

多変数ARモデルを用いた観測記録を含む 時空間地震波形*

川上英二**・小野牧夫***

長大・地中構造物に対する入力波を、観測記録を含み波形の変形を考慮した時空間関数としてシミュレートするための方法として、これまでに筆者らは、二重フーリエ級数を用いた方法、従来の多変数の確率過程の理論を拡張する方法、多入力線形システム理論に基づく方法を展開している。本研究では、多地点の地震波形を多変数ARモデルを用いて表すという従来の無条件のシミュレーションの方法に、観測地点では観測波形に一致するという条件を追加し、無条件の波形の部分集合として表す方法を展開した。また、展開した方法の適用例を示した。

Key Words : earthquake, ground motion, simulation, underground structures

1. 序 文

トンネル、パイプライン、地中埋設管路等の地震波動の伝播に伴う動的応答解析、耐震設計を行う場合、まず、管路・地盤・基盤を力学的にモデル化し、地盤または基盤における地震動を入力する必要がある。地盤または基盤からの地震入力は、管路に沿った各点で与える必要があり、この各点での変位の時刻歴を、つまり、時間及び空間の関数としての地震波形^{2)~7)}をどのように想定するかは、管路の応答に支配的な影響を及ぼすため重要な問題である。

このような観点(参考文献8の1.序論に詳述)から、著者らは、地中線状構造物に対する地震動の時間のみでなく場所に関する変動、つまり、波動の伝播及び波形の変形、を考慮した代表的な、かつ、現実的な地震波形を作るための手法の研究が必要であると考えている。

著者らは、これまでに、二重フーリエ級数を用いる手法^{9),10)}、従来の多変数の確率過程を拡張する方法⁸⁾、多入力の線形システムの理論を用いる方法¹¹⁾を既に展開している。そして、観測記録を含む時空間地震波形をシミュレートし、一つの適用例として、Imperial Valley地震の観測記録を含む時空間関数としての地震波形を求めている。

本論文で展開する手法は、多地点の地震波形を、定常な多変数のAR (autoregressive, 自己回帰) モデルとして取り扱う従来の方法をもとにしたものである。そして、複数の観測記録が与えられている場合を想定し、これら観測記録を含む時空間関数としての地震波形をシ

ミュレートするための手法の開発を目的としている。

まず、地盤の変位を互いに相関を有する複数の確率過程と考える。この時空間確率過程は、これまでの研究^{9)~11)}と同様に次の2つの条件を満足するものと仮定する。

条件(A): 時空間確率過程と観測波形との時間に關する自己相関関数(またはパワースペクトル)は一致する。観測波形の自己相関関数と、従来の研究に基づく、地震波のみかけの伝播速度、波形の変形の程度(コヒーレンシー)とから、相互相関関数(またはクロススペクトル)を想定する。時空間確率過程の相互相関関数は、この想定した相互相関関数に一致する。

条件(B): 時空間確率過程は、多地点の観測地点においては観測波形に厳密に一致する。

この2つの条件(A)(B)を設定することは確率過程論的には次のようにも解釈できる。つまり、観測が行われないとき、無条件確率場の理論が構成される。一部観測されており、サンプル場が一部判明している時には、条件付確率場の理論となる。本論文は、この条件付確率場の1サンプルを導き出そうとするものである。

本論文では、条件(A)で与える相互相関関数を、波が正方向にある一定の速度で伝播し、また、二地点間距離が離れる程、相関が減少するような関数とした。さらに、適用例として、Imperial Valley (El Centro) 地震波形を観測波形として、いくつかのシミュレーションを行った。

なお、主に都市のサイズミック・モニタリングの立場から、既知波形を条件とする時空間地震波形のシミュレーション手法が、最近幾つか提案されている。フーリエ係数に関する条件付確率密度関数に基づく方法が盛川・亀田^{12),13)}により、またKriging手法に基づく方法が、Vanmarcke・Fenton¹⁴⁾、星谷¹⁵⁾、丸山・星谷¹⁶⁾、土岐・佐藤・清野・水谷¹⁷⁾によって提案されている。

これまでに提案されてきた方法を、条件付時空間波形

* 本論文の一部は、埼玉大学建設系研究報告(1992)、参考文献1)に発表したものである。

** 正会員 工博 埼玉大学教授 工学部建設工学科
(〒338 浦和南下大久保 255)

*** 正会員 東京ガス(株)、元埼玉大学大学院 理工学研究科
学生

のシミュレーション理論として総括すると、大きく次のように分類できる。

- (1) 各々の時空間サンプルが、条件 (A) を満足する方法
 - ①二重フーリエ級数を用いる方法^{9),10)}
- (2) 多くの時空間サンプルのアンサンプル平均が、条件 (A) を満足する方法
 - (a) 振動数領域での方法
 - ②不規則確率過程のシミュレーション理論に基づく方法⁸⁾
 - ③多入力線形システム理論に基づく方法¹¹⁾
 - ④Kriging 手法に基づく方法¹⁴⁾
 - ⑤フーリエ係数に関する条件付確率密度関数を扱う方法^{12),13)}
 - (b) 時間領域での方法
 - ⑥多変数 (両側) AR モデルを用いる方法¹⁾
 - ⑦Kriging 手法に基づく方法^{16),17)}

本論文で提案している方法は、⑥であるため、方法⑦との違いを以下に示す。

方法⑦で用いられている Kriging 手法の根本的な考えは、非観測地点の値を、観測地点の値の線形和として表すことから理論を出発させることである。例えば、参考文献 16) の式 (1) の右辺第 2 項がこれに相当するが、和は $i=1$ から N に関してとられており、 N は観測点の数である。

一方、本論文で提案している方法⑥では、非観測地点の値を、観測地点の値の線形和として表すという始まりをしてはならず、Kriging 法を全く用いていない。観測点と非観測点とを最初は区別していない。本論文の式 (1) (18) から判るように、和は $i=1$ から i (観測地点数 N ではない) に関して求めている。本論文の手法の出発点は従来の (無条件) AR モデルの式そのものである。AR の係数を決めた後に、従来の AR モデルでは、乱数を発生して波形をシミュレートしているのに対し、本方法では、一部は乱数でなく、観測点では観測記録に一致するように、乱数のサンプルを与えているのである。つまり、本方法は、Kriging 法を用いておらず、従来の無条件 AR モデルを改良し、条件を付け加える工夫を行ったものである。

