

単純なネットワーク上に分布する需給点ペア間の連結確率の理論解

川上英二*

道路交通システムなどのように、システム上のどの地点も、供給、需要地点のいずれにもなりうるようなシステムに対し、最も基本的なモデルを作成し、物理的な被害と機能的な支障との関係を解析的に検討した。扱った基本的なシステムは、開路・閉路・分岐システムであり、破壊の箇所数、需給点ペア間の距離の関数として連結確率の解析解を、また、連結している需給点ペア間の距離の期待値を算定した。

Keywords : lifeline systems, connectivity, earthquakes, reliability

1. 序 文

近年、ライフラインシステムを構成する個々の構造物^{た_とえば^{(1)~(3)}}の信頼性に基づいて、システム全体の機能上の耐震性を評価する研究がいくつか行われるようになってきている^{3)~23)}。供給地点と需要地点との連結性に着目して地震後の信頼性を扱ったもの^{4)~10)}、システム内で移動される物の特性を定量的にとらえ、地震後の機能低下を扱ったもの^{10)~14)}、さらには復旧期間中の機能回復の状況を復旧の戦略と関係付けて求めたもの^{13), 15)~23)}などがある。そして、地盤条件、構造物の強度、地震動の激しさの程度等がシステム内の場所により異なるような現実に近い条件をも考慮に入れて、複雑な形状をしたシステムの信頼性を推定する方法がモンテカルロ法をはじめいくつか提案されている。

しかし、数十個から数百個の要素から構成される比較的複雑なシステムに対する信頼性の評価が可能になった反面、数個から数十個の要素から構成される比較的単純な形をした基本的なネットワークシステムに対しても、その信頼性が十分に明らかにされているわけではない。比較的複雑なシステムに対して信頼性の数値解を求めることが可能になった一方、数個の要素から構成される単純なシステムに対しても、理論解、解析解が求められているわけではない。これらの単純な基本的なシステムは、現実のシステムを最も単純にモデル化したものであると考えられるばかりでなく、階層的に組み合わせると現実のシステムに類似することが多い。単純なシステムに対しネットワークシステムの信頼性を十分に検討することは、ネットワークを構成させることによるシステム信頼性の変化を推測する直観を養うことになり、実際のシステムを設計するに際しての1つの視点を与えるもので

あり重要なことであると考ええる。

このことは、力学の問題に対して次のように例えることも可能かもしれない。力学の分野においては、有限要素法、境界要素法などの方法により、かなり複雑な問題に対しても数値解を求めることが可能になってきている。しかし、古典的な梁の理論などの解析解、理論解も同様に重要である。ライフラインの信頼性の分野においても、モンテカルロ法が有限要素法に対応する数値解を求めるための有力な方法であることは、疑いの余地がないが、単純なシステムに対する理論解、解析解も重要であると考ええる。

また、ライフラインシステムは非常に多くの要素から構成されているため、解析方法の改良および近年の計算機の能力の飛躍的な増大にも拘らず、末端施設までのすべての要素を考慮して機能支障の解析を行うことは困難である。このため、システムを高次(幹線)施設と、低次(末端)施設とに分離し、高次施設に対しては実際の個別データを用いてネットワーク解析を行うが、低次施設に対しては、代表的で単純なモデル化を行い、物理的な被害と機能的な支障とを簡単な関数で直接に関係付けるなど、解析に際しての単純化が行われている^{21), 23)}。

以上のような観点から、著者は、参考文献(24), (25)において、特に、上水道または電力システムなどのように、供給地点と需要地点とが明確に分離されているような供給システムを対象とし、物理的な被害と機能的な支障との関係を解析的に検討した。これに対し、本論文においては、道路交通システムなどのように、供給地点、需要地点の区別ができず、どの地点も、これらのいずれにもなりうるようなシステムを対象にして、解析的な検討を行った。

この物理的な被害と機能的な支障との関係としては、さらに現実に近い値を得るため、専門家の判断により^{21), 22)}、または、実際に近いネットワークに対する大規

* 正会員 工博 埼玉大学助教授 工学部建設工学科
(〒338 浦和市下大久保 255)

