

任意方向繰返し単純せん断における 応力・ひずみ関係

福武毅芳*・松岡 元**

本研究では、実際の地震時の地盤の挙動を解明するため、任意方向への繰返しせん断挙動が説明可能な構成式(おわんモデル)を提案した。また、任意方向にせん断できる単純せん断試験機を用いて、種々の経路の排水繰返しせん断を実施した。提案したおわんモデルを用いて、これらの実験結果のシミュレーション解析を行い、おわんモデルがいかなる経路においても実測値を精度良く説明することを示した。

Keywords : constitutive equation, multi-direction, simple shearing, cyclic loading, dilatancy

1. はじめに

地震動は、水平成分のみを考えても2成分(NS成分とEW成分)を持っており、水平面における変位軌跡はランダムな経路を描く。この時の地盤の挙動は、多方向に繰返しを受ける単純せん断状態に近い。従って、一方向成分のみに着目した従来の解析では誤差を含むものと考えられる。既往の要素試験(繰返し単純せん断試験)結果によれば、一方向せん断より多方向せん断の方がダイレイタンスが多く発生し¹⁾、液状化強度が小さくなる²⁾ことが指摘されている。よって、地震時の砂地盤の非線形挙動および液状化問題を解析するには、水平面内で任意方向へせん断したときの応力-ひずみ-ダイレイタンス関係を算定する必要がある。

そこで、任意方向にせん断できる単純せん断試験機を用いて、種々の経路の排水繰返しせん断を行った。この実験結果に基づき、前報³⁾ではダイレイタンスに着目した考察を行った。本研究では、せん断応力・せん断ひずみ関係も含めた構成式の定式化を行い、さらに実験結果のシミュレーション解析を行った。定式化に当たっては、累加せん断ひずみ G^* と合せん断ひずみ Γ を用い、さらに釣り合い式概念を導入して、新たな応力・ひずみ・ダイレイタンス関係(おわんモデルまたは Bowl Model と呼称)を提案した。

2. 諸量の定義

多方向単純せん断において、 x , y , z 軸の方向および応力やひずみ増分とそれらの方向を Fig.1 のように定義

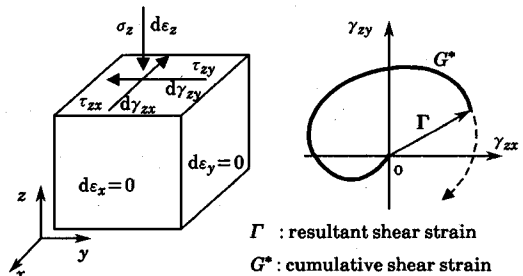


Fig.1 Definition of stress and strain.

する。単純せん断においては側方変位は固定されているため、 $d\epsilon_x = d\epsilon_y = 0$ である。したがって、鉛直ひずみ ϵ_z は体積ひずみに等しい。また、本文中では応力は全て有効応力を意味する。

任意方向へ単純せん断する場合は、Fig.1 のように x - y 水平面内でランダムなひずみ経路となる。そこで合せん断ひずみ Γ と累加せん断ひずみ G^* とを次式で定義する。

$$\Gamma = |\Gamma| = \sqrt{\gamma_{zx}^2 + \gamma_{zy}^2} \dots\dots\dots (1)$$

$$G^* = \sum \Delta G^* = \sum |\Delta \Gamma| = \sum \sqrt{\Delta \gamma_{zx}^2 + \Delta \gamma_{zy}^2} \dots\dots\dots (2)$$

Fig.1 に示すように、せん断ひずみ γ_{zx} , γ_{zy} をそれぞれ x 軸, y 軸に選んだ座標系において、 Γ は Fig.1 中の原点 o から現在のひずみの位置までの半径方向の距離を表す。また G^* はひずみ経路に沿った長さを表す。また、水平面上のせん断・垂直応力比を次式で表す。

$$X_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{\sigma_z}, X_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{\sigma_z} \dots\dots\dots (3)$$

$$X_z = |X_z| = \frac{\tau_z}{\sigma_z} = \frac{\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}}{\sigma_z} \dots\dots\dots (4)$$

なお、記号でボールド体はベクトルを表す。 X_z の x 成分, y 成分がそれぞれ X_{zx} , X_{zy} となる。

* 正会員 工修 研究員 清水建設(株)大崎研究室(元・名古屋工業大学大学院生)

(〒105-07 港区芝浦1丁目2-3 シーパンスS館)

** 正会員 工博 名古屋工業大学教授
名古屋工業大学社会開発工学科

3. おわんモデル (Bowl Model) の提案

(1) せん断ひずみ～ダイレイタンスー関係^{(3),(4)}

Fig.2 に示すように、ひずみ空間 ($\gamma_{zx} \sim \gamma_{zy} \sim \epsilon_z^s$) において Γ の指数関係で表されるおわん状の斜面を想定する。このとき、おわんの接平面のなす立体角は単純せん断面上における平均的な粒子接点角に対応し、原点からの距離がせん断ひずみと体積ひずみに対応することになる。繰返しせん断時には平均的な土粒子の動きとしては、このおわんを上り下りしながら動くことになるが、おわん自体も G^* と共に Fig.2 に示すひずみ空間中を下方へ (圧縮側へ) 移動する。この「おわんの下方への移動」は物理的には負のダイレイタンスーの累積を意味する。よって、ダイレイタンスー ϵ_z^s を、土粒子がこのおわんを上り下りする成分 ϵ_r とおわん自体が圧縮する成分 ϵ_G の和として、式 (5) のように表す。

$$\begin{aligned} \epsilon_z^s &= \epsilon_r + \epsilon_G \\ &= A\Gamma^B + \frac{G^*}{C + DG^*} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ϵ_G はダイレイタンスーのマスターカーブであり、 ϵ_r はそれに付随する波打ち成分である。上式より、任意方向の繰返しせん断時のひずみ (Γ, G^*)～ダイレイタンスー (ϵ_z^s) 関係が求められる。詳しくは文献^{(3),(4)}を参照されたい。

(2) せん断ひずみ～応力比関係 (つり合い式)⁽⁵⁾

ここでは、ひずみ空間中での平均的な粒子接点角である三次元斜面における応力の釣合いを考えることによって、応力比 (X_2 の大きさと方向)～せん断ひずみ (Γ, G^*) 関係を導くことを考える。

Fig.1 に示す $x-y$ 面を水平面とし、この水平面を基準にしたときの、おわん斜面における接平面の半径方向の立体的な角度を $\bar{\theta}_r$ 、 G^* に沿ったマスターカーブ ($G^* \sim \epsilon_G$ 関係) の接平面の立体的な角度を $\bar{\theta}_G$ とする。 $\bar{\theta}_r$ 、 $\bar{\theta}_G$ の大きさはそれほど大きくなく、 $\tan \bar{\theta}_r \approx \bar{\theta}_r$ 、 $\tan \bar{\theta}_G \approx \bar{\theta}_G$ と近似できる程度の大きさであると思われる。よって $\bar{\theta}_r$ 、 $\bar{\theta}_G$ それぞれの大きさは近似的に次式で与えられる。

$$\bar{\theta}_r \approx -\frac{d\epsilon_r}{d\Gamma} = -AB\Gamma^{B-1} \geq 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\bar{\theta}_G \approx -\frac{d\epsilon_G}{dG^*} = -\frac{C}{(C + DG^*)^2} < 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここでたとえば Fig.3(a) のようなひずみ経路上の点 ① に着目する。点 ① では粒子はおわんのある高さの所に居て、かつ粒子が動こうとするとおわん自体も下方へ (圧縮側へ) 移動する。よって Fig.3(b), (c) に示す角度 $\bar{\theta}_r$ 、 $\bar{\theta}_G$ を有する斜面を三次元的に合成して新たに形成される角度 $\bar{\theta}$ を有する斜面上を粒子が滑動することになり、その面上での応力の釣合いを考える必要がある。

