

# 構造物の塑性座屈モードの局所化による 変形能の低下と繰り返し荷重下の挙動

後藤芳顯\*・川西直樹\*\*・鳥羽保行\*\*\*・  
小畑誠\*\*\*\*

鋼構造物の耐震性を損なう原因の一つとして、弾塑性座屈モードの局所化による変形能の低下があると考えられる。本論文では、この現象の理論的アプローチ手法の枠組みを示すとともに、2種類の構造物を対象に繰り返し载荷条件下の挙動を解析し、基本的な力学特性を検討した。その結果、繰り返し荷重下では単調载荷の場合に比べ、材料のバウシinger効果や残留変形の蓄積により局所化現象が促進され、大幅な変形能低下につながる可能性があることが明らかとなった。

**Key Words** : plastic buckling, localization, ductility, cyclic loading, seismic design

## 1. まえがき

近年、地震等の動的荷重を受ける構造物の安全性を吸収エネルギーの観点から把握しようという動きが、土木構造の分野においても盛んである<sup>1)~3)</sup>。この場合、構造物の強度のみならず、最大耐力到達後の挙動を含めたいわゆる変形能を正確に評価することが必要となる。変形能を支配する一つの要因としては構造物内での塑性化の進行形態を挙げることができる。すなわち一般には、構造物内での塑性化が均一に進行する場合には良好な変形能を示し、逆に塑性化が局所的に集中して起こる場合には変形能は低下すると考えられる。このような塑性化が集中する原因の一つとして塑性座屈モードの局所化に起因するものが実験などにより観察されている。例えば、圧縮板や等間隔に支持された柱等において、座屈直後に周期性等の対称性を有する初期座屈波形が生ずる場合、载荷を進めるとこの波形のうちある特定の部分に塑性変形が集中する現象がこれに相当する。鋼構造物の変形能を向上させるには、塑性変形の局所化を防ぐことが重要となるが、座屈モードの局所化現象のメカニズムを理論的に検討した研究は非常に少なく、著者らの知る範囲では、NeedlemanとTvergaard<sup>4)</sup>によるものがあるにすぎない。この研究では座屈モードの局所化現象は構造物のつり合い主径路上にある第1分岐点での分岐座屈モードが周期性等の何らかの対称性を持つ場合、分岐経路上で最大荷重到達後の荷重減少経路上に存在する第2分岐点により生ずる(図-1)こと、およびこの局所化現象が構造物の最大耐力低下に及ぼす影響は初期不整のある構

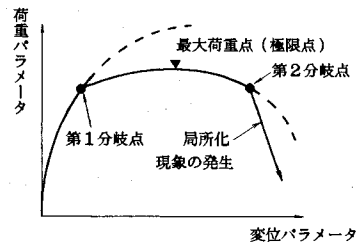


図-1 座屈モードの局所化が生ずる構造物のつり合い経路

造物においても小さいこと等が簡単なモデルを用いて明らかにされた。しかしながら、その後、このテーマについては、座屈モードの局所化が構造物の最大耐力低下に及ぼす影響が小さく実用面での重要性は少ないといった認識から扱われておらず、構造物の変形能低下に与える影響の観点からはほとんど論じられていない。さらに、地震荷重を対象とする場合は、繰り返し荷重下における座屈モードの局所化と変形能との関係を明らかにする必要があるが、これに関する理論的アプローチも全く行われていない。また、上記のNeedlemanらの解析法自体も必ずしも十分なものではない。すなわち、彼らは座屈モードの局所化現象を初期不整を与えた不完全構造系を対象に、しかも変形が比較的小さいことを前提に解析している。したがって、厳密な意味では第2分岐点での弾塑性分岐解析は行われておらず、また小変形の仮定が導入されているため構造物の変形能を評価する上で重要な最大荷重到達後の後座屈領域での大変形挙動の解析精度は不十分である。

以上のような現状認識のもとに、ここでは座屈モードの局所化現象による構造物の変形能の低下を正確に把握するために、まず多自由度離散系の第2分岐点での弾塑性分岐現象を厳密に解析するための定式化を行う。すでに著者らはHillの分岐の条件<sup>5),6)</sup>を多自由度離散系の単調増加荷重下での弾塑性分岐挙動の解析に適用するた

\* 正会員 工博 名古屋工業大学教授 工学部 社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

\*\* 正会員 工修 本州四国連絡橋公団

\*\*\* 学生員 名古屋工業大学大学院 工学部 社会開発工学科

\*\*\*\* 正会員 Ph. D. 名古屋工業大学助教授 工学部 社会開発工学科

め、接線剛性方程式を用いて書き表している<sup>8),9)</sup>。しかしながら、この条件式は座屈モードの局所化が生ずる荷重減少経路上での分岐解析には適用できないため、本論文では、変位制御型の条件式へ書き換えを行うことで、より一般性のある弾塑性分岐挙動の解析手法を提示する。このとき、座屈モードの局所化による大変形挙動も扱えるように、幾何学的非線形性は厳密に考慮する。

つぎに、提示した解析手法を用い座屈モードの局所化が生ずる基本的な例として、等間隔に支持された多点支持柱ならびに、圧縮されるトラスをとり上げる。そして、単調荷重条件下ならびに地震荷重を想定した繰り返し荷重条件下の座屈モードの局所化現象を解析し、変形能の低下の観点から考察を加える。

## 2. 荷重減少経路上での多自由度離散系の弾塑性分岐挙動の解析

ここで、解析の対象となる塑性座屈モードの局所化現象は図-1に示すように、第2分岐点での弾塑性分岐に起因する。したがってこの現象を厳密に扱うためには、弾塑性分岐問題として解析する必要がある。弾性座屈モードの局所化が生ずる第2分岐点での分岐は荷重のピーク点到達後の荷重減少経路で生ずるのが特徴的である。著者らは、すでにHillの分岐の条件<sup>9)</sup>に基づき、多自由度離散系の荷重増加経路からの弾塑性分岐挙動を剛性法により解析する手法を提示している<sup>9)</sup>が、この手法をそのまま荷重減少経路上で生ずる分岐現象の解析に適用することはできない。したがって、ここでは、すでに示した荷重制御型の分岐の条件式を変位制御型に変換することで上記のような分岐現象の解析にも対応できる、より一般性のある弾塑性分岐挙動の解析手法の定式化を行う。

多自由度離散系構造システムの増分変位成分を制御成分 $\Delta C$ と非制御成分 $\Delta \bar{D}$ とにそれぞれ分けて接線剛性方程式を表現すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{K} & \Delta \bar{K} \\ \Delta \bar{K}^T & \Delta \bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{D} \\ \Delta C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta R \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、離散系の自由度を $n$ 、制御変位成分の数を $q$ とした場合、 $\Delta \bar{K}$ は $(n-q) \times (n-q)$ の行列、 $\Delta \bar{K}^T$ は $(n-q) \times q$ の行列、 $\Delta \bar{K}$ は $q \times q$ の行列になる。 $\Delta R$ は制御変位増分に対応する $q$ 個の成分から成る未知反力増分ベクトルである。