2. 多変数 AR モデルによるシミュレーション理論

地点 i と時刻 t (ここで、 t は整数としても一般性を失わない。) における地盤の変位 (速度、加速度でも同様の議論が成り立つ) は、従来、互いに相関を有する平均値 0 の多変数 AR モデル $u_i(t)$ で表されている^{4),5)}。

$$u_i(t) = \sum_{p=1}^i \sum_{m=1}^M b_{ip}(m) u_p(t-m) + \varepsilon_i(t)$$

$$(i=1, 2, \dots, I) \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 I は地点数、 $\varepsilon_i(t)$ は誤差波形、 M は多変数 AR モデルの次数である。

(1) 相互相関関数を満たす時空間波形の無条件シミュレーション^{4),5)}

式 (1) を用いて時空間地震波形のシミュレーションを行う場合、係数 $b_{ip}(m)$ 、および誤差 $\varepsilon_i(t)$ を求める必要があり、まず、係数 $b_{ip}(m)$ を求める。この係数は誤差の自乗和を最小にするという条件、つまり、

$$\sum_{i=1}^I E[\varepsilon_i^2(t)] \rightarrow \min \dots \dots \dots (2)$$

より求められる。これは不偏最小誤差分散を基準として最適化を行ったことに相当する。ただし、 $E[\]$ はアンサンプル平均を表し、ここでは時間についての定常性を仮定しているため時間平均と同じである。式 (1)、(2) より、次のユール・ウォーカー方程式が誘導される。

$$R_{qi}(s) = \sum_{p=1}^i \sum_{m=1}^M b_{ip}(m) R_{pq}(m-s) \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 $q=1, 2, \dots, i, i=1, 2, \dots, I, s=1, 2, \dots, M$ である。また、 $R_{ij}(s)$ は、2 地点での変位 $u_i(t)$ と $u_j(t)$ の相互相関関数であり、

$$R_{ij}(s) = E[u_i(t)u_j(t+s)] \dots \dots \dots (4)$$

と定義している。

式 (3) をマトリックス表示すると次の連立一次方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & \dots & R_{i1} \\ R_{12} & R_{22} & \dots & R_{i2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{1i} & R_{2i} & \dots & R_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ \vdots \\ B_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1i} \\ Q_{2i} \\ \vdots \\ Q_{ii} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (5)$$

ここで、

$$R_{pq} = \begin{bmatrix} R_{pq}(0) & R_{pq}(1) & \dots & R_{pq}(M-1) \\ R_{pq}(-1) & R_{pq}(0) & \dots & R_{pq}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{pq}(1-M) & R_{pq}(2-M) & \dots & R_{pq}(0) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (6)$$

$$B_{ip} = \{b_{ip}(1), b_{ip}(2), \dots, b_{ip}(M)\}^T \dots \dots \dots (7)$$

$$Q_{qi} = \{R_{qi}(1), R_{qi}(2), \dots, R_{qi}(M)\}^T \dots \dots \dots (8)$$

結局、式 (5) の連立一次方程式を $i=1, \dots, I$ について解くことにより、係数 $b_{ip}(m)$ 、($i=1, 2, \dots, I, p=1, 2, \dots, i, m=1, 2, \dots, M$) を決定することができる。

次に、誤差 $\varepsilon_i(t)$ をシミュレートする。係数 $b_{ip}(m)$ が式 (5) (7) により決定されるとき、誤差 $\varepsilon_i(t)$ は次のような性質をもつことが、式 (3) を用いて誘導できる。

$$E[\varepsilon_i(t)\varepsilon_j(t)] = R_{ij}(0) - \sum_{p=1}^i \sum_{m=1}^M b_{ip}(m) R_{pj}(m) \dots \dots \dots (9)$$

$$E[\varepsilon_i(t)\varepsilon_j(t-s)] = 0 \quad (s=1, \dots, M) \dots\dots(10)$$

$$E[\varepsilon_i(t)u_j(t-s)] = 0 \quad (s=1, \dots, M) \dots\dots(11)$$

これらの性質を満たす誤差 $\varepsilon_i(t)$ は次式により作成することができる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \\ \vdots \\ \varepsilon_I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & & & \mathbf{0} \\ c_{21} & c_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{I1} & c_{I2} & \dots & c_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_I(t) \end{bmatrix} \dots\dots(12)$$

ここで、 $\xi_i(t)$ は平均値=0, 分散=1 のガウス分布に従う乱数である。また、右辺の右下三角マトリックスは誤差 $\varepsilon_i(t)$ の共分散マトリックスを次式のように分解して与えられる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{1I}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2I}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{I1}^2 & \sigma_{I2}^2 & \dots & \sigma_{II}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & & & \mathbf{0} \\ c_{21} & c_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{I1} & c_{I2} & \dots & c_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{1I} \\ & c_{22} & \dots & c_{2I} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & c_{II} \end{bmatrix} \dots\dots(13)$$

ただし、 $\sigma_{ij}^2 = \sigma_{ji}^2 = E[\varepsilon_i(t)\varepsilon_j(t)]$ であり、式 (9) により与えられる。

(2) 観測地点で観測記録に一致する時空間波形

シミュレートする時空間地震波形は、観測地点において与えられた観測記録に一致しなければならない。いま、 N 地点において与えられている観測記録 $F_i(t)$, ($i=1, \dots, N$) は、多変数 AR モデル $u_i(t)$, ($i=1, \dots, N$) のサンプルであると考え、つまり、

$$u_i(t) = F_i(t) \quad (i=1, \dots, N) \dots\dots(14)$$

とする。このとき、上式を満足する誤差 $\varepsilon_i(t)$, ($i=1, \dots, N$) は、式 (1), 式 (14) より、

$$\varepsilon_i(t) = F_i(t) - \sum_{p=1}^i \sum_{m=1}^M b_{ip}(m) F_p(t-m) \dots\dots(15)$$

となる。式 (12), (15) より、乱数 $\xi_i(t)$, ($i=1, \dots, N$) が次式により求まる値である場合、定常 AR モデル $u_i(t)$, ($i=1, \dots, N$) のサンプルは、観測記録 $F_i(t)$, ($i=1, \dots, N$) と一致する。

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \varepsilon_1(t)/c_{11} \\ &= [F_1(t) - \sum_{m=1}^M b_{11}(m) F_1(t-m)]/c_{11} \\ \xi_i(t) &= [\varepsilon_i(t) - \sum_{p=1}^{i-1} c_{ip} \xi_p(t)]/c_{ii} \\ &= [F_i(t) - \sum_{p=1}^i \sum_{m=1}^M b_{ip}(m) F_p(t-m) \\ &\quad - \sum_{p=1}^{i-1} c_{ip} \xi_p(t)]/c_{ii} \quad (i=2, \dots, N) \dots\dots(16) \end{aligned}$$