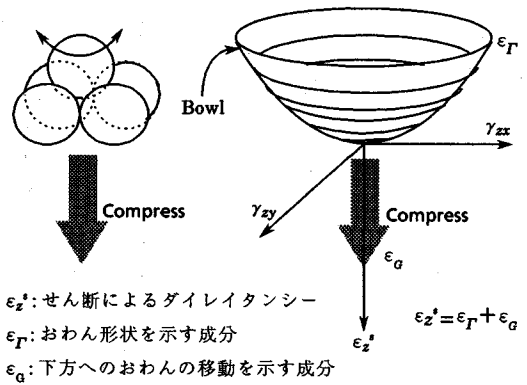
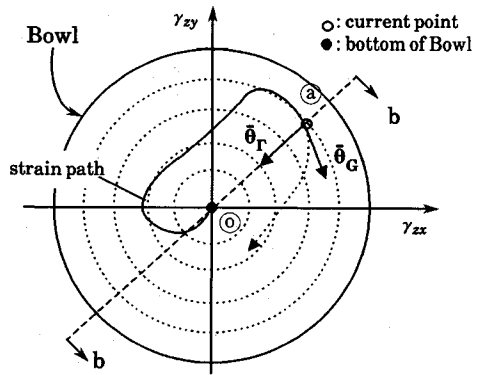
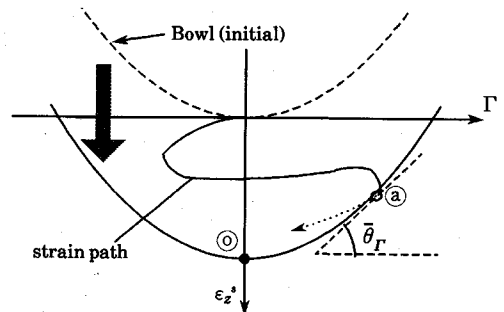


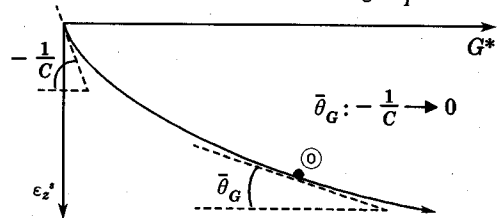
Fig.2 The 'Bowl' in strain space and its microscopic image.



(a) shear strain path in $\gamma_{zx} \sim \gamma_{zy}$ plane and $\bar{\theta}_r, \bar{\theta}_G$ at point ①



(b) b~b section of Bowl and angle $\bar{\theta}_r$



(c) locus for bottom of Bowl in $G^* \sim \epsilon_z^s$ plane and angle $\bar{\theta}_G$

Fig.3 Angles $\bar{\theta}_r$ and $\bar{\theta}_G$ in Bowl model

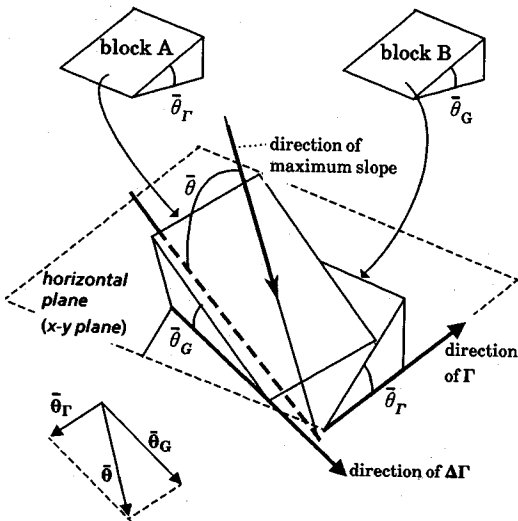


Fig.4 Angle $\bar{\theta}$ which is obtained by superposing three-dimensionally by angles $\bar{\theta}_r$ and $\bar{\theta}_c$.

ここで斜面の方向を最大傾斜の方向と定義し、角度 $\bar{\theta}_r$, $\bar{\theta}_c$ の大きさを持つ斜面をその最大傾斜の方向も加味してベクトルとして $\bar{\theta}_r$, $\bar{\theta}_c$ と表現する。 $\bar{\theta}_r$ の方向は、おわんが原点中心の回転体であるため、 $-\Gamma$ 方向（原点方向）を向く。また、 \textcircled{a} 点において粒子は $\Delta\Gamma$ 方向（ひずみ経路の接線方向）に動いており、 ΔG^* に伴いおわんが圧縮してゆくので、 $\bar{\theta}_c$ の方向は $\Delta\Gamma$ 方向を向いている。以上の考え方を図で示せば、 Fig.4 のような角度 $\bar{\theta}_r$, $\bar{\theta}_c$ を持つブロック A とブロック B を考え、図のようにそれぞれの最大傾斜の方向が $-\Gamma$ 方向と $\Delta\Gamma$ 方向とに一致するように積み重ねて、結果的に形成される三次元斜面における釣合いを考えればよいことになる。この斜面の有する角度 $\bar{\theta} = |\bar{\theta}|$ は、重ね合わせにより形成された斜面と水平面（単純せん断面）とのなす立体的な角度である。このような重ね合わせによって形成された角度 $\bar{\theta}$ の方向と大きさは、幾何学的に次式で決定される。

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_r + \bar{\theta}_c \dots\dots\dots (8)$$

ここで角度 $\bar{\theta}$ を有する斜面の垂直抗力を n , 斜面に沿った摩擦力を $n\mu_s$ とする。ここに、 $n = |n|$ である。 $\mu_s = |\mu_s|$ は、水平面（単純せん断面）における摩擦係数であり、摩擦角を ϕ_{μ_s} とすれば $\mu_s = \tan\phi_{\mu_s}$ である。ただし、一般にこの斜面は水平面から傾斜しているので、 μ_s は水平面上の摩擦係数とは厳密には一致しないが、ここでは近似的に一致すると仮定している。 μ_s は方向をもったベクトル量としての摩擦係数であり、これについては後述する。また水平面上の単位面積における平均粒子間接触力を t とする。 t の x, y, z 軸方向の各成分はそれぞれ $\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_z$ に等しい。（着目面は水平面に固定し

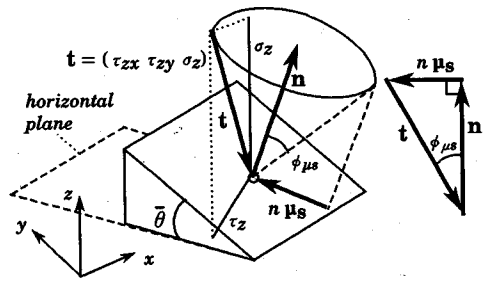


Fig.5 Equilibrium of force components ($n, n\mu_s$ and t) on three-dimensional slope with angle $\bar{\theta}$.