式(1)を分解し総和規約を用いて表すと次のようになる。

$$\Delta \bar{K}_{ij} \Delta \bar{D}_j + \Delta \bar{K}_{ik} \Delta C_k = 0 \dots\dots\dots (2a)$$

$$\Delta \bar{K}_{mj} \Delta \bar{D}_j + \Delta \bar{K}_{mk} \Delta C_k = \Delta R_m \dots\dots\dots (2b)$$

変位制御問題で分岐が生ずる場合、同じ増分変位ベクトル

$\Delta C$ に対し、基本経路(f)ならびに分岐経路(b)について式(2a)が同時に成立する。

$$\Delta \bar{K}_{ij}^f \Delta \bar{D}_j^f + \Delta \bar{K}_{ik}^f \Delta C_k = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\Delta \bar{K}_{ij}^b \Delta \bar{D}_j^b + \Delta \bar{K}_{ik}^b \Delta C_k = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここに、上添字 $f, b$ はそれぞれ主経路ならびに分岐経路に関するものであることを示す。式(3)、(4)をもとに、文献<sup>8),9)</sup>の手法と同様に離散系に関する接線剛性を用いた分岐の条件式を誘導する。まず、式(3)と(4)の差をとり、両辺に $\Delta \bar{D}_i^f - \Delta \bar{D}_i^b$ を乗じ変形すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = & (\Delta \bar{D}_i^f - \Delta \bar{D}_i^b) \Delta \bar{K}_{ij}^f (\Delta \bar{D}_j^f - \Delta \bar{D}_j^b) \\ & + (\Delta \bar{D}_i^f - \Delta \bar{D}_i^b) (\Delta \bar{K}_{ij}^b - \Delta \bar{K}_{ij}^f) \Delta \bar{D}_j^b \\ & + (\Delta \bar{D}_i^f - \Delta \bar{D}_i^b) (\Delta \bar{K}_{ik}^b - \Delta \bar{K}_{ik}^f) \Delta C_k = 0 \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

式(5)の右辺第2項と第3項の和を $\Delta \Pi_2$ とすると式(1)より、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_2 = & ((\Delta \bar{D}^b - \bar{D})^T (\Delta \bar{C} - \Delta \bar{C})^T) \\ & \times \begin{bmatrix} \Delta \bar{K}^b - \Delta \bar{K}^f & \Delta \bar{K}^b - \Delta \bar{K}^f \\ (\Delta \bar{K}^b - \Delta \bar{K}^f)^T & \Delta \bar{K}^b - \Delta \bar{K}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{D}^b \\ \Delta C \end{bmatrix} \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで式(1)の左辺を総和規約により $\Delta \bar{K}_{ij} \Delta \bar{D}_j$ と表すと式(6)は以下のように表現される。

$$\Delta \Pi_2 = (\Delta \bar{D}_i^f - \Delta \bar{D}_i^b) (\Delta K_{ij}^b - \Delta K_{ij}^f) \Delta \bar{D}_j^b \dots\dots\dots (7)$$

式(7)を式(5)に代入すると下記の式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = & (\Delta \bar{D}_i^f - \Delta \bar{D}_i^b) \Delta \bar{K}_{ij}^f (\Delta \bar{D}_j^f - \Delta \bar{D}_j^b) \\ & + (\Delta \bar{D}_i^f - \Delta \bar{D}_i^b) (\Delta K_{ij}^b - \Delta K_{ij}^f) \Delta \bar{D}_j^b \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

さらに、分岐点からの変位増分に対し、除荷の場合も負荷剛性をとると仮定するComparison solids<sup>9)</sup>としての構造系の接線剛性 $\Delta K_{ij}^b$ を導入して式(8)を同値変換すると次式のようなになる。

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = & (\Delta \bar{D}_i^f - \Delta \bar{D}_i^b) \Delta \bar{K}_{ij}^f (\Delta \bar{D}_j^f - \Delta \bar{D}_j^b) \\ & + (\Delta \bar{D}_i^f - \Delta \bar{D}_i^b) \{ (\Delta K_{ij}^b - \Delta K_{ij}^f) \Delta \bar{D}_j^b \\ & + (\Delta K_{ij}^b - \Delta K_{ij}^f) \Delta \bar{D}_j^b \} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

また、式(9)はベルヌーイ・オイラー梁やトラス部材等一軸応力状態から成る構造物を対象とすると以下のようにも書き表される。

$$\Delta \Pi = (\Delta \bar{D}_i^f - \Delta \bar{D}_i^b) \Delta \bar{K}_{ij}^f (\Delta \bar{D}_j^f - \Delta \bar{D}_j^b) + \sum_{e=1}^n \Delta \mu_e \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mu_e = & \int_0^{L_e} \int_{A_e} (\Delta \epsilon_e^b - \Delta \epsilon_e^f) \{ (E_e^f - E_e^f) \Delta \epsilon_e^f \\ & + (E_e^f - E_e^f) \Delta \epsilon_e^b \} dA dz \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ここに $\int_{A_e}$ は部材 $e$ の断面全体に、また $\int_0^{L_e} dz$ は部材 $e$ の全長 $L_e$ にわたってそれぞれ積分することを意味している。 $\sum_{e=1}^n$ は当該構造系の全部材に対して総和をとるこ

とを示している。

式 (5) から分かるように、分岐が生ずる場合には式 (10) で  $\Delta \Pi = 0$  が成立する。したがって、ここでは式 (10) をもとに、分岐が生ずるための条件について考察する。

まず、式 (10) の第 2 項  $\Delta \mu_e$  のとりうる値について検討する。弾塑性体の接線剛性とひずみ増分とは、互いに関係しているので、負荷剛性と除荷剛性との差を考慮し、起こりうるすべての場合について調べると以下のような関係が成立する。

- I  $E_f' = E_f^b = E_f^c \Leftrightarrow \Delta \epsilon_e^c \geq 0$  かつ  $\Delta \epsilon_e^b \geq 0$
- II  $E_f' = E_f^c < E_f^b \Leftrightarrow \Delta \epsilon_e^c \geq 0$  かつ  $\Delta \epsilon_e^b \leq 0$
- III  $E_f' = E_f^b > E_f^c \Leftrightarrow \Delta \epsilon_e^c \leq 0$  かつ  $\Delta \epsilon_e^b \leq 0$
- IV  $E_f' > E_f^b = E_f^c \Leftrightarrow \Delta \epsilon_e^c \leq 0$  かつ  $\Delta \epsilon_e^b \geq 0$

..... (12 a-d)