結局、本手法により観測記録を含む時空間地震波形の

シミュレーションを行う場合には、式 (16) より $\xi_i(t)$, ($i=1, \dots, N$) を順次求め、残りの $\xi_i(t)$, ($i=N+1, \dots, I$) を乱数として発生させることになる。無条件シミュレーションの場合には、式 (12) ですべての $\xi_i(t)$, ($i=1, \dots, I$) を乱数として発生させたことを考えあわせると、条件付シミュレーションの場合には、無条件シミュレーションの場合の部分集合を求めていることがわかる。

3. 多変数両側 AR モデルによるシミュレーション理論

本節では、地点 i と時刻 t (t は整数) における地盤の変位を、平均値 0 の次の時系列モデル $u_i(t)$ で表す。

$$u_1(t) = \sum_{m=-M}^{-1} b_{11}(m) u_1(t+m) + \varepsilon_1(t) \dots\dots(17)$$

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{m=-M}^M b_{ip}(m) u_p(t+m) \\ &\quad + \sum_{m=-M}^{-1} b_{ii}(m) u_i(t+m) + \varepsilon_i(t) \quad (i=2, \dots, I) \end{aligned} \dots\dots(18)$$

ここで、 I は地点数、 $\varepsilon_i(t)$ は誤差、 M はモデルの次数である。

式 (17) は、従来の AR モデルであるが、式 (18) は既に計算されている波形 $u_p(t+m)$, ($p=1, 2, \dots, i-1$) については過去の値だけでなく、現在および未来の値をも考慮している点で前節の多変数 AR モデルの場合と異なっている。このモデルをここでは「多変数両側 AR モデル」と呼ぶことにする。

本来 AR モデルは、過去の幾つかの値を用いて現在または未来の値を予測するモデルではあるが、本シミュレーションの場合のように、他の地点の未来の値も使用できる場合には、拡張して使用してもかまわないと考えている。両側 AR モデルでは、時間に関する対称性をより満足しているため、波動の伝播方向によっては、少ない係数でより滑らかな結果が得られる傾向にある。

(1) 相互相関関数を満たす時空間波形の無条件シミュレーション

式 (17), 式 (18) で表される時系列モデルを用いてシミュレーションを行う場合、係数 $b_{ip}(m)$, および誤差 $\varepsilon_i(t)$ を求める必要がある。

まず、 $i=1$ の場合の係数 $b_{11}(m)$ と誤差 $\varepsilon_1(t)$ を求める。式 (17) の両辺に $u_1(t+s)$ を掛けて、アンサンブル平均を求めると次式になる。

$$\begin{aligned} E[u_1(t+s)u_1(t)] &= \sum_{m=-M}^{-1} b_{11}(m) E[u_1(t+s)u_1(t+m)] \\ &\quad + E[u_1(t+s)\varepsilon_1(t)] \\ &\quad (s=-M, \dots, -1) \dots\dots(19) \end{aligned}$$

ただし、 $E[]$ はアンサンブル平均を表し、ここで

は時間平均と同じである。式 (19) において、 $u_1(t+s)$ と $\varepsilon_1(t)$ が独立であることを仮定できるので、

$$R_{11}(-s) = \sum_{m=-M}^{-1} b_{11}(m) R_{11}(m-s) \dots \dots \dots (20)$$

式 (20) を $s=-M, \dots, -1$ についてまとめると次の連立一次方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} R_{11}(M) \\ R_{11}(M-1) \\ \vdots \\ R_{11}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}(0) & R_{11}(1) & \dots & R_{11}(M-1) \\ R_{11}(-1) & R_{11}(0) & \dots & R_{11}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{11}(-M+1) & R_{11}(-M+2) & \dots & R_{11}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}(-M) \\ b_{11}(-M+1) \\ \vdots \\ b_{11}(-1) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (21)$$

式 (21) より係数 $b_{11}(m)$, ($m=-M, \dots, -1$) を求めることができる。

係数 $b_{11}(m)$ が、式 (21) より決定される場合、誤差 $\varepsilon_1(t)$ の分散は、以下のように求めることができる。

式 (17) の両辺に $u_1(t)$ を掛けて、アンサンブル平均を求めると次式となる。

$$E[u_1(t)u_1(t)] = \sum_{m=-M}^{-1} b_{11}(m) E[u_1(t)u_1(t+m)] + E[u_1(t)\varepsilon_1(t)] \dots \dots \dots (22)$$

上式と式 (17) より、誤差 $\varepsilon_1(t)$ の分散は、

$$\sigma_{\varepsilon_1}^2 = E[\varepsilon_1^2(t)] = R_{11}(0) - \sum_{m=-M}^{-1} b_{11}(m) R_{11}(m) \dots \dots \dots (23)$$

となる。上式の分散を有する誤差 $\varepsilon_1(t)$ は次式で作成す

ることができる。

$$\varepsilon_1(t) = \sqrt{\sigma_{\varepsilon_1}^2} \cdot \xi_1(t) \dots \dots \dots (24)$$

ここで、無条件シミュレーションの場合には、 $\xi_1(t)$ は平均値=0、分散=1 のガウス分布に従う乱数である。

次に、 $i \geq 2$ の場合の係数と誤差を求める。式 (18) の両辺に $u_q(t+s)$ を掛けて、アンサンブル平均を求めると次式となる。

$$E[u_q(t+s)u_i(t)] = \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{m=-M}^M b_{ip}(m) E[u_q(t+s)u_p(t+m)] + \sum_{m=-M}^{-1} b_{ii}(m) E[u_q(t+s)u_i(t+m)] + E[u_q(t+s)\varepsilon_i(t)] \dots \dots \dots (25)$$

上式で $u_q(t+s)$ と $\varepsilon_i(t)$ が独立であることを仮定できるので、

$$R_{qi}(-s) = \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{m=-M}^M b_{ip}(m) R_{qp}(m-s) + \sum_{m=-M}^{-1} b_{ii}(m) R_{qi}(m-s) \dots \dots \dots (26)$$

また、式 (18) の両辺に $u_i(t+s)$ を掛けて、アンサンブル平均を求めると次式となる。

$$E[u_i(t+s)u_i(t)] = \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{m=-M}^M b_{ip}(m) E[u_i(t+s)u_p(t+m)] + \sum_{m=-M}^{-1} b_{ii}(m) E[u_i(t+s)u_i(t+m)] + E[u_i(t+s)\varepsilon_i(t)] \dots \dots \dots (27)$$

上式で $u_i(t+s)$ と $\varepsilon_i(t)$ が独立であることを仮定できるので、

$$R_{ii}(-s) = \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{m=-M}^M b_{ip}(m) R_{ip}(m-s) + \sum_{m=-M}^{-1} b_{ii}(m) R_{ii}(m-s) \dots \dots \dots (28)$$