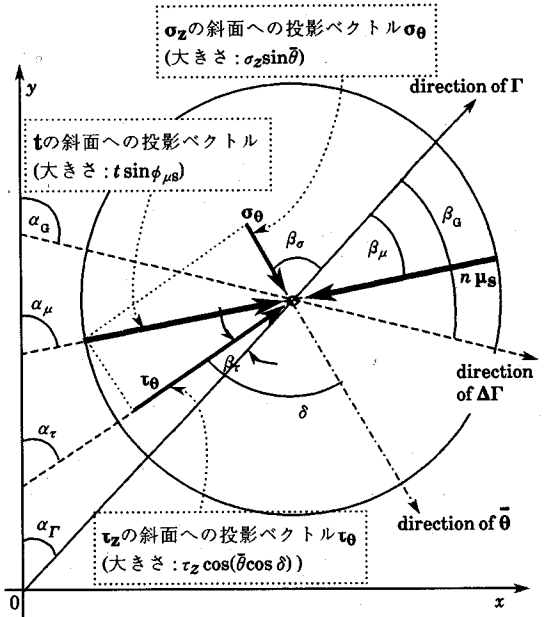


Fig.6 Equilibrium of stress components seen from the direction normal to the three-dimensional slope with angle $\bar{\theta}$.

ているので、応力の分解や合成はベクトルの的に扱える。）そして Fig.5 に示すように、角度 $\bar{\theta}$ を有する三次元斜面における三つのベクトル $n, n\mu_s, t$ の釣合いを考える。このときの釣合い式は式（9）で与えられる。

$$n + n\mu_s + t = 0 \dots\dots\dots (9)$$

Fig.6 には、 Fig.5 を斜面の法線方向から見た場合の図を示す。同図中の応力の作用点（ \textcircled{O} 印）は、 Fig.2 に示すおわん状斜面における平均的な土粒子の節点に対応している。 $\alpha_r, \alpha_c, \alpha_\tau, \alpha_\mu$ はそれぞれ y 軸からの角度であり、 $\beta_r, \beta_c, \beta_\tau, \beta_\mu$ は半径方向（ Γ 方向）からの角度である。 α_r は合せん断ひずみ Γ の方向を、 α_c は合せん断ひずみ増分 $\Delta\Gamma$ の方向をそれぞれ表している。 σ_θ は、 σ_z の斜面への投影ベクトルで、その大きさは $\sigma_z \sin\bar{\theta}$ である。 $\bar{\theta}$ の方向は、 σ_θ の方向すなわち、 σ_z の作用により斜面を滑り降りようとする力の方向と一致すると仮定する。 τ_θ は τ_z の斜面への投影ベクトルである。 δ は、最大傾斜 $\bar{\theta}$ 方向と τ_θ とのなす角度である。 $\bar{\theta}\cos\delta$ は、

τ_z と斜面とのなす立体的な角度である。よって、 τ_θ の大きさは $\tau_z \cos(\bar{\theta} \cos \delta)$ となる。またそれぞれの角度の間には次式のような関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \beta_c &= \alpha_c - \alpha_r, \quad \beta_r = \alpha_r - \alpha_r \\ \beta_\mu &= \alpha_\mu - \alpha_r, \quad \delta = \beta_r - \beta_\sigma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで式(9)の釣り合い式を、Fig.6を参考にして半径方向、円周方向、斜面に垂直な方向の三方向に分けて成分表示すると、次式ようになる。

$$\tau_z \cos(\bar{\theta} \cdot \cos \delta) \cos \beta_r = \sigma_z \sin \bar{\theta} \cos \beta_\sigma + \mu_s n \cos \beta_\mu \dots\dots\dots (11a)$$

$$\tau_z \cos(\bar{\theta} \cos \delta) \sin \beta_r = \sigma_z \sin \bar{\theta} \sin \beta_\sigma + \mu_s n \sin \beta_\mu \dots\dots\dots (11b)$$

$$n = \sigma_z \cos \bar{\theta} + \tau_z \sin(\bar{\theta} \cos \delta) \dots\dots\dots (11c)$$

ただし、 $\bar{\theta}$ の方向 β_σ と大きさ $\bar{\theta}$ はFig.7において正弦定理、余弦定理を用いて次式で与えられる。

$$\beta_\sigma = \arcsin\left(\frac{\bar{\theta}_c}{\bar{\theta}} \sin \beta_c\right) \dots\dots\dots (12a)$$

$$\bar{\theta} = \sqrt{\bar{\theta}_r^2 + \bar{\theta}_c^2 - 2\bar{\theta}_r \bar{\theta}_c \cos \beta_c} \dots\dots\dots (12b)$$

式(11c)より n を消去し、 $X_z = \tau_z / \sigma_z$ であるから、式(11)は次の二式となる。

$$\begin{aligned} X_z \cos(\bar{\theta} \cos \delta) \cos \beta_r - \sin \bar{\theta} \cos \beta_\sigma \\ - \mu_s (\cos \bar{\theta} + X_z \sin(\bar{\theta} \cos \delta)) \cos \beta_\mu = 0 \dots\dots\dots (13a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_z \cos(\bar{\theta} \cos \delta) \sin \beta_r + \sin \bar{\theta} \sin \beta_\sigma \\ - \mu_s (\cos \bar{\theta} + X_z \sin(\bar{\theta} \cos \delta)) \sin \beta_\mu = 0 \dots\dots\dots (13b) \end{aligned}$$

この二式は応力比ベクトル X_z とせん断ひずみ(Γ, G^*)とを関係づけるための基本的な式である。

以下に式(13)を用いて、a) ひずみから応力を求める場合と、b) 応力からひずみを求める場合とについて、それぞれの計算法を述べる。

a) ひずみから応力を求める場合

未知数は X_z と β_r (または α_r)の二つである。式(13a)から次式を得る。

$$X_z = \frac{\mu_s \cos \beta_\mu \cos \bar{\theta} + \sin \bar{\theta} \cos \beta_\sigma}{\cos(\bar{\theta} \cdot \cos \delta) \cos \beta_r - \mu_s \cos \beta_\mu \sin(\bar{\theta} \cos \delta)} \dots\dots\dots (14)$$

式(14)を式(13b)に代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \{ \tan \bar{\theta} \cos \beta_\sigma + \mu_s \cos \beta_\mu \} \sin \beta_r \\ + \{ \tan \bar{\theta} \sin \beta_\sigma - \mu_s \sin \beta_\mu \} \cos \beta_r \\ - \mu_s \tan(\bar{\theta} \cos \delta) \tan \bar{\theta} \sin(\beta_\sigma + \beta_r) = 0 \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

$\bar{\theta}$ の値はそれほど大きくないので、式(15)の第三項は他の項と比べて微小として無視すれば、次式を得る。

$$\beta_r = \arctan\left(\frac{\mu_s \sin \beta_\mu - \tan \bar{\theta} \sin \beta_\sigma}{\mu_s \cos \beta_\mu + \tan \bar{\theta} \cos \beta_\sigma}\right) \dots\dots\dots (16)$$