式 (12) の関係より、式 (10) の第 2 項の被積分関数はいずれの場合にも負になることはなく、 $\Delta \mu_e \geq 0$  となる。これより、分岐が生ずるためには、式 (10) の第 1 項の  $\Delta K_{ij}^b$  に関する 2 次形式は負か少なくとも零となる必要がある。つぎに、このような条件が最初に満足される場合を行列  $\Delta \tilde{K}_{ij}^b$  に関して考察する。 $\Delta K_{ij}^b$  が初期状態で正値対称であることと、 $\Delta K_{ij}^b$  の  $(n-q) \times (n-q)$  成分に関する小行列が  $\Delta \tilde{K}_{ij}^b$  であることを考慮すると、 $\Delta \tilde{K}_{ij}^b$  も初期状態とこれから続く荷重増加経路上では正値対称である。また、分岐後荷重が上昇する Shanley 型の分岐経路上においても、 $\Delta K_{ij}^b$  は正値対称で  $\Delta \tilde{K}_{ij}^b$  も先に述べたのと同様の理由で正値対称となる。さらに、小行列  $\Delta \tilde{K}_{ij}^b$  は接線剛性行列  $\Delta K_{ij}^b$  と異なり、分岐経路上に存在する極限点を越え荷重減少経路に至っても Snap back が生じなければ正値対称のままである。以上から、 $\Delta \tilde{K}_{ij}^b$  の値が連続的に変化することを前提とすると、分岐後の荷重減少経路上に存在する第 2 分岐点での分岐がはじめて可能となる条件は、式 (10) の第 1 項と第 2 項が同時に零となることである。この条件は、式 (10) の第 1 項の 2 次形式が変位制御下の行列  $\Delta \tilde{K}_{ij}^b$  を用いて記述されていることを除くと文献 8), 9) で述べた荷重増加経路からの分岐に関するものと全く同様である。本事実、接線剛性行列の代わりに変位制御下の行列  $\Delta \tilde{K}_{ij}^b$  を用いることで、荷重減少経路上の分岐を含めたより広範囲の弾塑性分岐を、文献 8), 9) の荷重増加経路からの分岐解析の手法とほぼ同様にして扱えることを示唆している。すなわち、式 (10) をもとにした文献 8), 9) と同様の議論により、分岐経路上の最初の分岐点では以下の条件を満足することが必要となる。

$$\det[\Delta \tilde{K}_{ij}^b] = 0 \text{ かつ } \Delta \bar{D}_i^b - \Delta \bar{D}_j^b = C \Delta \bar{D}_i^b \text{ ..... (13 a, b)}$$

ここに、 $\Delta \bar{D}_i^b$  は  $\Delta \tilde{K}_{ij}^b$  の零固有値に対する固有ベクトル、また式 (13 b) の定数  $C$  は弾塑性分岐の場合は、分岐

の瞬間、構造物中において除荷も負荷も生じない中立状態と負荷状態しか発生しないという条件から値が決定される。

以上からわかるように、減少経路上の分岐点は式 (13 a) により特定され、分岐方向の変位増分ベクトル  $\Delta \bar{D}_i^b$  は式 (13 b) によって与えられる。

なお、ここで示した変位制御による解析手法は周知のように Snap back の現象が生ずる場合には適用できない。ただ現実の載荷条件はほぼ荷重制御が変位制御であるので、静的な Snap back 現象は生じず、動的な飛び移り現象が生ずることとなる。さらに弾塑性体と異なり、塑性体では履歴依存性があるので Snap back の生ずる経路を静的に解析してもその結果の物理的意味は少ないものと考えられる。

### 3. 数値計算例に基づく座屈モードの局所化現象による変形能の低下と繰返し荷重下の挙動の検討

#### (1) 概要

座屈モードの局所化現象が生ずる基礎的な例として、軸力を受ける等間隔に支持された多点支持柱とトラスを取り上げる。

等間隔の多点支持柱は、Needleman ら<sup>9)</sup>が初期たわみを与えたモデルについてその極限点挙動を解析した例である。ここでは、まず、同様の問題を本論文で提案した手法により第 2 分岐点での厳密な弾塑性分岐問題として解析し、Needleman らの結果との比較検討を行う。さらに繰返し軸力下の座屈モードの局所化についても解析し、その特性を調べる。

トラスについては、今回はじめて解析を行ったものである。ここでは同じ骨組配置のトラスが同一の圧縮強度を持つ場合でも、部材断面の配分の差により座屈モードの局所化による変形能の低下傾向がどのように変化するかを単調載荷条件下ならびに繰返し載荷条件下について検討する。

#### (2) 多点支持柱

##### a) 解析モデル

多点支持柱の解析モデルとしては図-2 に示すような 5 径間の等間隔に支持された構造の強軸回りの面内挙動を対象とする。

材料構成則としては移動硬化を考慮した Dafalias-Popov の Bounding surface model<sup>11)</sup>を用いる。Bounding surface model によると、塑性接線剛性  $E_p$  は次のように現される。

$$E_p = E_0 + h \frac{\delta}{\delta_{in} - \delta} \text{ ..... (14)}$$

ここに、 $E_0$  は境界線の勾配、 $\delta$  は当該状態から境界線までの距離、 $\delta_{in}$  は各載荷プロセス開始時の  $\delta$  の値、 $h$

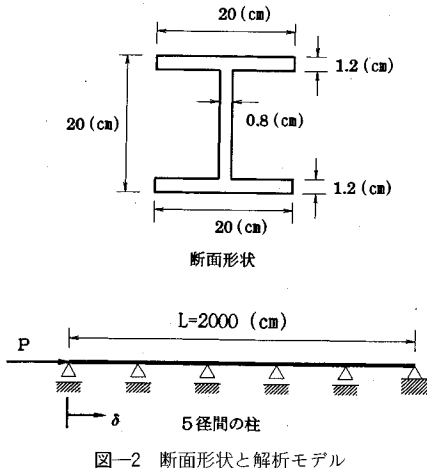


図-2 断面形状と解析モデル

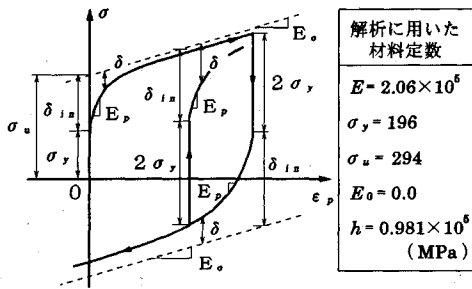


図-3 材料の構成則

は硬化形状係数を表す。各変数の定義と解析で用いた具体的な値を図-3に示す。

b) 解析方法

解析では、図-2に示す柱の左端の軸方向変位  $\delta$  を単調に増加させる圧縮荷重下の挙動と繰り返し荷重を想定して両振りの定変位振幅  $\delta$  に与える場合の挙動とを対象とした。変位振幅の大きさとしては、図-4の単調載荷条件下の荷重-制御変位曲線を参考に表-1に示す3種類のを考慮し、10回の繰り返し載荷を行った後、さらに軸方向変位  $\delta$  を単調に増加させた。Case 1の変位振幅 ( $\delta_1$ ) としては図-4に示す単調載荷の場合のつり合い経路において、部材が初期降伏した点 ( $\delta_y$ ) から第1分岐点 ( $\delta_{I1}$ ) に至る間の変位量に相当するものを選んだ。Case 2の変位振幅 ( $\delta_2$ ) は同様のつり合い経路上の第1分岐点 ( $\delta_I$ ) から、分岐経路上の極限点 ( $\delta_u$ ) に至るまでの荷重増加領域の変位量に相当し、Case 3の振幅 ( $\delta_3$ ) は第2分岐点 ( $\delta_{II}$ ) を越えた位置の変位量に相当する。