式 (26)、式 (28) をまとめてマトリックス表示すると次の連立一次方程式を得る。

$$\{R_{1i}(M) \dots R_{1i}(-M) | \dots | R_{i-1,i}(M) \dots R_{i-1,i}(-M) | R_{ii}(M) \dots R_{ii}(1)\}^T = \begin{bmatrix} R_{11}(0) & \dots & R_{11}(2M) & \dots & R_{1,i-1}(0) & \dots & R_{1,i-1}(2M) & \dots & R_{1i}(0) & \dots & R_{1i}(-1+M) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{11}(-2M) & \dots & R_{11}(0) & \dots & R_{1,i-1}(-2M) & \dots & R_{1,i-1}(0) & \dots & R_{1i}(-2M) & \dots & R_{1i}(-1-M) \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ R_{i-1,i-1}(0) & \dots & R_{i-1,i-1}(2M) & \dots & R_{i-1,i-1}(0) & \dots & R_{i-1,i-1}(2M) & \dots & R_{i-1,i}(0) & \dots & R_{i-1,i}(-1+M) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{i-1,i-1}(-2M) & \dots & R_{i-1,i-1}(0) & \dots & R_{i-1,i-1}(-2M) & \dots & R_{i-1,i-1}(0) & \dots & R_{i-1,i}(-2M) & \dots & R_{i-1,i}(-1-M) \\ R_{ii}(0) & \dots & R_{ii}(2M) & \dots & R_{ii}(0) & \dots & R_{ii}(2M) & \dots & R_{ii}(0) & \dots & R_{ii}(-1+M) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{ii}(-M+1) & \dots & R_{ii}(M+1) & \dots & R_{ii}(-M+1) & \dots & R_{ii}(M+1) & \dots & R_{ii}(-M+1) & \dots & R_{ii}(0) \end{bmatrix} \cdot \{b_{11}(-M) \dots b_{11}(M) | \dots | b_{i,i-1}(-M) \dots b_{i,i-1}(M) | b_{ii}(-M) \dots b_{ii}(-1)\}^T \dots \dots \dots (29)$$

上の連立一次方程式を $i=2, \dots, I$ について解くことにより、係数 $b_{ip}(m)$ を求めることができる。

係数 $b_{ip}(m)$ が、上式により決定される場合、誤差 $\varepsilon_i(t)$ の分散は、以下のように求めることができる。

式 (18) の両辺に $u_i(t)$ を掛けて、アンサンブル平均を求めると次式となる。

$$E[u_i(t)u_i(t)] = \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{m=-M}^M b_{ip}(m) E[u_i(t)u_p(t+m)] + \sum_{m=-M}^1 b_{ii}(m) E[u_i(t)u_i(t+m)] + E[u_i(t)\varepsilon_i(t)] \dots (30)$$

上式と式 (18) より、誤差 $\varepsilon_i(t)$ の分散は、

$$\sigma^2_{\varepsilon_i} = E[\varepsilon_i^2(t)] = R_{ii}(0) - \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{m=-M}^M b_{ip}(m) R_{ip}(m) - \sum_{m=-M}^1 b_{ii}(m) R_{ii}(m) \dots (31)$$

となる。上式の分散を有する誤差 $\varepsilon_i(t)$ は次式で作成することができる。

$$\varepsilon_i(t) = \sqrt{\sigma^2_{\varepsilon_i}} \cdot \xi_i(t) \dots (32)$$

ここで、無条件シミュレーションの場合には、 $\xi_i(t)$ は平均値=0、分散=1 のガウス分布に従う乱数である。

以上のように、係数 $b_{ip}(m)$ 、および誤差 $\varepsilon_i(t)$ を求めることにより、無条件の時空間地震波形をシミュレートすることができる。

(2) 観測地点で観測記録に一致する時空間波形

(1) で展開した時系列モデルを用いて、観測地点において与えられた観測記録に一致するような時空間地震波形をシミュレートする方法を以下に展開する。

いま、 N 地点において与えられている観測記録 $F_i(t)$ 、($i=1, \dots, N$) は、時系列モデル $u_i(t)$ 、($i=1, \dots, N$) のサンプルであると考え、つまり、

$$u_i(t) = F_i(t) \quad (i=1, \dots, N) \dots (33)$$

とする。このとき、上式を満足する誤差 $\varepsilon_i(t)$ 、($i=1, \dots, N$) は、式 (17)、(18) より、

$$\varepsilon_1(t) = F_1(t) - \sum_{m=-M}^1 b_{11}(m) F_1(t+m) \dots (34)$$

$$\varepsilon_i(t) = F_i(t) - \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{m=-M}^M b_{ip}(m) F_p(t+m) - \sum_{m=-M}^1 b_{ii}(m) F_i(t+m) \quad (i=2, \dots, N) \dots (35)$$

となる。即ち、 $\xi_i(t)$ 、($i=1, \dots, N$) が乱数でなく、式 (34) (35) から求まる $\varepsilon_i(t)$ を用いて次式 (式 (24)、(32) による) により求まる値である場合には、 $u_i(t)$ 、($i=1, \dots, N$) は、観測記録 $F_i(t)$ 、($i=1, \dots, N$) とそれぞれ一致することがわかる。

$$\xi_i(t) = \varepsilon_i(t) / \sqrt{\sigma^2_{\varepsilon_i}} \dots (36)$$

結局、観測地点において観測記録に一致する時空間地震波形のシミュレーションを行う場合には、無条件シミュレーションの場合と異なり、上式より $\xi_i(t)$ 、($i=1, \dots, N$) を求め、残りの $\xi_i(t)$ 、($i=N+1, \dots, I$) を乱数として発生させればよいことがわかる。条件付シミュレーションが無条件シミュレーションの部分集合となっていることが理解できる。

4. 時空間地震波形の相互相関関数の想定

本論文では、参考文献 (8) の場合と同様にして、変形しながら伝播する波動のクロススペクトル $S_{XT}(x_0, \omega)$ を、振動数 $|\omega|$ と伝播時間 $|x_0|/c$ 、(c : 地震波の地表面に沿うみかけの伝播速度) の積の関数である $A(|\omega||x_0|/c)$ を用いて次式のように表せるものと仮定した。

$$S_{XT}(x_0, \omega) = S_T(\omega) \exp(-i\omega x_0/c) A(|\omega||x_0|/c) \dots (37)$$

上式の $S_T(\omega)$ はパワースペクトルである。また、関数 $A(\quad)$ はコヒーレンシーとよばれているものであり、石井の研究⁽⁸⁾に基づき、

$$A(|\omega||x_0|/c) = \exp\{-\alpha|\omega||x_0|/(2\pi c)\} \dots (38)$$

と仮定した。ここで、 α は波形の変形しやすさの程度を表すパラメーターであり、これを変形定数と呼んでいる⁽⁸⁾⁻⁽¹¹⁾。 $\alpha=0$ は波形が変形しない場合を表しており、 α が大きい程、二地点の波形の相関は減少する。