式(16)より β_r が求められ、それを式(14)に代入す

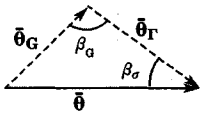


Fig.7 Relationship among $\bar{\theta}_c, \bar{\theta}_r$ and $\bar{\theta}$

れば X_z が求められる。また式(15)から求めた β_r の値と式(16)から求めたそれとの差は1%未満であった。

なお、一方向せん断の場合は式(14)は式(17)のように簡単になる。これは、単に角度 $\bar{\theta}$ を有する斜面上での釣り合い式にほかならない。

$$X_z = \frac{\mu_s + \tan \bar{\theta}}{1 - \mu_s \tan \bar{\theta}} = \tan(\bar{\theta} + \arctan \mu_s) \dots\dots\dots (17)$$

b) 応力からひずみを求める場合

未知数は Γ, G^* の二つである。また、 $\bar{\theta}, \beta_\sigma, \beta_\mu, \mu_s$ は Γ や G^* の関数となっており、式(13)から直接 Γ, G^* は陽な形で求めにくい。(β_μ, μ_s が Γ や G^* の関数となることは次項(3)で述べる。)そこで、未知数として Γ, G^* を考える代わりに、累加せん断ひずみ増分の大きさとその方向すなわち ΔG^* と β_c の二つを考える。このとき Γ は、幾何学的関係より ΔG^* と β_c との従属変数となる(Fig.8参照)。そして式(13a)の左辺を F_a 、式(13b)の左辺を F_b とおけば、式(18)を同時に満たすような $\Delta G^{*i}, \beta_c^i$ を求めればよいことになる。肩文字 i は計算の増分区間のステップ数を示す。

$$F_a(\sum_i \Delta G^{*i}, \beta_c^i) = 0 \dots\dots\dots (18a)$$

$$F_b(\sum_i \Delta G^{*i}, \beta_c^i) = 0 \dots\dots\dots (18b)$$

$$(i=1, 2, 3, \dots)$$

式(18)を用いて、 $\Delta G^{*i}, \beta_c^i$ を求めるための試行錯誤計算を行う必要があるが、以下にその計算手順を示す。

- ① 初期条件を与える。このとき式(18)は満足していなければならない。
- ② $\tau_z^{i+1} = \tau_z^i + \Delta \tau_z^i$ とする。すなわち、 $\tau_z^{i+1} = \tau_z^i + \Delta \tau_z^i, \alpha_r^{i+1} = \alpha_r^i + \Delta \alpha_r^i$ とする。
- ③ ②の操作の結果、滑動する場合(釣り合い式を満たさない場合)は④へ、滑動しない場合(釣り合い式を満たす場合)は②へ戻る。
- ④ 滑動方向 β_c^i を仮定する。第一段階で仮定する方向は、前ステップの経路の延長線上(Fig.8の破線矢印)と仮定してよい。
- ⑤ 仮定した β_c^i 方向の直線経路上で、釣り合い式(18)を満たす場所を探す。ただし、釣合いの条件としては、制約を緩め次式を満足することとした。
 $F_a < \Delta$ and $F_b < \Delta, \Delta = 0.003 \dots\dots\dots (19)$
 $\Delta = 0$ としたときの解との誤差は高々2%程度であった。
- ⑥ もし釣り合い式(19)を満たす ΔG^{*i} が存在すれば、その時の $\Gamma_i, \epsilon_z^{*i}$ を計算し、 $G^{*i+1} = G^{*i} + \Delta G^{*i}$ として

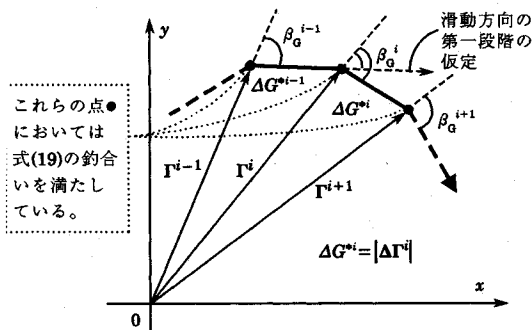
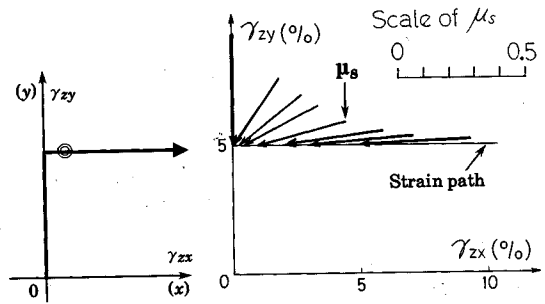


Fig. 8 $\Delta G^i, \beta_c^i$ in each step



(a) strain path (b) μ_s on strain path
Fig. 9 Friction coefficient μ_s on simple shear plane.

②へ戻る。

⑦ もし、式 (19) を満たす ΔG^i が存在しなければ、新たな β_c^i を $\beta_c^i + \Delta\beta_c^i$ と仮定し直して⑤へ戻る。

以上の仮定を繰り返すことによって、Fig. 8 に示すように各ステップにおける $\Delta G^i, \beta_c^i$ が順次求められる。

(3) 多方向せん断時の摩擦係数ベクトル μ_s

水平面上の摩擦係数ベクトル μ_s の大きさ μ_s と方向 (α_μ または β_μ) について考える。 μ_s の大きさと方向は、ここでは陳・松岡⁹⁾ の考え方に従い、せん断にともない刻々変化すると仮定した。陳らがこのように考えた理由は以下のような考察による。

あるせん断ひずみ増分が与えられた瞬間には、粒子は全部同時に同じ方向へ同じ量だけすべりではなく、平均的なひずみ増分方向と異なる方向へすべり粒子もある。たとえば、Fig. 9(a) に示すように、 y 方向にせん断しそれから x 方向へ 90° 折れ曲がった直後 (◎印付近) の状態を考える。この付近では全ての粒子が x 方向へ同じ量だけすべりはおらず、 y 方向への滑動成分をもつ粒子もかなり残っているはずである。その結果、平均的な粒子間摩擦係数ベクトルの大きさと方向は徐々に変化し、十分 x 方向にせん断されてはじめてその方向が x 方向に一致すると考えられる (Fig. 9(b) の矢印が μ_s を表す)。これは急な曲り角で大型トレーラーが徐々に方向転換する様子に似ている。したがって、粒子間摩擦係数ベクトルの方向は、同一方向へのせん断を続けるにつれて、せん断ひずみ増分方向と一致する方向へすべり粒子が増加し、 μ_s の方向も徐々にその方向に向いてゆくと考えられる。またその大きさは、同一方向へのせん断を続けるにつれて μ_s の値が増加してゆき、 μ_s は徐々にその最大値 μ_m に近づいてゆくと考えられる。

以上のような陳らの仮定を念頭に置き、ここではまず水平面内で一方向せん断の場合の個々の土粒子の平均的な粒子間摩擦係数 $\mu_s (= \tan\phi\mu_s)$ を、累加せん断ひずみ G^* の双曲線関数と仮定する。すなわち、一方向せん断における μ_s の最大値を μ_m (双曲線の漸近線) とし、

ϵ_s^z の最大圧縮点 ($\bar{\theta}=0$) でのせん断ひずみを γ_0 としそのときの μ_s を μ_0 とすれば、一方向せん断の場合の $\mu_s = \mu_s(G^*)$ は次式で与えられる。

$$\mu_s(G^*) = \mu_0 + \frac{\mu_m - \mu_0}{1 + \frac{\gamma_0}{G^*} \frac{\mu_m - \mu_0}{\mu_0 - \mu_i}} \dots (20)$$