解析手法<sup>12)</sup>としては、局所的な大変形挙動にも対応できるように、骨組の有限びずみ・有限変位問題を解析し得る剛体変位除去の手法<sup>13)</sup>に、図-3の繰り返し荷重下の材料構成則を取り入れたものを用いる。また、部材内での塑性化の進展は塑性領域理論 (Plastic-zone

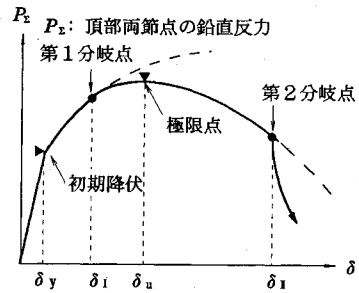


図-4 設定変位振幅の大きさと単調載荷条件下の荷重-変位関係

表-1 繰り返し載荷における制御変位量

	$\delta/L \times 10^3$	n
Case1 ( $\delta_1$ )	1.25 ( $\delta_y < \delta_1 < \delta_I$ )	10
Case2 ( $\delta_2$ )	1.50 ( $\delta_I < \delta_2 < \delta_u$ )	
Case3 ( $\delta_3$ )	1.85 ( $\delta_I < \delta_3$ )	

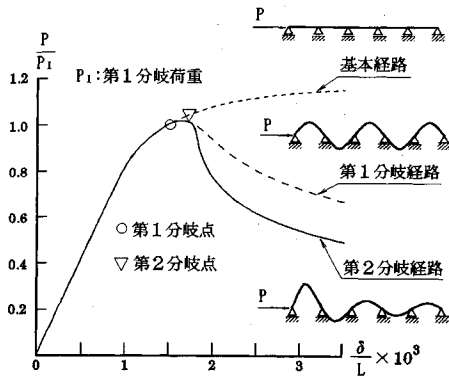
  

theory) に基づき解析した。このとき収束解が得られるように、要素断面はメッシュに、また部材も軸方向に十分細かく分割した。

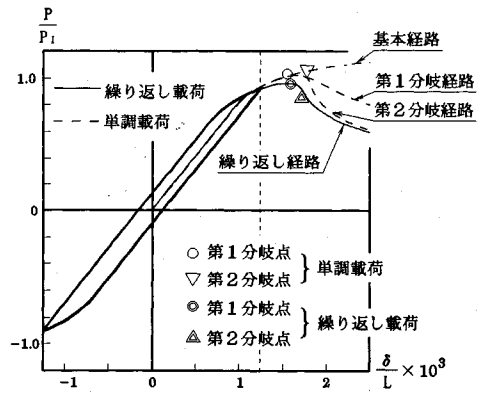
c) 単調載荷条件下の挙動

解析結果として、左端の軸方向変位  $\delta$  と圧縮荷重  $P$  との関係を図-5に示す。図中で荷重は第1分岐点での荷重  $P_I$  で、また変位は柱長  $L$  でそれぞれ無次元化している。つり合い曲線の特性について説明すると、まず柱に塑性化が生じた後に1回目の分岐が生ずる。分岐後においては、分岐前に軸方向の一樣変形で塑性化した部分が曲げ変形により除荷し剛性が増加するため荷重が上昇する。その後、最大荷重点である極限点に至る。極限点到達後、荷重は減少するが、この経路上で2回目の分岐が生ずる。第2分岐で座屈モードの局所化が左端スパン (あるいは右端スパン) に生じ、この部分に塑性変形が集中し荷重がさらに大きく低下する。

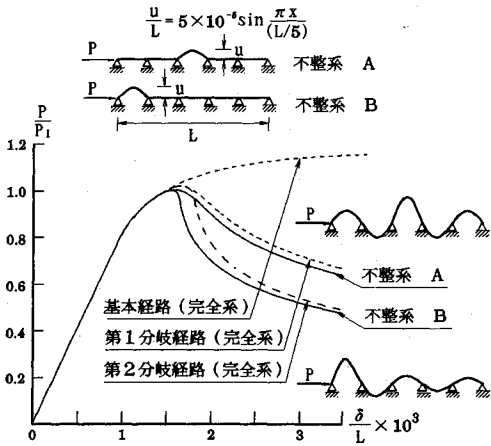
この変形挙動と Needleman らの解析結果<sup>9)</sup>との比較を行う。Needleman らの解析では完全系でなく、柱中央径間に対して対称な初期たわみを与え、構造の対称性を考慮して半分の構造で解析している。この結果得られた座屈モードの局所化は著者らのものと異なり、見かけ上柱の中央径間に生じている。異なる結果となった理由としては、実際には、完全系における第2分岐点では柱中央径間に関して非対称な座屈モードが生じ端径間に局



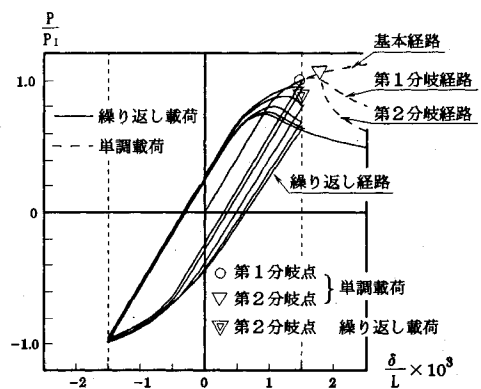
図—5 単調荷条件下の挙動



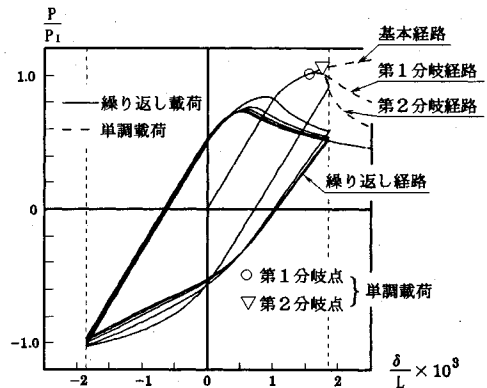
図—7 変位振幅  $\delta_1$  での繰り返し荷時の挙動



図—6 幾何学的初期不整のある柱の挙動



図—8 変位振幅  $\delta_2$  での繰り返し荷時の挙動



図—9 変位振幅  $\delta_3$  での繰り返し荷時の挙動

所化が生ずるにもかかわらず、Needlemanらは柱中央径間に局所化が生ずると考え、これに対応した初期不整を与え解析を行ったためである。彼らの局所化解析が正しくないことは、物理的にも説明できる。すなわち、柱中央径間で変形の局所化が生ずる場合、変形は両端の径間によって拘束される。一方端径間に局所化が生ずる場合、一端が自由であるので他方の径間のみによって拘束されることになる。このため中央径間の方が周辺の拘束度が高く、端径間に比べ座屈モードの局所化がより生じにくい。