クロススペクトルが式 (37) で表される時、相互相関関数 $R^0_{XT}(x_0, \tau)$ はクロススペクトルを逆フーリエ変換して、

$$R^0_{XT}(x_0, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XT}(x_0, \omega) \exp(i\omega\tau) d\omega = 2 \sum_{n=1}^{\infty} S_T(\omega_n) \Delta\omega \cdot \exp\{-\alpha|\omega_n||x_0|/(2\pi c)\} \cdot \cos\{\omega_n(\tau - x_0/c)\} \dots (39)$$

で、求める事ができる。ただし、上式中の $S_T(\omega_n) \Delta\omega$ は、観測波形 $F(t)$ を次式のようにフーリエ級数に展開し、

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)\} \dots (40)$$

係数 a_n 、 b_n 、($n=1, \dots, \infty$) を用いると次式、

$$S_T(\omega_n) \Delta\omega = \frac{(a_n^2 + b_n^2)}{4} \quad (n=1, \dots, \infty) \dots (41)$$

のように求まる。

5. 計算手順のまとめ

本論文で提案した多変数 AR モデル、または、多変数両側 AR モデルを用いた観測記録を含む時空間地震波形のシミュレーションの方法は、以下の手順にまとめられる。ただし、多変数両側 AR モデルを使用する場合の式の番号は [] 中に示してある。

① 観測波形を式 (40) のように、フーリエ級数に展

開し、フーリエ係数を求める。

- ② 時系列モデル $u_i(t)$ の番号 i と地点との関係を設定する。
- ③ みかけの伝播速度 c , 変形定数 α を想定し, 式 (39), 式 (41) により相互相関関数を求める。
- ④ 式 (5) [式 (21) (29)] の連立一次方程式を解くことにより, $b_{ip}(m)$ を求める。
- ⑤ 式 (9) により, 誤差の共分散マトリックスを求め, 式 (13) のように分解する。[式 (23) (31) により誤差の分散を求める。]
- ⑥ 式 (16) [式 (34) (35) (36)] により, $\xi_i(t)$ ($i=1, \dots, N$) を求める。
- ⑦ $\xi_i(t)$ ($i=N+1, \dots, I$) を平均値=0, 分散=1 のガウス分布に従う乱数として発生させる。
- ⑧ 式 (12) [式 (24) (32)] により, 誤差 $\epsilon_i(t)$ をシミュレートする。
- ⑨ 式 (1) [式 (17) (18)] により, 時空間地震波形をシミュレートする。

6. 数値計算結果

観測波形には, Imperial Valley 地震 (1940年5月18日, マグニチュード7.1) の El Centro の地点で観測された南北方向の図-1 に示す変位記録¹⁹⁾ (最大値=10.9 cm) を観測波形として使用した。

波形をシミュレートする地点は, 地点間の距離が 400 m で, 0 km 地点から 12 km 地点まで直線上に並んだ合計 31 地点とした。

(1) 想定した相互相関関数

想定する相互相関関数は, 観測記録をフーリエ級数に展開し, 波動のみかけの伝播速度と変形定数を想定して式 (39)~(41) で求めることができる。図-2 は, 波動の伝播速度を $c=1000$ m/sec, 変形定数を $\alpha=0.2 \times 2\pi$ とした場合 (例-1), 図-3 は $c=1000$ m/sec, $\alpha=0.1 \times 2\pi$ の場合 (例-2), 図-4 は, $c=2000$ m/sec, $\alpha=0.2 \times 2\pi$ の場合 (例-3) である。図中の太線 $R^0_{xT}(0, \tau)$ は, 図-1 の観測波形の自己相関関数である。以下には, 観測地点が 1~3 地点の場合に対して, 多変数両側 AR モデルを用いてシミュレーションを行った結果を示す。

(2) 観測地点が 1 地点の場合

まず, 観測地点が 1 地点で得られている場合を想定し, 0 km 地点を観測地点とした。想定した相互相関関数 (図-2~図-4) それぞれに対し, シミュレートした時空間地震波形を図-5, 7, 9 に示す。図中の太線で示すように, 時空間波形は, 0 km 地点において, 観測波形 (図-1) と一致しており 1. の条件 (B) を満足していることが確認できる。

伝播速度が同じで変形定数が違う波形サンプル (図-

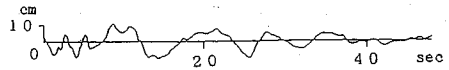


図-1 Imperial Valley 地震 (1940) の観測波形

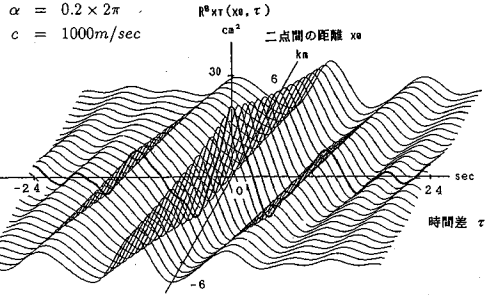


図-2 想定した相互相関関数 $R^0_{xT}(x_0, \tau)$ (例-1)

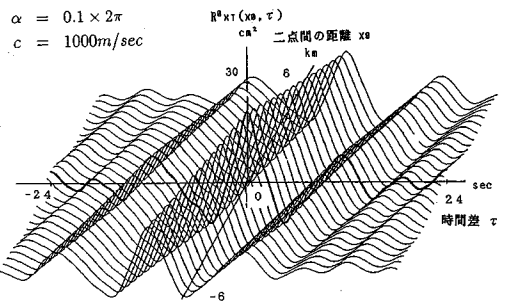


図-3 想定した相互相関関数 $R^0_{xT}(x_0, \tau)$ (例-2)

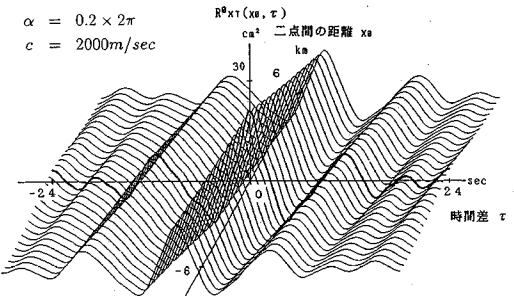


図-4 想定した相互相関関数 $R^0_{xT}(x_0, \tau)$ (例-3)