ここで、 μ_i は μ_s の初期値であり、 $G^*=0$ における μ_s である。 γ_0 は、一方向せん断において $\bar{\theta} = \bar{\theta}_r + \bar{\theta}_c = 0$ となるときのせん断ひずみであるから、式 (6), (7) より次式で与えられる。

$$AB\gamma_0^{B-1} + \frac{C}{(C+D\gamma_0)^2} = 0 \dots (21)$$

μ_i は、せん断開始時において $X_2=0$ かつ $\bar{\theta} = -1/C$ となることから、式 (17) より次式で与えられる。

$$\mu_i = \tan \frac{1}{C} \dots (22)$$

以上より、摩擦係数 $\mu_s(G^*)$ に関しては、 μ_0 と μ_m とがパラメータとなる。

次に、 μ_s の方向が徐々に変化することを表すために、式 (20) の μ_s を基礎式として「非線形応力・ひずみ関係の重ね合わせ法則」⁶⁾ を適用する。このとき、 μ_s は次式で与えられる。

$$\mu_s = \sum_{i=1}^n \left\{ \mu_s(G^{*n} - G^{*i-1}) + \mu_s(G^{*n} - G^{*i}) \right\} \frac{\Delta\Gamma^i}{\Delta G^i} \dots (23)$$

$\Delta\Gamma^i / \Delta G^i$ は $\Delta\Gamma^i$ 方向の単位ベクトルである。肩文字 i ($=1 \sim n$) は計算の増分区間のステップ数を示す。式 (23) より、 μ_s は過去に受けたせん断ひずみ履歴を全て記憶しており、 μ_s の大きさと方向はその影響を受ける。

簡単な μ_s の計算例を Fig. 10 に示す。同図 (b) のような折れ線ひずみ経路 (O→④→⑥) でせん断した時、点⑥での μ_s の大きさと方向は次のように算定できる。同図 (a) のように $|\mu_{s1}|, |\mu_{s2}|$ を求めて、 μ_{s1} は◎方向へ、 μ_{s2} は⑥④方向へ作用させて、それらのベクトル和として μ_s が決定される。以下多数回折れ曲がる場合でも、同様にして重ね合わせてゆくことによって μ_s を

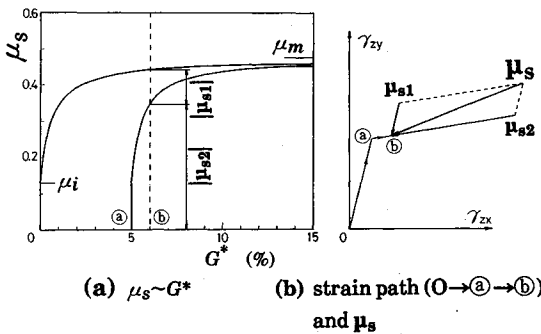


Fig. 10 Schematic view of calculation method of friction coefficient vector μ_s

求めることができる。Fig. 9(b) の μ_s の方向と大きさはこのようにして求めた計算結果である。実際の計算では、式 (23) を x 方向成分 μ_{sx} と y 方向成分 μ_{sy} とに分けて計算しており、このとき μ_s の方向 α_μ は式 (24) で与えられる。

$$\alpha_\mu = \arctan\left(\frac{\mu_{sx}}{\mu_{sy}}\right) \dots\dots\dots (24)$$

以上の考え方より、せん断ひずみ (Γ, G^*) を介して体積ひずみ ϵ_z^s と応力比ベクトル X_z (応力比の大きさと方向) の関係が求められた。Fig. 11 におわんモデルの構成図を示す。

4. パラメータとその決定法

おわんモデルのパラメータは、 ϵ_r 成分に関して A, B , ϵ_G 成分に関して C, D, μ_s に関して μ_0, μ_m である。以下これらのパラメータの決定法について述べる。

(1) ϵ_G 成分に関するパラメータ: C, D

まず適当なひずみ振幅で直線経路の繰返し等圧排水単純せん断試験を行う。この場合、一様振幅でなくてもよく振幅は $\gamma_{zy} = \pm 0.5\% \sim \pm 5\%$ 程度が適当である。ここでは $\pm 5\%$ の一様振幅としている。そして体積ひずみ ϵ_z^s と累加せん断ひずみ G^* との間に Fig. 12 に示すような結果が得られたとする。 $G^* \sim \epsilon_G$ なるマスターカーブはおわんの底 ($\Gamma = 0$) の軌跡を意味するから、図中の $\Gamma = 0$ における ϵ_G (◎印) を連ねたカーブ (破線) がマスターカーブとなる。 ϵ_G 成分は式 (5) のように双曲線と仮定しているの、 $\Gamma = 0$ での◎印を $G^* \sim G^*/\epsilon_z^s$ 関係で整理すれば、次式のような直線関係となり、パラメータ C, D は決定できる。

$$\frac{G^*}{\epsilon_z^s} = C + DG^* \text{ at } \Gamma = 0 \dots\dots\dots (25)$$

Fig. 13(a) には鉛直応力 σ_z を 100 kN/m², 200 kN/m², 500 kN/m² の下で行った $\Gamma = 0\%$ での ϵ_z^s を示す。図より、 $\sigma_z = 200$ kN/m² における値は $C = 8, D = 0.3$ となる。 $1/C$ はせん断初期におけるダイレイタンスの勾配で、 C の値が小さいほどせん断初期の圧縮量が大きくなる。

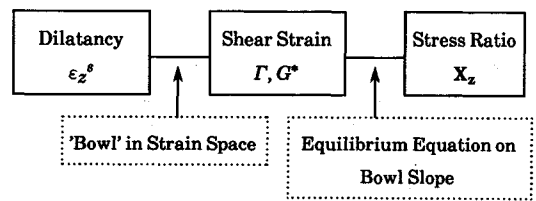


Fig. 11 Constitution of 'Bowl model'

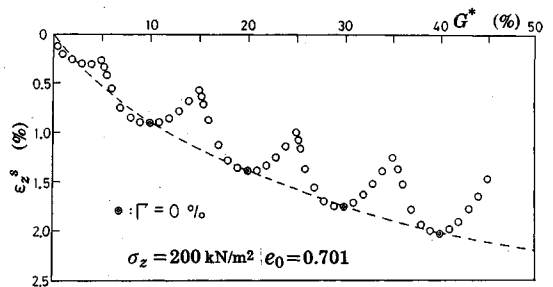


Fig. 12 Dilatancy ϵ_z^s in uni-directional cyclic shearing.

