方程式(式(1))を解くと、相対変位(角変位)および絶対加速度(角加速度)は、

$$\mathbf{u}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t-\tau) \ddot{\mathbf{g}}(\tau) d\tau, \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) + \ddot{\mathbf{g}}(t) = \int_0^t \ddot{\mathbf{h}}(t-\tau) \ddot{\mathbf{g}}(\tau) d\tau, \quad (h_{ij}(t) = \dot{h}_{ij}(t) = 0, t < 0) \quad (4)$$

となる。 $\ddot{\mathbf{h}}(t)$  は加速度インパルス応答関数マトリックスであり、その要素  $\ddot{h}_{ij}(t)$  は式(5)となる。

$$\ddot{h}_{ij}(t) = \sum_k \exp(\alpha_k t) \left\{ \frac{1}{\beta_k} (\alpha_k^2 - \beta_k^2) (i\gamma_{jk}\alpha_k + i\delta_{jk}) - 2i\gamma_{jk}\alpha_k\beta_k \right\} \sin\beta_k t + \left\{ i\gamma_{jk} (\alpha_k^2 - \beta_k^2) + 2\alpha_k (i\gamma_{jk}\alpha_k + i\delta_{jk}) \right\} \cos\beta_k t \quad (5)$$

次に、正弦波が入力された場合の相対変位(角変位)および相対加速度(角加速度)は、

$$\ddot{\mathbf{g}}_j(t) = a_j \sin(\omega_j t + \theta_j) \quad (6)$$

$$u_i(t) = \sum_j \sum_k \left\{ 2\exp(\alpha_k t) (A_{jk} \cos\beta_k t - B_{jk} \sin\beta_k t) / C_{jk} + 2(D_{jk} \cos\omega_j t - E_{jk} \sin\omega_j t) / F_{jk} \right\} \quad (7)$$

$$\ddot{u}_i(t) = \sum_j \sum_k \left\{ 2\exp(\alpha_k t) \left[ (A_{jk}\alpha_k^2 - A_{jk}\beta_k^2 - 2\alpha_k\beta_k B_{jk}) \cos\beta_k t + (-B_{jk}\alpha_k^2 + B_{jk}\beta_k^2 - 2\alpha_k\beta_k A_{jk}) \sin\beta_k t \right] / C_{jk} - 2\omega_j^2 \left[ D_{jk} \cos\omega_j t - E_{jk} \sin\omega_j t \right] / F_{jk} \right\} \quad (8)$$

となる。ここで

$$A_{jk} = P_{1jk} R_{1jk} + Q_{1jk} S_{1jk} \quad B_{jk} = -P_{1jk} S_{1jk} + Q_{1jk} R_{1jk} \quad C_{jk} = R_{1jk}^2 + S_{1jk}^2$$

$$D_{jk} = P_{2jk} R_{2jk} + Q_{2jk} S_{2jk} \quad E_{jk} = -P_{2jk} S_{2jk} + Q_{2jk} R_{2jk} \quad F_{jk} = R_{2jk}^2 + S_{2jk}^2$$

$$P_{1jk} = a_j \left\{ i\gamma_{jk}\alpha_k \omega_j \cos\theta_j + i\gamma_{jk} (\alpha_k^2 - \beta_k^2) \sin\theta_j + i\delta_{jk} (\omega_j \cos\theta_j + \alpha_k \sin\theta_j) \right\}$$

$$Q_{1jk} = a_j \left\{ i\gamma_{jk}\beta_k (\omega_j \cos\theta_j + 2\alpha_k \sin\theta_j) + i\delta_{jk}\beta_k \sin\theta_j \right\}$$

$$R_{1jk} = -4\alpha_k\beta_k^2 \quad S_{1jk} = 2\beta_k (\alpha_k^2 - \beta_k^2 + \omega_j^2)$$

$$P_{2jk} = a_j (-i\gamma_{jk}\omega_j^2 \sin\theta_j + i\delta_{jk}\omega_j \cos\theta_j) \quad Q_{2jk} = a_j (i\gamma_{jk}\omega_j^2 \cos\theta_j + i\delta_{jk}\omega_j \sin\theta_j)$$

$$R_{2jk} = 4\alpha_k\omega_j^2 \quad S_{2jk} = 2\omega_j (\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \omega_j^2)$$