5 と図-7) を比較すると, 波動の伝播に伴う波形の変形の程度が異なっている様子がわかる。また, 変形定数が同じで伝播速度が違う波形サンプル (図-5 と図-9) を比較すると, 波形のピークの伝播の速度が異なっている様子がわかる。

また, シミュレートした一組の時空間地震サンプル波形の相互相関関数を求めると, 図-6, 図-8, 図-10 となり, 想定した相互相関関数 (図-2~図-4) に近似的なものになっている。

(3) 観測地点が 2 地点の場合

観測地点が 2 地点で得られている場合を想定し, 0 km 地点と 12 km 地点を観測地点とした。ただし, 12 km 地点の観測記録には, 0 km 地点の観測記録から別に

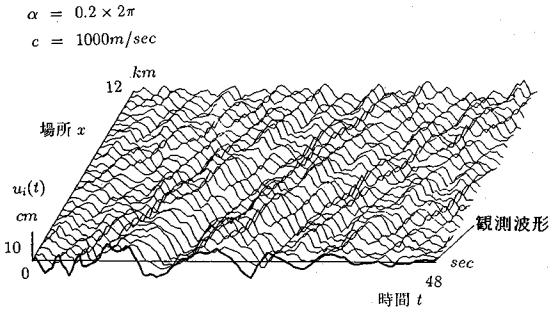


図-5 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$
 (観測地点数=1, 例-1)

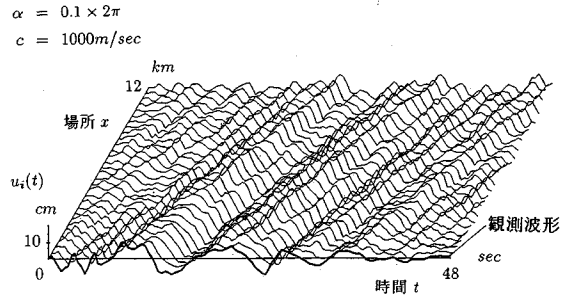


図-7 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$
 (観測地点数=1, 例-2)

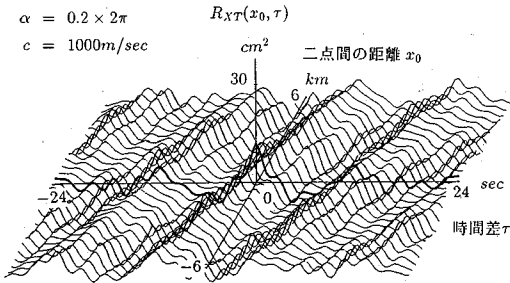


図-6 波形サンプル(図-5)の相互相関関数 $R_{XT}(x_0, \tau)$ (観測地点数=1, 例-1)

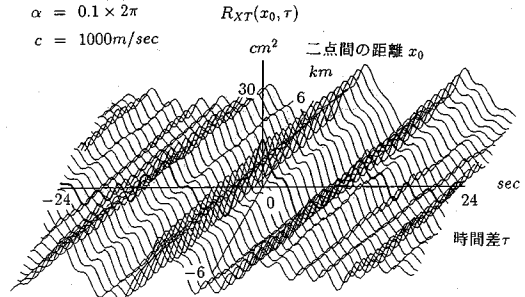


図-8 波形サンプル(図-7)の相互相関関数 $R_{XT}(x_0, \tau)$ (観測地点数=1, 例-2)

シミュレートしたものを用いている。

想定した相互相関関数(図-2~図-4)それぞれに対し、シミュレートした時空間地震波形を図-11, 13, 15に示す。また、シミュレートした時空間地震波形の相互相関関数を求めると図-12, 14, 16となる。波形サンプルおよび相互相関関数に関して(2)と同様な考察が可能である。

(4) 観測地点が3地点の場合

観測地点が3地点で得られている場合を想定し、0 km地点と12 km地点と6 km地点を観測地点とした。ただし、6 km地点と12 km地点の観測記録には、0 km地点の観測記録から別にシミュレートしたものを用いている。

想定した相互相関関数(図-2~図-4)それぞれに対し、シミュレートした時空間地震波形を図-17, 図-19, 図-21に示す。また、シミュレートした時空間地震波形の相互相関関数を求めると図-18, 20, 22となる。波形サンプルおよび相互相関関数に関して(2)(3)と同様な考察が可能である。

以上の数値計算において、シミュレートした時空間地震波形の相互相関関数は、想定した相互相関関数に近似してはいるが、良く一致しているわけではない。設計に用いる時空間波形の作成に当たっては、幾つかのシミュレーションを行い、相互相関関数の近似度の良いものを使用する必要があると考える¹⁾。

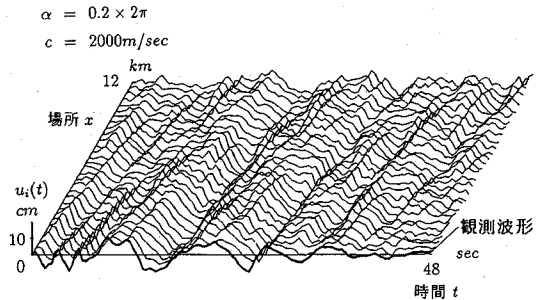


図-9 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$
 (観測地点数=1, 例-3)

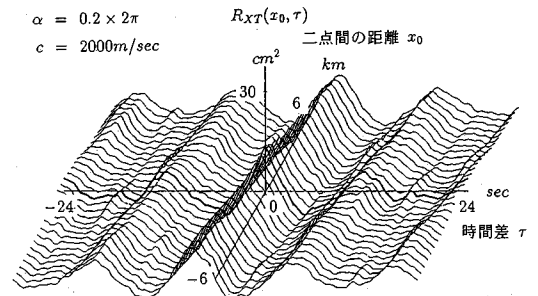
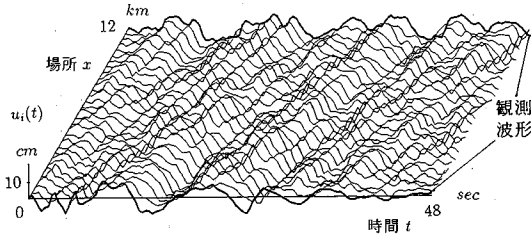


図-10 波形サンプル(図-9)の相互相関関数 $R_{XT}(x_0, \tau)$ (観測地点数=1, 例-3)