Needlemanのような解析を行うと変形能の評価においてどのような問題が生ずるかを検討する。図—2のモデルを用いて、Needlemanと同様に中央径間に卓越した初期たわみを与えた場合（不整系 A）と、図—5に示す著者らの完全系の解析結果をもとに、座屈モードの局所化が生ずる端径間に同様の初期たわみを与えた場合（不整系 B）とについて計算した結果を図—6に示す。中央径間に初期不整を与え、構造系の対称性を考慮して解析した不整系 A の場合、変形モードから、見かけ上座屈モードの局所化現象が中央径間に発生しているよう

に思える。しかしながら図—6によると、実際には、ピーク後完全系の第1分岐経路にそってつり合い曲線が推移し、座屈モードの局所化現象は生じていない。一方端径間に初期たわみを与えた不整系 B は、ピーク後完全系の第2分岐経路にそって荷重が低下し、座屈モードの局所化が生ずる。このため、不整系 B は不整系 A に比べ荷重低下の程度がかなり大きい。以上から分かるように、Needlemanのような不適切な初期不整を用いると、局

所化による変形能の低下を正しく解析できず、これは変形能の過大評価につながる。座屈モードの局所化現象を正確かつ確実に解析するためには完全系に対する弾塑性分岐解析を実施し、第2分岐点における局所化が生ずる変形モードを把握し、これに基づき初期不整を設定する必要があることが明確に分かる。なお、いうまでもなく局所化解析に用いる弾塑性有限変位解析は後座屈領域まで精度良く扱えるものでなければならない。

d) 繰り返し荷重下の挙動

図-2に示す多点支持柱の完全系に表-1に示す3種類の変位振幅を与えた時の繰り返し荷重-変位曲線を単調載荷の場合と同じ要領で描いた結果を図-7~9に示す。

まず、単調載荷時の構造の初期降伏点から、第1分岐点に至る間の変位量に対応する振幅 ( $\delta_1$ ) を与えたときの繰り返し荷重下の挙動を図-7に示す。図-7から、多点支持柱は安定したヒステリシスループを描き、繰り返しによる荷重の低下はほとんど認められない。このとき、柱には軸方向変位のみ生じ、曲げによる変形は全く生じていない。したがって繰り返し載荷後、制御変位を増加させた場合、荷重履歴を受けない系と同様、つり合い経路上に第1ならびに第2分岐点が存在する。ただ、荷重履歴を受けた場合には、履歴を受けない完全系に比べ、材料のパウシंगाー効果で荷重が若干低下している。

つぎに、単調載荷時の第1分岐点から分岐経路上の極限点に至るまでの変位量を振幅 ( $\delta_2$ ) として与えたときの柱の挙動を図-8に示す。この場合、各サイクル毎に徐々に荷重が低下し、変位振幅  $\delta_2$  が単調載荷時の第2分岐点の変位量を越えていないにもかかわらず、第3サイクル目に第2分岐点での座屈モードの局所化現象が生じ、荷重が低下している。これは、繰り返しによる曲げ変形の蓄積やパウシंगाー効果による材料剛性の低下が変形の局所化を促進したものと考えられる。

さらに、第2分岐点を越えた位置の変位量を変位振幅 ( $\delta_3$ ) とした場合には、第1回目の載荷ですでに座屈モードの局所化が生ずるため、第2回目の載荷で荷重が急激に低下してしまう。

以上まとめると多点支持柱に繰り返し荷重が載荷する場合、残留変形の蓄積やパウシंगाー効果により、単調載荷の場合に比べより座屈モードの局所化が生じやすく、これに伴う変形能の低下も大きいことが分かる。

(3) トラス

a) 解析モデル

図-10に示す圧縮を受ける2層1径間のトラスを解析対象とする。上部両節点の水平方向変位成分は自由で、鉛直成分の制御変位量は等しい。各部材の材料構成則としては多点支持柱の解析で用いたのと同じ図-3に示す Bounding surface model による。

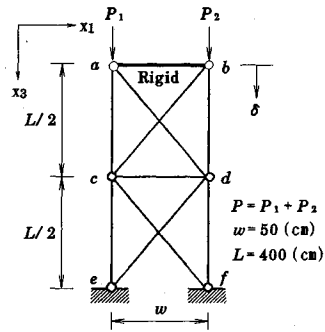


図-10 トラスの解析モデル

表-2 トラスの断面配分と剛性

構造モデル	$A_c$ (cm <sup>2</sup> )	$A_b$ (cm <sup>2</sup> )	$A_p$ (cm <sup>2</sup> )	$(EI)_t$ (kN·cm <sup>2</sup> )	$(S)_t$ (kN)
TYPE1	16.5	2.37	10.0	$4.01 \times 10^7$	612
TYPE2	15.0	3.46	10.0	$2.79 \times 10^7$	686

表-3 繰り返し載荷における制御変位量

	$\delta/L \times 10^3$	TYPE1	TYPE2	n
Case1 ( $\delta_1$ )	2	$\delta_1 < \delta_1 < \delta_u$		20
Case2 ( $\delta_2$ )	3	$\delta_u < \delta_2 < \delta_{II}$		
Case3 ( $\delta_3$ )	6	$\delta_{II} < \delta_3$	$\delta_u < \delta_3 < \delta_{II}$	

ここでは、部材断面の配分の差が座屈モードの局所化に与える影響を調べることを主たる目的として、接線係数理論に基づく座屈荷重が一定 (490 kN) となる条件下の2種類の断面配分について検討した。具体的な断面配分法について以下に説明する。倉西<sup>14)</sup>によって示されている組立て柱のチモシェンコビームモデルによる座屈荷重算定式を図の構造に適用すると、接線係数荷重  $P_{cr}$  は

$$P_{cr} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E'_c A_c w^2}{1 + \frac{\pi^2 E'_c A_c w^2}{4L^2} \left( \frac{2(\sqrt{L^2/4 + w^2})^3}{Lw^2 E'_b A_b} \right)} \dots (15)$$

となる。ここで、 $E'_c$ 、 $E'_b$  は柱材および斜材の座屈時の接線剛性である。

式 (15) と図-3の材料構成則の下に断面配分を決定するが  $P_{cr} = 490$  kN を式 (15) に与えたときの柱の断面積  $A_c$  と斜材の断面積  $A_b$  の組み合わせは無数にある。したがって、ここでは座屈時の柱のひずみが  $1.8 \epsilon_p$ 、 $2.0 \epsilon_p$ 、( $\epsilon_p$ : 初期降伏ひずみ) となる条件を付加して、2種類の断面の組み合わせを決定した。なお、水平材の断面積は一定値 ( $A_p = 10$  cm<sup>2</sup>) としている。