模な計算結果により求める方法も考えられる。しかし、得られた結果は、対象とした地域およびシステムにより大きな影響を受けるため、本研究で行っているような単純なネットワークに対する定性的な知見と併せて検討しておく必要があるものと考ええる。

本論文中、2.では、ネットワークシステムのモデル化および解析に際して行った仮定をまとめて示してある。3.では最も基本的なシステムとして開路（直線，開曲線）システムを、4.では閉路（円形，閉曲線）システムを、5.では分岐（人形，Y形）システムを対象とした。そして、これら基本的ないくつかのシステムに対して、地震直後における物理的な被害（破壊箇所数）と機能的な支障（連結性）との関係を検討するための解析的な方法を展開した。

2. 解析の仮定

本論文では、道路交通・システムなどのように、供給施設（地点）、需要施設（地点）の区別ができず、どの地点も、これらのいずれにもなりうるようなシステムを対象にした。そして、機能的な支障としては、簡単化のため、まず、システムの連結性のみに着目した。この連結性の基準は従来の研究^{4)~10)}が示すようにライフラインの信頼性を考えるための第1段階であると考えられる。設定した基本的な仮定は次のとおりである。

① システムをリンクからなるネットワークと考え、供給点（インプット）および需要点（アウトプット）はそれぞれ1つとし、それらの位置は、ネットワーク上に独立、一様、ランダムに発生するものとする。すなわち、供給点と需要点の位置は、互いに独立であり、発生確率はネットワーク上のどの場所においても等しく一様にランダムに発生するものとする。また、需要点、供給点は破壊しないものとする。

② システムの機能的な支障はリンク上に発生する破壊により生ずるものとする。破壊は①の供給点、需要点と同様に、ネットワーク上に独立、一様、ランダムに発生するものとする。また、破壊箇所は点とみなす。

③ 供給点と需要点と（今後、「需給点ペア」または「需給点」とも呼ぶ）を結ぶどの経路（パス）上にも一つ以上の破壊が存在している場合には連結していないとし、破壊が存在していない経路がひとつでもある場合には連結していると仮定する。例えば、図-1に示すシステムに対して×印の箇所破壊が生じた場合には、供給点1と需要点1とは連結（機能）しておらず、供給点2と需要点2とは連結していることになる。

そして、供給点、需要点、 N 個の破壊が①②のように生じる場合を全事象とし、この内、供給点と需要点と（需給点ペア）が③のように連結している事象 E が生じる確率を、連結確率 $P(N)$ と定義する。

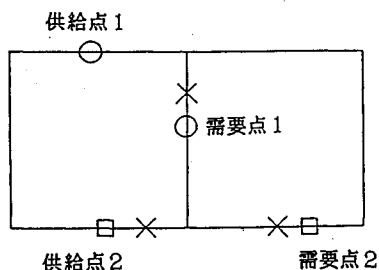


図-1 連結の定義（×：破壊箇所）

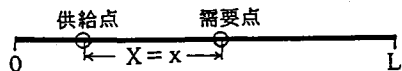


図-2 開路システム

$$P(N) = \text{Probability}(E | \text{破壊箇所数} = N) \dots \dots (1)$$

以上の仮定のうちのいくつかは拡張することが可能であるものと考えられる。しかし、いたずらに仮定を複雑にすると本質を見失うおそれがあると考え、最も基本的であると考えられる仮定を設定した。以下には基本的なネットワークモデルとして開路システム、閉路システム、分岐システムを考えて、需給点ペア間距離の確率密度関数、破壊箇所数と連結確率との関係、連結している需給点ペア間の距離の期待値等を解析的に算定する方法を展開した。また、多数回のシミュレーションを行うことにより、理論解の確認を行った。

3. 開路システム

(1) 需給点ペア間距離の確率密度関数

まず、図-2に示すような長さ L の開路システムを考え、この上に、1点の供給点と1点の需要点とを、独立、一様、ランダムに想定した場合、これらの2点間の距離 X の分布がどのようになるかを算定する。