$1/D$ は双曲線の漸近線で $\Gamma = 0$ での最終圧縮量である。よって、一方向の数回の繰返しせん断試験のデータを Fig. 13(a) のように $G^* \sim G^*/\epsilon_z^s$ 関係で整理し D を読み取れば、いかなる経路でせん断したときの最終圧縮量も予測できる。また同図に示すように、 σ_z が大きいほどよく圧縮する。図より切片 C はほぼ一定であるが、傾き D は σ_z とともに変化するようである。そこで $1/D$ を σ_z の対数に対してプロットすると、 Fig. 13(b) のようにほぼ直線となる。この直線の勾配を C_D , $\sigma_z = \sigma_{zi}$ における $1/D$ を $1/D_i$ とすれば、 D は次式で与えられる。

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_i} + C_D \log \frac{\sigma_z}{\sigma_{zi}} \dots\dots\dots (26)$$

ϵ_G 成分は圧縮側のダイレイタンスを表し、よく圧縮する土ほど C, D_i の値は小さくなる。

(2) ϵ_r 成分に関するパラメータ: A, B

Fig. 12 示す一方向繰返しせん断において、体積ひずみが波打つのは ϵ_r 成分が存在するためである。そこで、おわんの形状を決めるパラメータ A, B については、マスターカーブ ($G^* \sim \epsilon_G$) 決定後に、 Fig. 12 の一方向繰返しせん断試験結果の波打つダイレイタンスカーブへのフィッティングにより決定する。 ϵ_r 成分は膨張側のダイレイタンスを表すので A の値は負であり、その絶対値が大きいほどダイレイタンスの波打つ度合いも大きくなる。 B は経験的に 1.6 程度の値であり土の種類や密度によらないようである。

(3) 摩擦係数 μ_s に関するパラメータ: μ_0, μ_m

μ_0 は、実測値より単調載荷における最大圧縮点 ($d\epsilon_z^s = 0$) の応力比 (τ_z/σ_z) として求められる。 μ_m については、まず式 (17) を式 (27) のように変形し、この式より実測値 (X_z と $\tan\theta = d\epsilon_z^s/d\gamma_{zy}$) を用いて μ_s を逆算

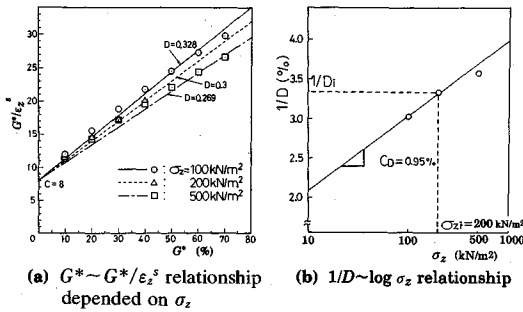


Fig.13 Confining stress dependency of parameter D.

Table 1 Parameters of 'Bowl model' for Toyoura sand ($e_0 \approx 0.71$)

膨張成分を規定		圧縮成分を規定		μ_s を規定		
A (% ^{1-β})	B	C	D_i (% ⁻¹)	C_D	μ_o	μ_m
-0.03	1.6	8.0	0.3	0.95	0.42	0.47

(D_i は $\sigma_{zi}=200\text{kN/m}^2$ のときの値)

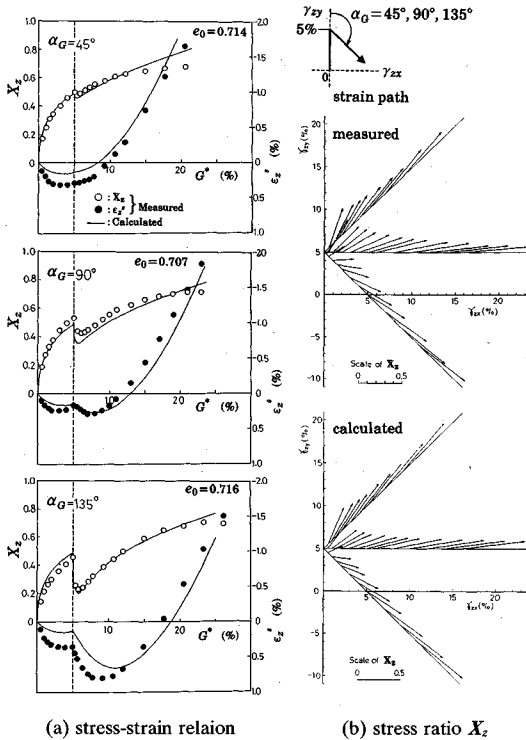


Fig.14 Comparison of measured values with calculated values in bi-linear strain path ($\sigma_z=200\text{kN/m}^2$).

する。その結果得られる μ_s の最大値として μ_m が求められる⁶⁾。

$$\mu_s = \frac{X_z - \tan \bar{\theta}}{1 + X_z \tan \bar{\theta}} \dots (27)$$

Table 1 には以上のような方法で求めた豊浦砂 (初期

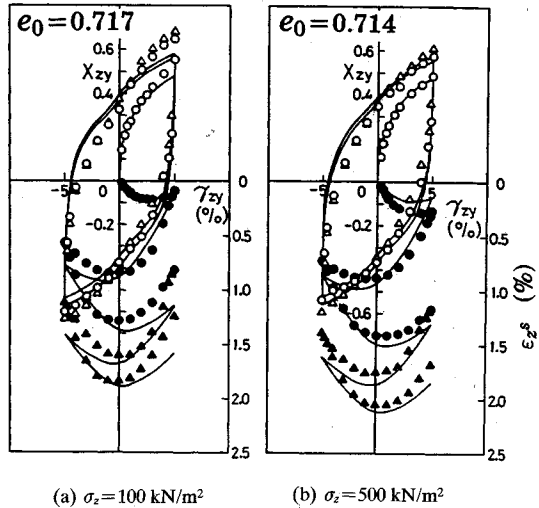


Fig.15 Comparison of measured values with calculated values in repeated uni-directional strain path.

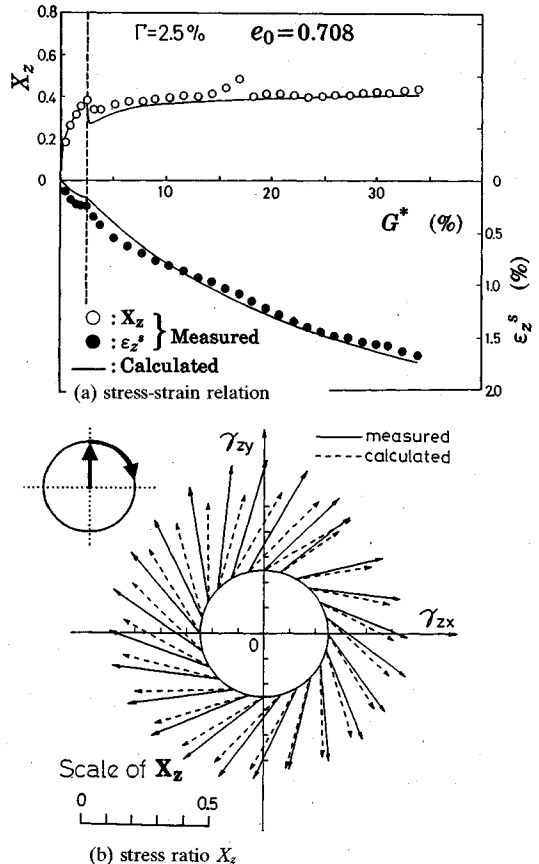


Fig.16 Comparison of measured values with calculated values in circular strain path ($\sigma_z=200\text{kN/m}^2$).