得られた2種類のトラス (TYPE 1, 2) の断面配分は表-2に示す通りであるが、この表中にはチモシェンコビームに換算したときの座屈時の接線曲げ剛性  $(EI)_t$ 、

および接線せん断剛性 ( $S_t$ ) も示している。表-2より断面配分の特性は以下のである。

柱の断面積 ( $A_c$ ) : TYPE 1 > TYPE 2

斜材の断面積 ( $A_b$ ) : TYPE 1 < TYPE 2

b) 変位制御条件と解析法

制御する成分としては、トラスの頂部両節点の鉛直変位成分を選ぶ。制御法としては両節点を等しく鉛直下方に単調増加させる場合と、繰り返し荷重を想定した両振りの定変位振幅を両節点に同様に与える場合とを検討対象とした。繰り返し荷重の場合の変位振幅の大きさとしては、多点支持柱同様、図-4の単調増加させた場合の荷重-変位曲線を参考に表-3に示すような3種類の振幅を決定した。なお、多点支持柱で検討した初期降伏点 ( $\delta_0$ ) から第1分岐点 ( $\delta_1$ ) に至る間の変位量を振幅とした場合については、繰り返しによる荷重低下が認められないのでここでは除外した。また、Case 3の振幅 ( $\delta_3$ ) の大きさはTYPE 1, TYPE 2とも同一であるが、図-4に示す単調荷重条件下のつりあい曲線上での位置関係は異なっている。すなわち、振幅  $\delta_3$  はTYPE 1の構造については第2分岐点 ( $\delta_{II}$ ) を越えた位置の変位量に相当するが、TYPE 2についてはCase 2と同様、極限点  $\delta_u$  と第2分岐点  $\delta_{II}$  間の変位量に相当する。

解析では表-3の振幅で両振りの繰り返し載荷を20回行った後、鉛直下方に変位を単調に増加させた。解析手法としては文献9)で示したトラス部材の局部座屈を考慮しない弾塑性有限変位解析法を用いた。

c) 単調荷重条件下の挙動

単調荷重時の挙動としては、完全系の構造とともに、4通りの幾何学的な初期不整を与えた構造(不整系)についてもその挙動を解析した。不整としては以下の4通りのものを考慮した。

I) 柱に一樣に1/400の初期部材回転角を与える ECCS 提唱の初期不整: (ECCS)

II) 第1分岐点での分岐変位モードと相似の初期不整: (1:0)

III) 第2分岐点での分岐変位モードと相似の初期不整: (0:1)

IV) 第1分岐点と第2分岐点での分岐変位モードを1:1に線形結合した形状と相似の初期不整: (1:1)

これら初期不整モードの概略は図-11に示す通りである。II)~IV)の初期不整の大きさとしてはI)のベクトルノルムと等しくなるように決定した。また( )内の記号は以後これらの幾何学的初期不整を表現するのに用いる。

解析結果として2種類のトラスに各種の初期不整を考慮したときの挙動を変位制御点である頂部両節点の鉛直方向反力の和  $P_x$  と鉛直方向制御変位量  $\delta$  の関係として図-12(a)~(b)に示す。 $P_x$  は第1分岐点の荷重  $P_{xI}$  で、

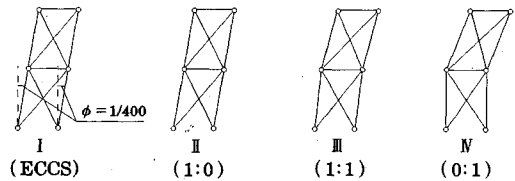


図-11 初期不整モード

表-4 トラス完全系の変形能

構造モデル	局所化考慮 ( $\bar{\delta}_p^L / L \times 10^3$ )	局所化無視 ( $\bar{\delta}_p / L \times 10^3$ )	$\frac{\bar{\delta}_p^L}{\bar{\delta}_p}$
TYPE1	5.191	5.459	0.951
TYPE2	9.960	10.08	0.988

変形能の定義

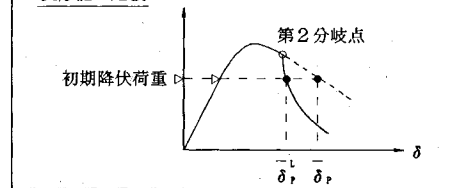
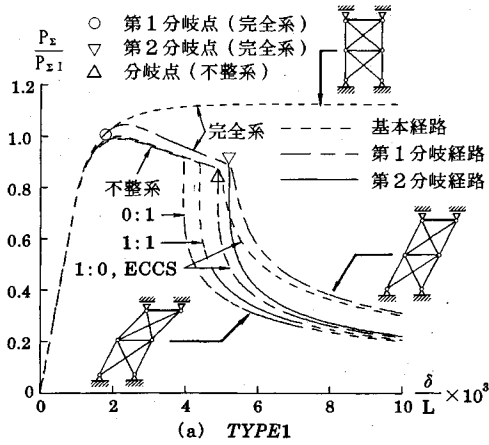


表-5 トラス不整系の変形能と最大耐力

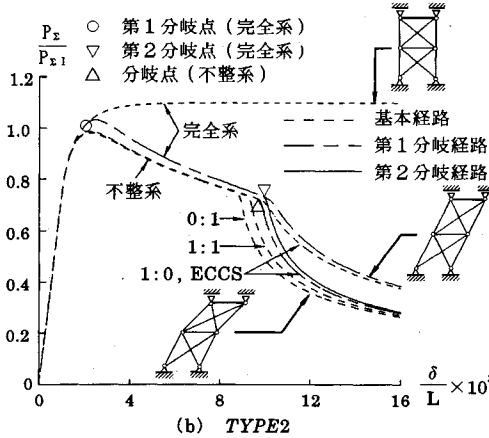
構造モデル	不整の種類	変形能 ( $\delta_p^L / \bar{\delta}_p$ )	最大耐力 ( $P_x^u / P_{xI}$ )
TYPE1	(ECCS)	0.894	0.955
	(1:0)	0.896	0.956
	(0:1)	0.725	0.946
	(1:1)	0.802	0.951
TYPE2	(ECCS)	0.965	0.956
	(1:0)	0.966	0.957
	(0:1)	0.889	0.950
	(1:1)	0.926	0.953

また  $\delta$  は高さ  $L$  でそれぞれ無次元化している。図-12より、まず、各構造のつり合い曲線の特性的について説明する。2種類の構造は完全系の構造において、いずれも設計通り、ほぼ490 kN近傍で1回目の分岐が発生している。分岐後は分岐前に塑性化した部材に除荷が生ずるため、荷重が上昇し、最大荷重点である極限点に至る。極限点到達後、荷重は減少するが、この経路上で2回目の分岐による座屈モードの局所化が生じ、荷重の減少が加速される。2回目の分岐が生ずるのは1回目の分岐後の変形形状が点対称性を有すること、斜材の塑性化によるせん断剛性の低下とに起因している。したがって、この第2分岐は斜材の断面積が小さく、せん断剛性が低下しやすいほど小さな制御変位量で発生する。