図-3に示すように、供給点の位置を横軸に、需要点の位置を縦軸にとると、これら2点間の距離 X が x 以下となる場合は斜線で示す場合で表すことができ、需給点の分布が一様であることより、その確率は、斜線の面積を、全体の面積で割った値として求められる。すなわち、需給点ペア間距離 X の確率分布関数 $F_X(x)$ は、次式で求められる。

$$F_X(x) = (2xL - x^2) \cdot \frac{1}{L^2} = \frac{2}{L}x - \frac{1}{L^2}x^2 \dots \dots (2)$$

これを x で微分したものが需給点ペア間距離の確率密度関数 $f_X(x)$ であり、

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{2}{L} - \frac{2}{L^2}x \dots \dots (3)$$

であり、これを図-4中に太線（破壊箇所数 $N=0$ ）で示す。供給点と需要点とが開路システム上に、独立、一様、ランダムに発生した場合、これらの2点間の距離は

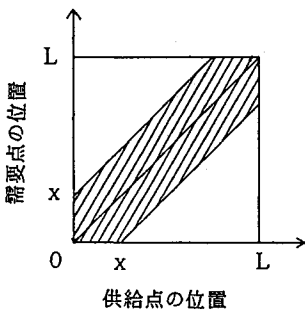


図-3 需給点ペア間距離が x 以下となる供給点と需要点の位置の関係 (開路システム)

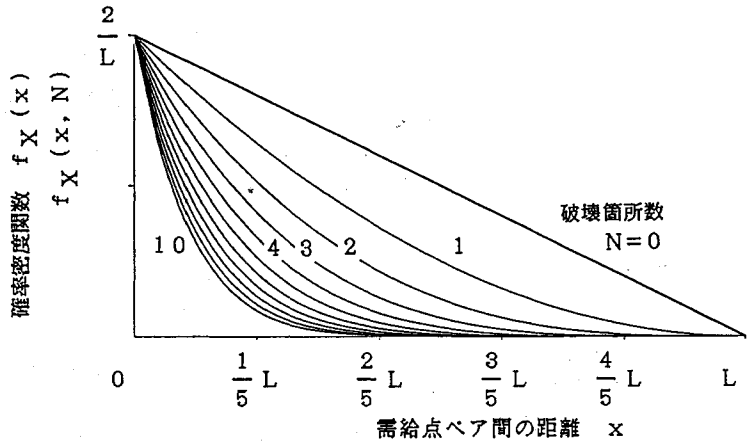


図-4 連結している需給点ペア間距離の確率密度関数 (開路システム)

短い場合ほど多く、距離の増加と共に線形的に減少する事がわかる。

(2) 連結確率

(1) で述べたように定めた供給点および需要点を有する全長 L の開路システム上に、独立、一様、ランダムな N 個の破壊が生ずる場合に、需給点ペア間が連結しているか否かを考える。供給点の位置 Y の密度関数を $h_Y(y)$ 、需要点の位置 Z の密度関数を $h_Z(z)$ とおく。供給点の位置が y 、需給点ペア間の距離が x であり、需要点が供給点の右にある場合のみをまずは考えると、需要点の位置は $z = y + x$ で表せる。 N 個の破壊が生じた場合に、需給点ペア間距離が x で、連結している確率 (今後、「連結している需給点ペア間距離 X の確率密度関数」とも呼ぶ) $f_X(x, N)$ は、 N 個の破壊のすべてが需給点ペアの外側 (図-2 中の x の両方の外側である $L - x$ の区間) に生ずる場合の確率であり、

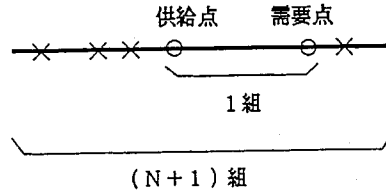
$$f_X(x, N) = 2 \int_0^{L-x} h_Y(y) \cdot h_Z(y+x) \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right)^N dy$$

$$= \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{N+1} \dots \dots \dots (4)$$