7. 結 論

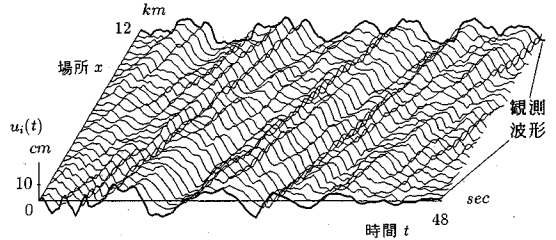
地震波動の伝播に伴う埋設管路の挙動を検討する際、

$\alpha = 0.2 \times 2\pi$
 $c = 1000m/sec$

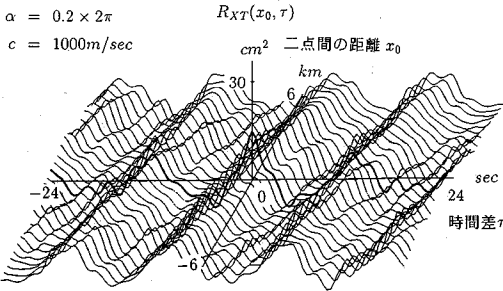


図—11 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$
 (観測地点数=2, 例—1)

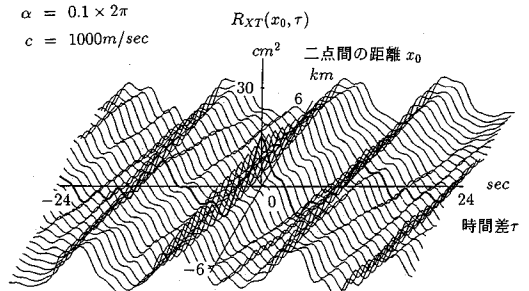
$\alpha = 0.1 \times 2\pi$
 $c = 1000m/sec$



図—13 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$
 (観測地点数=2, 例—2)



図—12 波形サンプル (図—11) の相互相関関数 $R_{XT}(x_0, \tau)$ (観測地点数=2, 例—1)



図—14 波形サンプル (図—13) の相互相関関数 $R_{XT}(x_0, \tau)$ (観測地点数=2, 例—2)

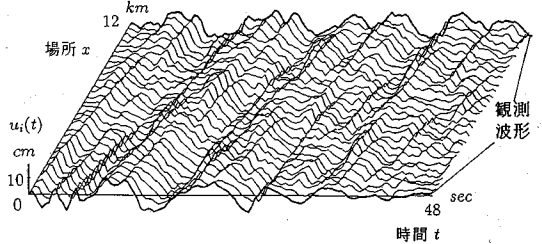
地震入力の時刻歴を管路に沿った各点でどのように与えるかが重要な問題である。本研究の目的は、観測地点においては観測された強震記録を正確に満足する、時間と場所との連続的な時空間関数としての地盤変位を合理的にシミュレートする事である。

地盤の変位を、埋設管路に沿った場所と時間とに関する時空間確率過程とし、1. の条件 (A) (B) を満足するものと仮定した。

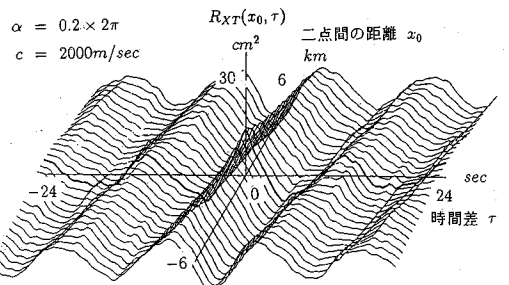
本論文では、多地点の地震波形を多変数 AR モデルを用いて表すという従来の無条件のシミュレーションの方法に、観測地点では観測波形に一致するという条件を追加する方法を展開した。無条件シミュレーションの場合には、式 (12) (32) ですべての $\xi_i(t)$, ($i=1, \dots, I$) を乱数として発生させたのに対し、条件付シミュレーションの場合には、式 (15) (16), 式 (34)~(36) により観測地点数分の $\xi_i(t)$, ($i=1, \dots, N$) を求め、残りの $\xi_i(t)$, ($i=N+1, \dots, I$) を乱数として発生させれば良いことがわかった。そして、条件付シミュレーションの場合には、無条件シミュレーションの場合の部分集合を求めていることが示された。

次に、一つの適用例として、Imperial Valley 地震を観測波形として与え、波が正方向に伝播し、また、二地点間距離が離れる程、相関が減少するような相互相関関数を想定し、時空間関数としての波形をシミュレートした。そして、得られた時空間波形が、観測地点において

$\alpha = 0.2 \times 2\pi$
 $c = 2000m/sec$



図—15 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$
 (観測地点数=2, 例—3)



図—16 波形サンプル (図—15) の相互相関関数 $R_{XT}(x_0, \tau)$ (観測地点数=2, 例—3)

は観測波形を満足している事を示した。

また、シミュレートされた時空間地震波形から得られる自己または相互相関関数が、想定した自己または相互

$\alpha = 0.2 \times 2\pi$
 $c = 1000\text{m/sec}$

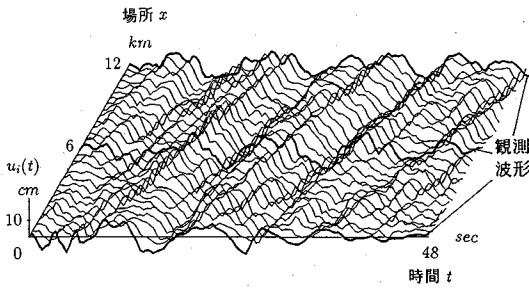


図-17 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$ (観測地点数=3, 例-1)

$\alpha = 0.2 \times 2\pi$
 $c = 1000\text{m/sec}$

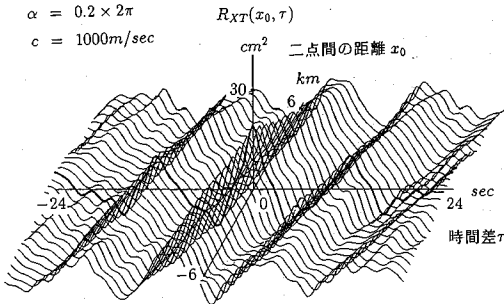


図-18 波形サンプル (図-17) の相互相関関数 $R_{XT}(x_0, \tau)$ (観測地点数=3, 例-1)

相関関数に近似的であることを示した。

謝辞：本研究をまとめるにあたり埼玉大学工学部渡辺啓行先生に貴重な御助言を頂きました。記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 川上英二・小野牧夫：多変数ARモデルを用いた観測記録を含む時空間地震波形のシミュレーション，埼玉大学工学部建設系研究報告，Vol. 22, pp. 115~127, 1992.
- 2) Tsuchida, H. and Iai, S.: Observation of earthquake response of ground with horizontal and vertical seismometer arrays (2nd report), 第5回日本地震工学シンポジウム, pp. 169~176, 1980.
- 3) Naganuma, T., Deodatis, G. and Shinozuka, M.: ARMA model for two-dimensional processes, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 113, No. 2, pp. 234~251, 1987.
- 4) 星谷勝・石井清・栗田博昭：空間時間分布特性を有する地震動シミュレーション，土木学会論文集，No. 386/I-8, pp. 359~367, 1987.
- 5) Hoshiya, M. and Chiba, T.: Simulation methods of multi-dimensional nonstationary stochastic processes by time domain models, 土木学会論文集，No. 296, pp. 121~130, 1980.
- 6) 原田隆典・篠塚正直：表層地盤の確率応答と地震動の空間-時間パワースペクトル，第19回地震工学研究発表会講演概要，pp. 33~36, 1987.