不整系のつり合い経路では、いずれも第1分岐は生じず、極限点挙動のみを示す。最大荷重到達後の減少経路上では、点対称性を有するECCS提唱の初期不整(ECCS)ならびに、第1分岐点での分岐モードに相似の初期不整(1:0)を導入した構造は完全系の第2分

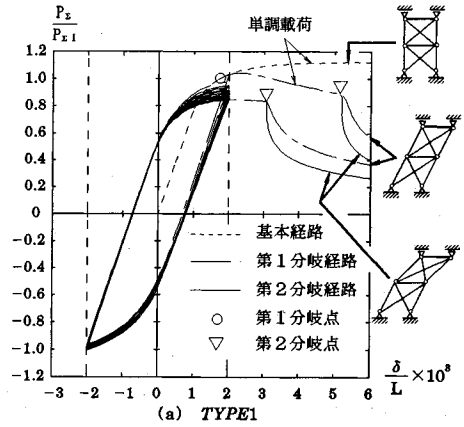


(a) TYPE1

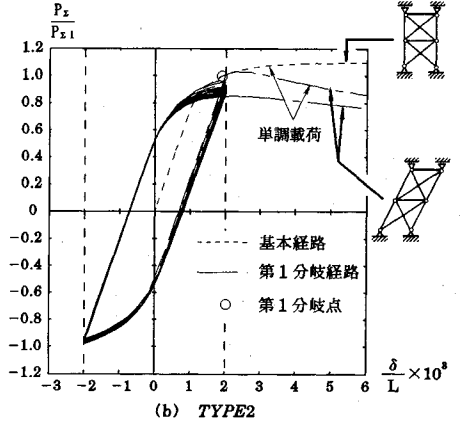


(b) TYPE2

図-12 単調荷重条件下のトラスの挙動



(a) TYPE1



(b) TYPE2

図-13 変位振幅  $\delta_1$  での繰り返し荷重時の挙動

岐に対応する分岐挙動を示すが、他の初期不整 (0:1), (1:1) を持つ構造については第2分岐点は消失する。一般に初期不整の導入により、最大荷重は低下し、また座屈モードの局所化はより小さな制御変位量で発生するようになる。

以上のような挙動特性を示すトラスについて、変形能の観点からより詳細に検討を加える。ここで用いる変形能の定義は表-4の挿図に示すように、構造の初期降伏荷重に等しい後座屈領域での変位を用いる。表-4にはTYPE 1, 2の完全系に対する変形能を座屈モードの局所化を考慮した場合の値  $\bar{\delta}_p$  とこれを無視した場合の値  $\bar{\delta}_p$  について示している。これより、斜材の断面積が小さいほど、座屈モードの局所化により変形能は低下するが、その程度はTYPE 1, TYPE 2 いずれも小さい。

つぎに、不整系の変形能を検討する。表-5には各種不整系の変形能  $\delta_p$  を座屈モードの局所化を無視した完全系の変形能  $\bar{\delta}_p$  で無次元化することにより比較している。また参考のために、表中には、各不整系の最大耐力を完全系のもので  $P_z^*$  無次元化することで示している。

表-5からわかるように、完全系において座屈モード

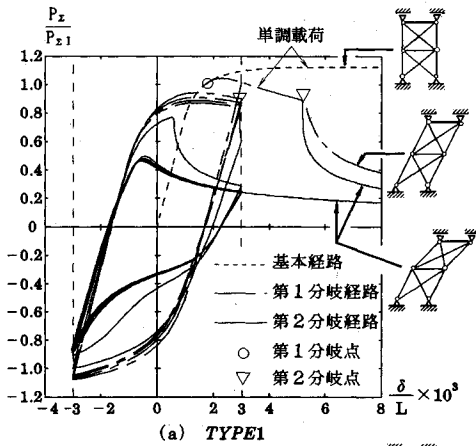
の局所化が生じやすいTYPE 1は初期不整に対して変形能も低下しやすい傾向にある。特に第2分岐点での分岐モードに相似のモード (0:1) を与えた時、変形能は約3割も低下することになる。一方、最大耐力の低下に対する座屈モードの局所化の影響はいずれも小さく、どの初期不整を与えても低下傾向に大差ないことが分かる。

d) 繰り返し荷重下の挙動

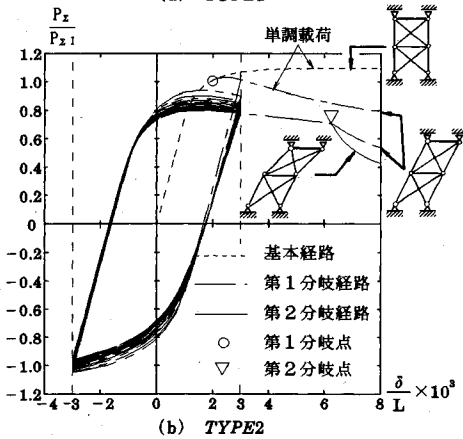
b) で述べた3種類の変位振幅を与えたときの2種類のトラス完全系の荷重-変位曲線を単調荷重の場合と同じ要領で描いた結果を図-13~15に示す。

まず、単調荷重時の第1分岐点から最大荷重点に至るまでの変位量に対応する変位振幅  $\delta_1$  を与えたときの繰り返し荷重下の挙動について図-13をもとに検討する。この図よりTYPE 1, 2の両構造とも安定したヒステリシスループを描いていることがわかる。ただ、いずれも残留変形の蓄積やパウシグー効果による若干の荷重低下が認められる。解析では繰り返し荷重を20回載荷させた後、さらに変位を単調に増加させている。この場合、TYPE 1の結果からわかるように、繰り返し荷重で蓄積した残留変形によりかなり早く座屈モードの局所化が