ただし、ここでは、供給点、需要点は一様に発生させる (2.①参照) ことより、

$$h_Y(y) = h_Z(y+x) = \frac{1}{L} \dots \dots \dots (5)$$

を用いている。式(4)の係数2は、供給点と需要点の左右の位置関係が逆になる場合を考えたものであり、積分範囲 $0 \sim L - x$ は、 y が移動できる範囲を示している。また、 $N=0$ の場合は、破壊が生じない場合の、需給点ペア間距離の確率密度関数を表しており、式(3)と一致している。式(4)より、破壊箇所数 N をパラメーターにとり、 $N=1 \sim 10$ に対し、連結している需給点ペア間距離 X の確率密度関数を図-4に示す。これと、先に求めた $N=0$ の太線との間の大きさが非連結となる確率を示している。破壊箇所数 N が大きい程、連結性が低下



× : 破壊箇所 (N個)

図-5 連結している場合 (開路システム)

することは当然であるが、特に、需給点ペア間距離が長い程、少ない破壊箇所数で非連結となる可能性が高いことがわかる。

次に、式(4)を x の全領域 $0 \sim L$ で積分すると連結確率 $P(N)$ が得られる。

$$P(N) = \int_0^L \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{N+1} dx = \frac{2}{N+2} \dots \dots \dots (6)$$

一方、連結確率 $P(N)$ は、順列の理論を用いて、次のように求めることも可能である。まず、 N 個の破壊箇所と2個の需給点との計 $(N+2)$ 個の順列である ${}_{N+2}P_{N+2}$ 個の順列を考える。このうち、需給点ペアが連結している場合は、図-5のように、需給点が隣り合っている場合であり、この個数は、需給点ペアを一組と考えると $(N+1)$ 個の順列 ${}_{N+1}P_{N+1}$ と、需給点 (2点) の順列 ${}_2P_2$ との積 ${}_{N+1}P_{N+1} \cdot {}_2P_2$ である。これらの各順列の発生確率が等しいことより、連結確率は次式で求められ、式(6)と一致する。

$$P(N) = \frac{{}_{N+1}P_{N+1} \cdot {}_2P_2}{{}_{N+2}P_{N+2}} = \frac{2}{N+2} \dots \dots \dots (7)$$

連結確率 $P(N)$ を破壊箇所数 N の関数として図-6の実線で示す。連結確率は、破壊箇所数の増加に伴い減少し、下に凸の関数となる。なお、解析解の確認のため、供給点、需要点、破壊点の発生シミュレーションを