正弦波の周期が等しい場合 ( $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$ ) の定常状態の最大絶対加速度は、次式で表わされる。

$$|\ddot{u}_i(t) + \ddot{g}_i(t)|_{\max} = \sqrt{\left( a_i \cos\theta_i + \sum_j \sum_k \frac{2\omega^2 E_{jk}}{F_{jk}} \right)^2 + \left( a_i \sin\theta_i + \sum_j \sum_k \frac{2\omega^2 D_{jk}}{F_{jk}} \right)^2} \quad (9)$$

周波数領域において、その振動系の特性を表す周波数応答関数は式(3)より、変位、加速度についてそれぞれ、式(10)、式(11)のように得られる。(j<sup>2</sup> = -1)

変位

$$H_{ij}(j\omega) = \sum_k \frac{i\delta_{jk} + (i\omega)\gamma_{jk}}{\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \omega^2 - 2i\alpha_k\omega} \quad k=1\sim 6 \quad (10)$$

加速度

$$H_{ij}(i\omega) = \sum_k \frac{-(\alpha_k^2 + \beta_k^2)(2i\gamma_{jk}\alpha_k + i\delta_{jk}) + (i\omega) \left\{ i\gamma_{jk}(3\alpha_k^2 - \beta_k^2) + 2i\delta_{jk}\alpha_k \right\}}{\alpha_k^2 + \beta_k^2 - \omega^2 - 2i\alpha_k\omega} \quad k=1\sim 6 \quad (11)$$

### 3. 数値計算例および振動実験結果

数値計算は、表-1 に示す構造諸元を有する剛体モデルについて行なった。質量および慣性モーメントについては、振動実験に用いた円筒タンクの値とほぼ同じ値とした。この剛体モデルが持つ共振点は、特性方程式を解いて、表-2 のように求められた。

図-3 は、y 方向にのみそれぞれ振動数が、(a) 3.0 Hz, (b) 3.5 Hz の正弦波を入力した場合の x, y 方向の絶対加速度の応答波形を (1) 理論的に求めた場合 (2) 実験で求めた場合 について表わしている。なお x, y 方向の加速度計の位置は、図-4 の 1 と 3 である。

図-3 (a) においては理論、実験とも入力方向(y)の応答が x 方向の応答を上回っているが、図-3 (b) では理論、実験ともその逆の結果を示している。

図-4 は、4 個の加速度計を図のように配置して振動実験を行なった結果を示している。応答波形は正弦波の振動数が 5.0 Hz の場合のものであるが z 軸回りの回転運動が現われているのがわかる。

図-5 は、y 方向にのみ正弦波を入力し、その周期を変化させたときの絶対加速度の応答倍率(定常状態)を、(a) 理論および (b) 実験 からそれぞれ求めたものである。(a) と (b) を比較すると、ある程度似た傾向があるのがわ

質量, 慣性モーメント	
$m = 2.4 \times 10^2$	
$I_x = I_y = 2.4 \times 10$	$I_z = 4.5$
減衰係数	
$C_x = C_y = 5.0 \times 10^4$	$C_z = 5.0 \times 10^4$
$C_\theta = C_\phi = 5.0 \times 10^4$	$C_\psi = 1.0 \times 10^4$
復原係数	
1.7×10	7.7
1.5×10	-7.7×10
7.7×10	5.7×10
5.7×10	-1.9×10 <sup>2</sup>
1.3×10 <sup>3</sup>	-6.6×10
-6.6×10	7.8×10
7.8×10	9.2×10
9.2×10	-2.4×10 <sup>2</sup>
sym.	1.3×10 <sup>3</sup>
	-5.2×10 <sup>2</sup>
	-5.0×10 <sup>2</sup>
	8.9×10 <sup>2</sup>
	4.0×10 <sup>4</sup>
	-1.0×10 <sup>4</sup>
	-5.7×10 <sup>2</sup>
	4.0×10 <sup>4</sup>
	-5.8×10 <sup>2</sup>
	1.6×10 <sup>4</sup>