間隙比 $e_0 \approx 0.71$ のパラメータの値を示している。本研究では、ひずみを%単位で表してパラメータの値を設定している。このとき式(5)から分かるように、A

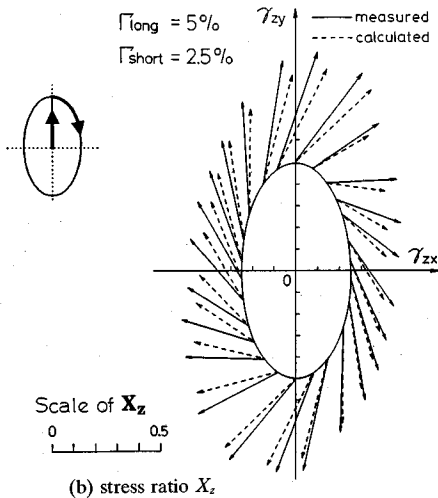
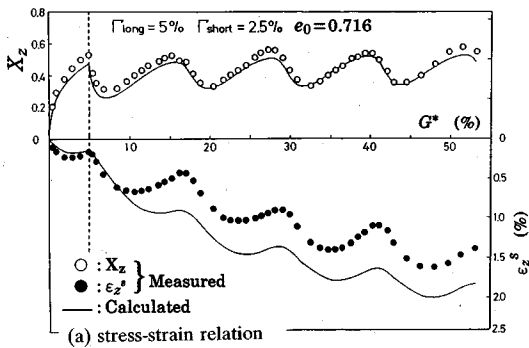


Fig. 17 Comparison of measured values with calculated values in elliptic strain path ($\sigma_z=200 \text{ kN/m}^2$).

の単位は $\%^{1-B}$, D_i の単位は $\%^{-1}$ となる。

5. 種々の経路における排水繰返しせん断の解析

ここでは Table 1 に示すパラメータを用いて、種々の経路下における排水繰返しせん断の解析を行い、実測値と比較検討する。実験は全てひずみ制御で行っており、 σ_z は実験中一定である。初期間隙比 e_0 は0.69~0.73の範囲でばらついている。実験の概要については文献³⁾を参照されたい。

Fig. 14(a)には、図中に示すように y 方向へ $\gamma_{zy}=5\%$ までせん断した後、 y 方向からそれぞれ $\alpha_c=45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ の直線方向へせん断した場合の応力・ひずみ関係を示す。 α_c が大きいかほどおわんの底の方を通るので、体積ひずみはより圧縮することになり、実測値からもその傾向がうかがえる。Fig. 14(b)は、同じ実験における応力比ベクトル X_z の方向と大きさを示しているが、計算値は X_z の方向が徐々にせん断方向に向いていく傾向をよく説明している。

Fig. 15には、振幅 $\gamma_{zy}=\pm 5\%$ の一方方向繰返しせん断の応力・ひずみ関係を示す。圧縮成分である ε_c を G^*

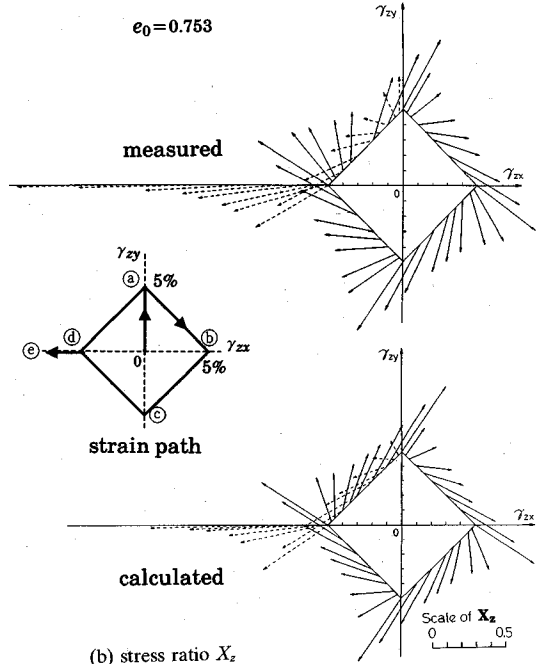
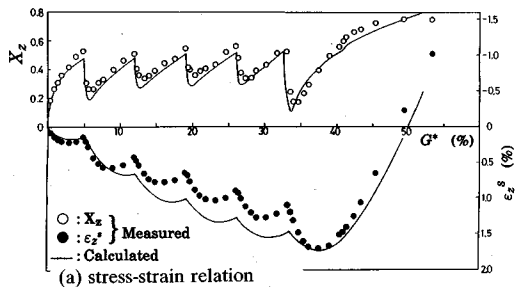


Fig. 18 Comparison of measured values with calculated values in square strain path ($\sigma_z=200 \text{ kN/m}^2$).

に対して双曲線としているため、せん断とともに圧縮増分量は小さくなり、角度 $\bar{\theta}$ も膨張傾向が強くなっていく。おわんモデルでは、そのような斜面上での応力の釣り合いより応力比が算定されるため、せん断とともに履歴ループが立つ傾向が表現できるが、実測値からもその傾向がうかがえる。

Fig. 16(a)は、 $\Gamma=2.5\%$ の円経路に沿って2周せん断したときの応力・ひずみ関係である。ただし、図中の破線のところまでは半径方向（ここでは y 方向）に $\Gamma=0\%$ から 2.5% までの先行せん断を示す。円経路せん断では ε_r 成分が一定となるため、 $\varepsilon_z^s \sim G^*$ 関係は滑らかな曲線となっている。同図(b)には、1周目のせん断における X_z の方向と大きさを示す。

Fig. 17(a)は、 $\Gamma_{long}=5\%$, $\Gamma_{short}=2.5\%$ の楕円経路に沿って2周せん断したときの応力・ひずみ関係である。同図(b)は1周目のせん断における X_z の方向と大きさである。楕円経路では粒子はおわんを上り降りしな

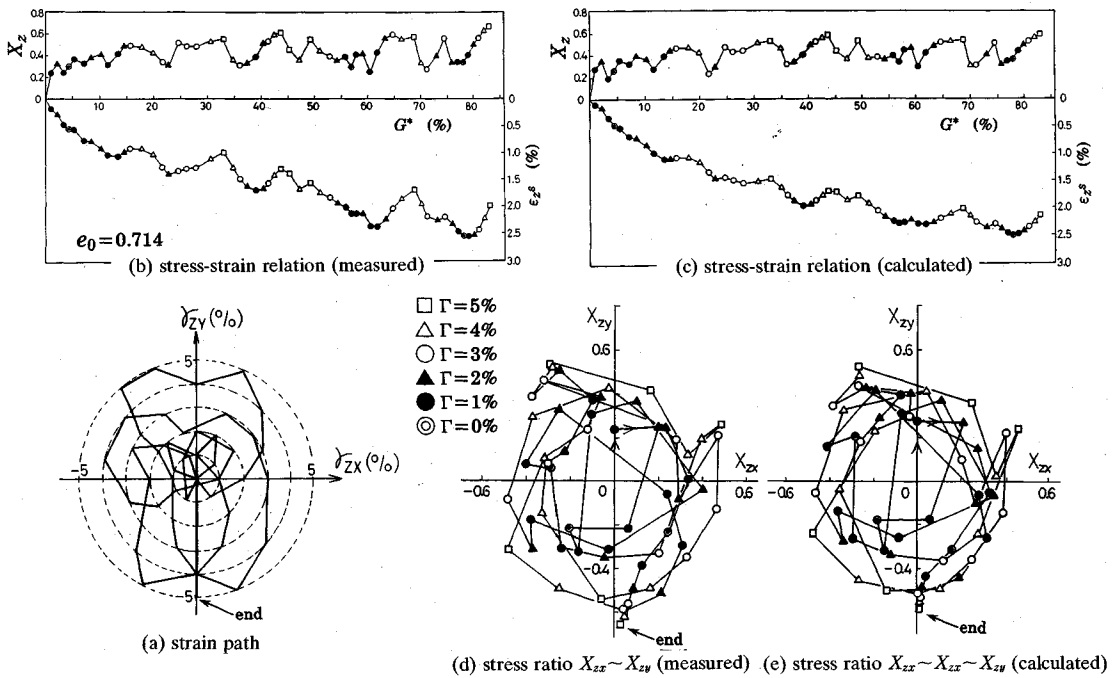


Fig.20 Comparison of measured values with calculated values in random strain path ($\sigma_z=200 \text{ kN/m}^2$).