$\alpha = 0.1 \times 2\pi$
 $c = 1000\text{m/sec}$

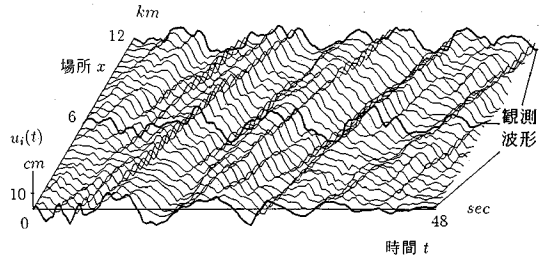


図-19 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$ (観測地点数=3, 例-2)

$\alpha = 0.1 \times 2\pi$
 $c = 1000\text{m/sec}$

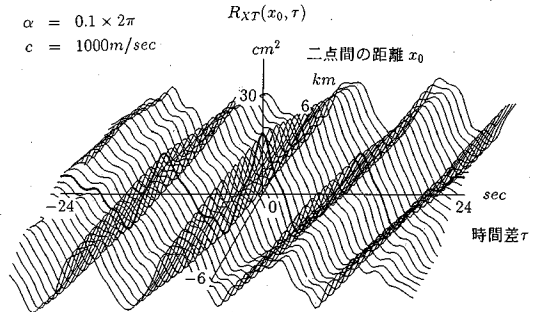


図-20 波形サンプル (図-19) の相互相関関数 $R_{XT}(x_0, \tau)$ (観測地点数=3, 例-2)

$\alpha = 0.2 \times 2\pi$
 $c = 2000\text{m/sec}$

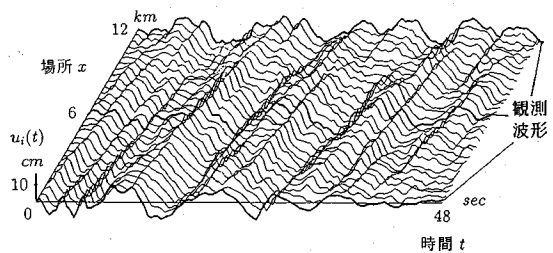


図-21 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$ (観測地点数=3, 例-3)

$\alpha = 0.2 \times 2\pi$
 $c = 2000\text{m/sec}$

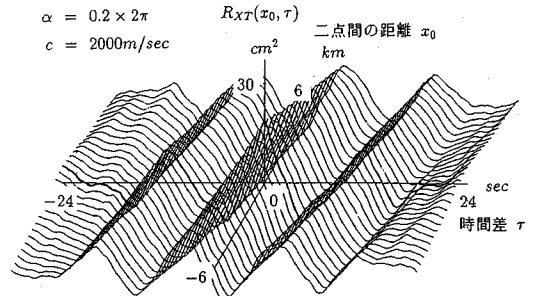


図-22 波形サンプル (図-21) の相互相関関数 $R_{XT}(x_0, \tau)$ (観測地点数=3, 例-3)

- 7) Harada, T. and Shinozuka, M.: Stochastic analysis of seismic ground motions in space and time, Proc., 9WCEE, pp. II-825~830, 1988.

- 8) 川上英二・小野牧夫：一地点での観測記録を用いた時空間地震波形のシミュレーション，土木学会論文集，No. 441，pp.167～175，1992.
- 9) 川上英二：一地点の観測記録を含む地震波形の時空間関数のシミュレーション，土木学会論文集，No. 410/I-12，pp. 435～443，1989.
- 10) 川上英二：Imperial Valley 地震の観測記録を含む時空間関数としての地震波形のシミュレーション，第 8 回日本地震工学シンポジウム，pp. 1311～1316，1990.
- 11) 小野牧夫・川上英二：多地点での観測記録を用いた時空間地震波形のシミュレーション，土木学会第 47 回年次学術講演会，I-636，pp. 1446～1447，1992.
- 12) 盛川仁・亀田弘行：既知波形を条件とした確率波のシミュレーション，土木学会第 46 回年次学術講演会，I-356，pp. 750～751，1991.
- 13) 盛川仁・亀田弘行：既知波形を含む条件付確率場のシミュレーション理論，都市耐震センター研究報告，京都大学防災研究所，1991.
- 14) Vanmarcke, E.H. and Fenton.G.A. : Conditioned simulation of local fields of earthquake ground motion, *Structural Safety*, Vol.10, 1991.
- 15) 星谷勝：確率場の条件付きシミュレーションに関する考察，土木学会第 47 回年次学術講演会，I-341，pp.858～859，1992.
- 16) 丸山収・星谷勝：定常均一場の条件付き地震波動シミュレーション，土木学会第 47 回年次学術講演会，I-342，pp. 860～861，1992.
- 17) 土岐憲三・佐藤忠信・清野純史・水谷治弘：非均質な確率場を考慮した時空間波形のシミュレーション，土木学会第 47 回年次学術講演会，I-340，pp. 856～857，1992.
- 18) 石井清：確率論手法による地震波の入力損失の効果の検討，第 16 回地震工学研究発表会講演概要，pp. 317～320，1981.
- 19) Hudson, D. et al. : Strong motion earthquake accelerograms, digitized and plotted data, EERL 71-50, California Institute of Technology, 1971.
- 20) 川上英二・小野牧夫：多入力線形システム理論に基づく観測記録を含む時空間地震波形，土木学会論文集，No. 489，1994.

(1993. 5. 24 受付)

CONDITIONAL SIMULATION OF SPACE-TIME VARIATION OF EARTHQUAKE GROUND MOTION BY USING A MULTIVARIABLE AUTOREGRESSIVE MODEL

Hideji KAWAKAMI and Makio ONO

Records of strong motion are often used as the ground motion inputs in earthquake analysis and in the design of structures. The design of underground structures, however, requires more than just the time history at any particular point on the earth's surface. It also requires the space-time variation of the ground motion. We have therefore developed a multivariable autoregressive method for generating a simulated space-time variation that includes strong ground motions recorded at observation points. This simulated variation is characterized by an apparent velocity and by a coherence function. Here we presented a case study using motion recorded during the 1940 Imperial Valley earthquake.