(単位は、式(1)と同じ)

表-1 構造諸元

$T_1 = 0.027, T_2 = 0.103, T_3 = 0.138$
$T_4 = 0.199, T_5 = 0.283, T_6 = 0.354$ (sec)

表-2 共振点

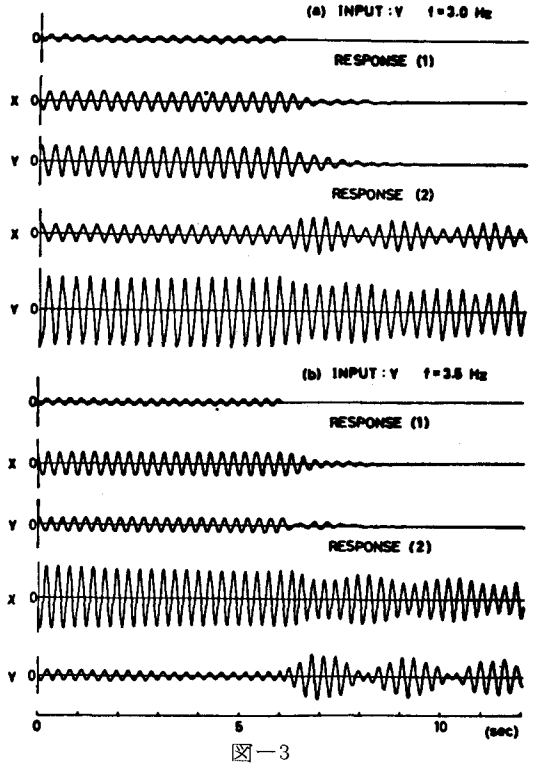


図-3

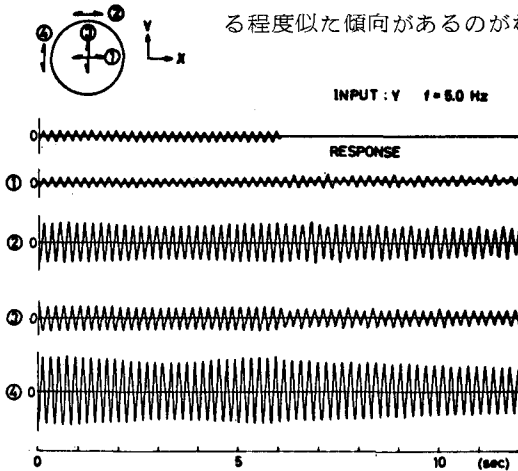


図-4

かる。

図-6 は、x 方向または y 方向に正弦波を入力した場合の角加速度の応答を示しており、x, y, z 軸回りの角加速度のうち最大値が 1 となるよう標準化したものである。角加速度については、共振点  $T_2$ 、 $T_4$  にピークがある。