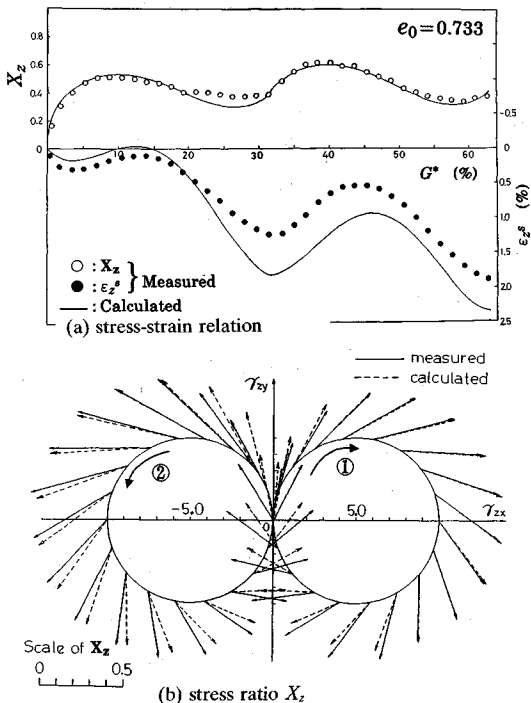


Fig.19 Comparison of measured values with calculated values in 8-shaped strain path ($\sigma_z=200 \text{ kN/m}^2$).

がらせん断されることになるので、 ε_z^s はなめらかに波打ちながら圧縮することになるが、その様子は実測値からもうかがえる。

Fig.18 は、四角形ひずみ経路 (0)→(a)→(b)→(c)→(d)→(a)→(d)→(e)) にそってせん断した時の応力・ひずみ関係と、 X_z の方向と大きさである。計算値は実測値をほぼ妥当に説明している。

Fig.19 は、半径 5% の円を二個組み合わせた 8 の字経路せん断試験における応力・ひずみ関係と、 X_z の方向と大きさである。両図とも計算値は実測値をほぼ妥当に説明している。

Fig.20(a) は、実際の地震の水平面上の変位軌跡を意識して行ったせん断試験のひずみ経路を示している。経路は折線であって折れ曲がり点では Γ がちょうど 0%, 1%, 2%, 3%, 4%, 5% となっている。Fig.20(b), (c) は、このようなランダムな経路に沿ってせん断したときの応力・ひずみ関係である。実験ではひずみ経路の折れ曲がり点のみで測定しプロットしており、図中の実線は単にそのプロットを結んだものである。同図 (b) に示す計算値もひずみ経路の折れ曲がり点のみで計算しプロットしたものを直線で結んでいる。実測値・計算値ともに Γ が同じところでの結果はプロットの形を同じにしてある。

実測値において注目すべきは、一見ランダムに圧縮してゆくように見える体積ひずみも、 Γ が同じ所でみてもやれば一本の滑らかな曲線となることである。例えば、 \square プロットを連ねると波打たない滑らかな一本の曲線となる。このように全くランダムな経路においても、 Γ をパ

ラメータとした曲線が存在することは、おわんモデルのダイレイタンスの式(5)の妥当性を証明するものである。Fig.20(d), (e)は同じ実験における応力比経路の実測値と計算値である。計算値は実測値をかなり良く説明している。

以上の実験結果と解析結果の比較より、おわんモデルに基づく応力・ひずみ関係が、単純せん断を想定した多方向せん断のいかなるせん断経路に対しても実測値を統一的によく説明しうることが検証された。

8. 結 論

本研究では、実際の地震時の地盤の挙動を解明するため、単純せん断面上でのせん断応力・せん断ひずみ・ダイレイタンス関係の定式化を行い、おわんモデル(Bowl Model)を提案した。おわんモデルは、ひずみ空間におけるおわん上の斜面が G^* とともに圧縮してゆくメカニズムと、おわん斜面上の応力の釣り合い式から構成され、任意方向への繰返しせん断挙動が説明可能である。

また、任意方向にせん断できる単純せん断試験機を用いて、直線、円、8の字、ランダムなどの種々の経路の排水繰返しせん断を実施した。おわんモデルを用いて、これら種々の繰返しせん断の応力・ひずみ関係を解析し、単純せん断を想定した多方向せん断のいかなる経路においても実測値を精度良く説明することができた。

なお、本論文は第一著者が名古屋工業大学大学院に在学中に行った研究をまとめたものである。本論文を執筆するにあたり、実験等で御援助いただき有益な御助言を頂いた竹田一夫助手(現・愛知県庁)、陳越副教授(現・蘇州城建環学院(中国))、学部生宮林辰雄氏、森山幸司氏(現・建設省)、伊藤学氏(現・五洋建設)、三田村裕和氏(現・北陸事務機)に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Pyke, R., Seed, H.B. and Chan, C.K.: Settlement of sands under multidirectional shaking, JGED, ASCE, Vol.101, No.GT 4, pp.379~398, 1975.
- 2) Ishihara, K. and Yamazaki, F.: Cyclic simple shear tests on saturated sand in multi-directional loading, Soils and Foundations, Vol.20, No.1, pp.45~59, 1980.
- 3) 福武毅芳・松岡 元:任意方向単純せん断におけるダイレイタンスの統一的解釈, 土木学会論文集, No.412/III-12, pp.240~248, 1989.
- 4) 福武毅芳・松岡 元・竹田一夫・陳 越:任意方向単純せん断における体積ひずみ特性, 39回土木学会年次講演会III, pp.57~58, 1984.
- 5) 松岡 元・福武毅芳・伊藤 学・三田村裕和:任意方向単純せん断時の砂の応力・ひずみ関係と液状化解析, 第20回土質工学研究発表会, pp.287~290, 1985.
- 6) 陳 越・松岡 元:重ね合わせ法則と球モデルに基づいた砂の任意方向単純せん断試験の解析, 土質工学会論文報告集, Vol.25, No.4, pp.147~158, 1985.

(1992.5.20 受付)

STRESS-STRAIN RELATIONSHIP UNDER MULTI-DIRECTIONAL CYCLIC SIMPLE SHEARING

Kiyoshi FUKUTAKE and Hajime MATSUOKA

The authors developed a new constitutive model of soil which is called the 'Bowl model' by introducing a cumulative shear strain G^* and a resultant shear strain Γ . The bowl model enable us to calculate the behavior of soil elements under cyclic simple shearing in x and y directions (multi-directional shearing). Using this model, numerical simulations of simple shear tests under several loading patterns were conducted. Numerical results obtained by the model were in good agreements with laboratory test results in terms of the stress-strain-dilatancy relation during arbitrary loading.