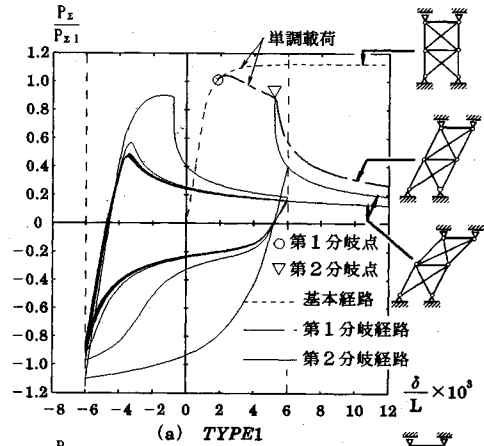


(a) TYPE1

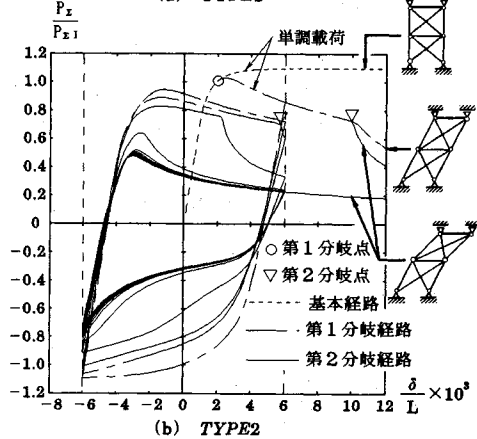


(b) TYPE2

図—14 変位振幅  $\delta_2$  での繰返し載荷時の挙動



(a) TYPE1



(b) TYPE2

図—15 変位振幅  $\delta_3$  での繰返し載荷時の挙動

生ずる。

つぎに、単調載荷時の最大荷重点から局所化が発生する第2分岐点に至るまでの変位量に対応する変位振幅  $\delta_2$  を与えたときの挙動を図—14により検討する。図—14(a)より、斜材断面の小さいTYPE1では、変位振幅  $\delta_2$  が、第2分岐点の変位量を越えていないにもかかわらず、繰返し載荷により座屈モードの局所化が生じ、急速に荷重が低下していく。これは先にも述べた様に、繰返しによる残留変形の蓄積やバウシinger効果による斜材剛性の低下等が座屈モードの局所化を促進したものと考えられる。一方斜材断面の大きいTYPE2では  $\delta_1$  の振幅を与えた場合と同様、安定したヒステリシスループを描いている。

$\delta_2$  の2倍の振幅  $\delta_3$  を与えた場合の挙動を図—15に示す。このとき、TYPE1ではその振幅が単調増加荷重下の第2分岐点での変位量を越えているので、座屈モードの局所化による荷重の低下傾向は1サイクル目から顕著に現れる。TYPE2では  $\delta_2$  の振幅を与えたときのTYPE1の挙動と同様で、繰返しに伴い急速に耐荷力が低下していく。

以上の結果をまとめると、繰返し荷重下におけるトラスの挙動も多点支持柱と同様、残留変形の蓄積や材料のバウシinger効果による斜材の剛性の減少で、かなり早く座屈モードの局所化現象が生じ、繰返しに伴い急速に変形能が低下していく場合がある。このような傾向は、斜材の断面が小さくせん断剛性が低い構造により強く認められる。

#### 4. あとがき

塑性座屈モードの局所化現象が構造物の変形能低下に影響を与えることは実験等で観察されているものの、そのメカニズムや解析手法等についてはほとんど明らかになっていない。特に、構造物の耐震設計で重要な、繰返し荷重下の座屈モードの局所化現象に至っては全く理論的には検討されていない。ここでは、塑性座屈モードの局所化現象を一般的に解析するための理論の枠組みを提示するとともに、2種類の構造物を例に、繰返し荷重下を含む座屈モードの局所化現象を解析し、基本的な特性を変形能の観点から検討した。結果として、解析手法の妥当性が確認されるとともに、繰返し載荷時に

いては、単調載荷時に比べ材料のバウシinger効果や残留変形の蓄積等により局所化現象が促進され、大幅な変形能の低下につながることも、また、同じ強度を持つ構造物においても部材断面構成の差により、座屈モードの局所化の発生に差があることも明らかにした。

なお、土木構造で多く用いられる薄板集成構造では、初期座屈波形が周期性等の対称性をもつ場合も多い。したがって、多点支持柱で示したものと類似の座屈モードの局所化現象は特殊なものではなく、圧縮板の実験等でもしばしば観察されている。このように板構造における座屈モードの局所化現象の解明は、その耐震性を理論的に評価する上で重要であると考えられ、今後、本研究で得た成果を基にこの問題について検討する予定である。

#### 参考文献

- 1) Fukumoto, Y. and Kusama, H. : Local Instability Test of Plate Elements under Cyclic Uniaxial Loading, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.111, No.5, pp.1051~1067, 1985.
- 2) 宇佐美 勉・今井康幸・青木徹彦・伊藤義人：繰り返し荷重を受ける鋼圧縮部材の強度と変形能に関する実験的研究, *構造工学論文集*, Vol. 37 A, pp. 93~106, 1991年.
- 3) 渡辺英一・杉浦邦征・狩野正人・高尾道明・江見 普：コーナー部に曲率を有する箱型断面はり-柱の繰り返し変形特性に関する実験的研究, *構造工学論文集*, Vol. 36 A, pp. 33~40, 1990年.
- 4) 酒造敏廣：繰り返し水平力を受ける鋼変断面片持ち柱の断塑性挙動に関する研究, *土木学会論文集*, No. 446/I-19, pp. 127~136, 1992年.
- 5) Needleman, A. and Tvergaard, V. : Aspects of Plastic Postbuckling Behavior, *Mechanics of Solids*, edited by H.G. Hopkins and M.J. Sewell, pp.453~498, Pergamon Press, 1982.
- 6) Hill, R. : A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic Plastic Solids, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol.6, pp.236~249, 1958.
- 7) Hutchinson, J.W. : Post Bifurcation Behavior in The Plastic Range, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol.21, pp.163~190, 1972.
- 8) Goto, Y., Suzuki, S. and Chen, W. F. : Analysis of Critical Behavior of Semi-Rigid Frames with or without Load History in Connections, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.27, No.4, pp.467~483, 1991.
- 9) 後藤芳顕・大鹿克敏・川西直樹・小畑誠：多自由度離散系の弾塑性分岐挙動の解析法とトラス構造物への適用, *土木学会論文集*, No. 446/I-19, pp. 117~126, 1992年.
- 10) Shanley, F.R. : Inelastic Column Theory, *Journal of The Aeronautical Sciences*, Vol.14, pp.261~268, 1947.
- 11) Dafalias, Y.F. and Popov, E.P. : Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.43, pp.645~651, 1976.
- 12) 後藤芳顕・宮下 敏・松浦 聖：平面骨組の弾塑性分岐挙動の解析法と初期曲げを受ける剛結骨組の座屈特性, *構造工学論文集*投稿中.
- 13) 後藤芳顕・吉光友雄・小畑 誠・西野文雄：平面骨組の有限ひずみ・有限変位の解に収束する2種類の数値解法と精度特性, *土木学会論文集*, No.428/I-15, pp. 67~76, 1991年.
- 14) 倉西 茂：鋼構造, pp. 46~50, 技報堂, 1980年.

(1993. 5. 10 受付)

## LOCALIZATION OF PLASTIC BUCKLING PATTERNS AND ITS EFFECT ON THE DUCTILITY OF STRUCTURES UNDER CYCLIC LOADING

Yoshiaki GOTO, Naoki KAWANISHI, Yasuyuki TOBA and Makoto OBATA

In case of structures under compressive loading, it is often observed experimentally that the ductility of structures is considerably lost due to the localization of plastic buckling patterns. This implies that the phenomena of this kind has an unfavorable effect on the earthquake resistance. Herein, we present a versatile theoretical method to analyze the localization of buckling patterns including that under cyclic loading. As numerical examples, two types of structures, i.e. a multiply supported column and a truss tower under compressive force, are analyzed in order to show the validity of the proposed method. In these examples the cyclic localization phenomena is also discussed in terms of the influence on deformation capacity.