次に、自然地震波が 3 方向から入力した場合の剛体モデルの挙動を調べる。地震動として 1968 年の十勝沖地震の加速度記録を用いた。

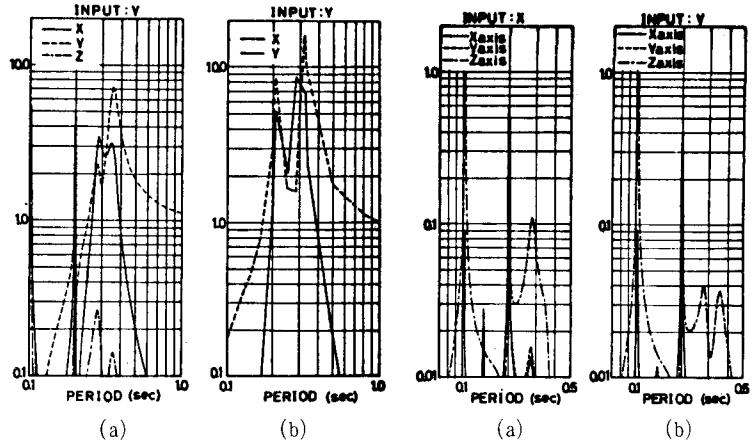


図-5

図-6

図-7 (a) は地震動の加速度、図-7 (b) は各方向の絶対加速度と、各軸回りの角加速度を示している。E W (y) 方向の最大応答値は、N S (x) 方向の最大応答値を上回っている。

図-8 は、入力加速度と応答絶対加速度のそれぞれのパワースペクトル密度から求めた応答倍率である。N S、E W 方向では、ともに共振点  $T_5$ 、 $T_6$  付近が卓越しているが、U D 方向では特に卓越した周期成分はなく、入力された地震波に近い応答を示している。

#### 4. あとがき

3 成分の入力波による構造物の応答を回転成分も考慮して立体的に解析した。さらに振動実験の結果との比較検討を行なった。

実際の、橋脚、橋台など剛体として扱うことのできる構造物についても、その構造物の特性(減衰係数、復原係数など)を充分考慮してモデル化を行なえば、解析可能である。

計算には、北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-60/75 を使用した。

(a) INPUT  
1968 Totachi-oki Earthquake  
(at Machinohe)

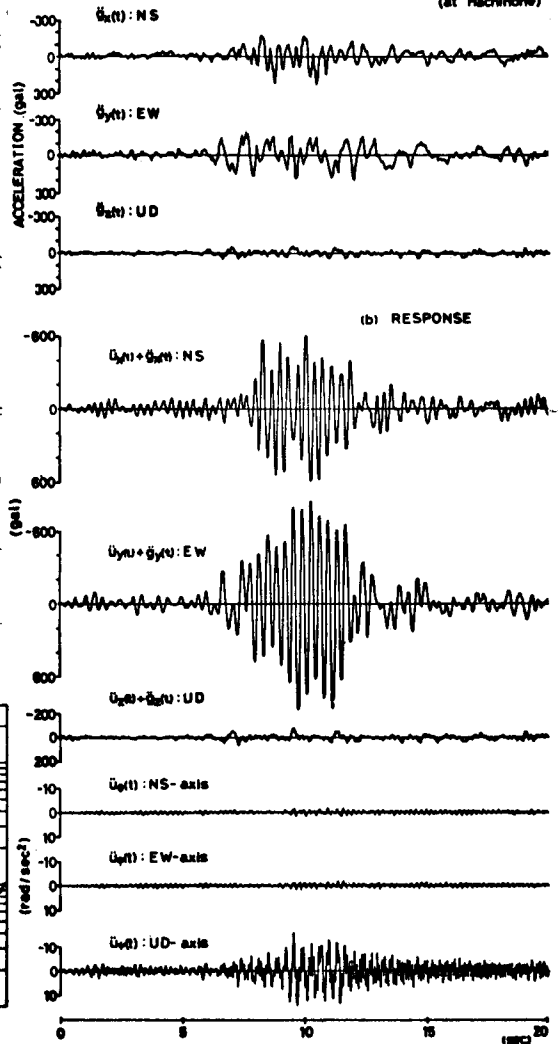


図-7

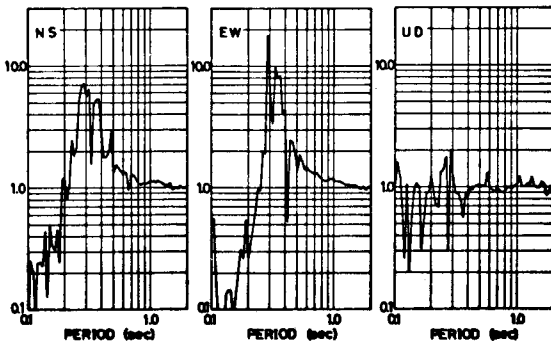


図-8