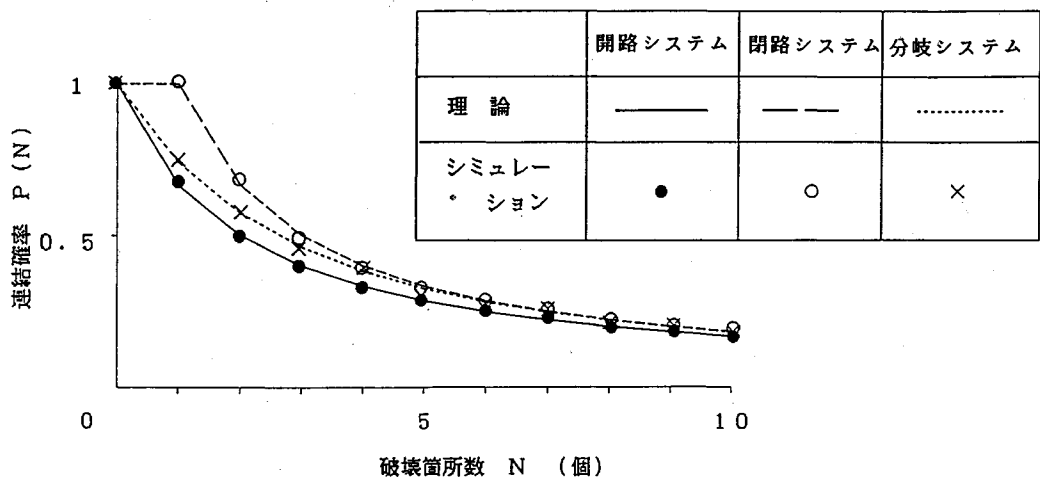


図-6 破壊箇所数と連結確率との関係

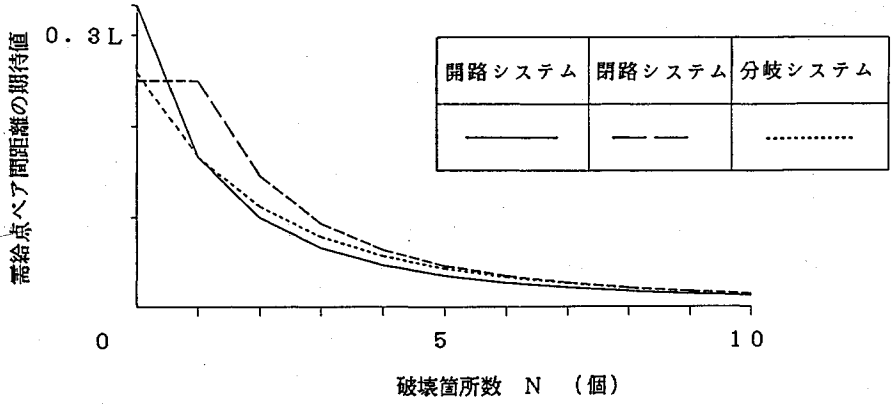


図-7 連結している需給点ペア間距離の期待値

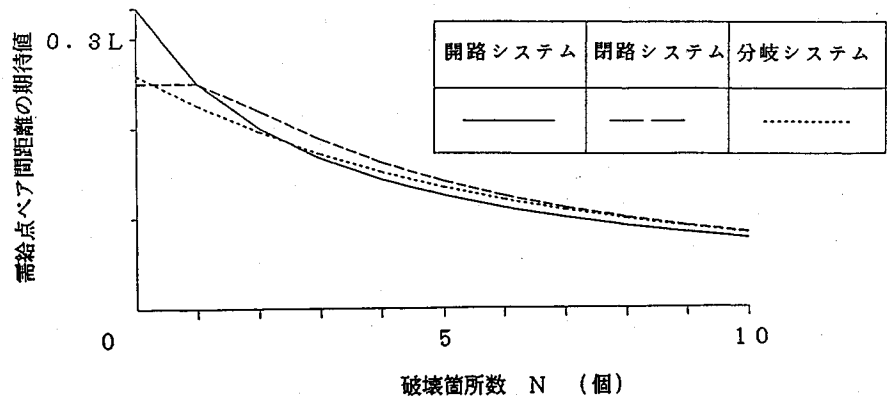


図-8 連結している条件付き需給点ペア間距離の期待値

1000 回行い、連結確率を求めた結果を●印で示してある。理論解とシミュレーションで求めた値とはほぼ一致している。

また、式(4)にxを乗じてxの全領域で積分したものが連結している需給点ペア間距離の期待値

$$\bar{x}(N) = \int_0^L \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{N+1} \cdot x dx = \frac{2}{(N+2)(N+3)} L \dots \dots \dots (8)$$

である。ただし、連結していない場合は、距離を零と考えている。式(8)で求められる需給点ペア間距離の期待

値を図-7の実線で示す。

また、式(8)を式(6)または(7)で割ったものは、連結しているという条件付の需給点ペア間距離の期待値

$$x^*(N) = \left[\int_0^{L/2} \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{N+1} \cdot x dx \right] / \frac{2}{N+2} = \frac{1}{N+3} L \quad (9)$$

である。式(9)で求められる連結しているという条件付の需給点ペア間距離の期待値を図-8の実線で示す。破壊箇所数の増加に伴い、需給点ペア間距離の期待値が減少している。尚、図-6~8中の破線および点線については、それぞれ4および5節において説明を行う。

4. 閉路システム

(1) 需給点ペア間距離の確率密度関数

まず、図-9(a)に示すような長さLの閉路システムを考え、この上に、1点の供給点と1点の需要点を、独立、一様、ランダムに想定した場合、これらの2点間の距離Xの分布がどのようになるかを算定する。

閉路システム上に、点0を図-9(a)のように適当に決め、この点を両端とするように展開する(図-9(b))。図-10に示すように、供給点の位置を横軸に、需要点の位置を縦軸にとると、これら2点間の距離Xがx以下となる場合は斜線で示す場合で表すことができる。3.(1)の開路システムの場合と同様にして、需給点ペア間距離Xの確率分布関数 $F_X(x)$ 、確率密度関数 $f_X(x)$ は次式で求められる。

$$F_X(x) = 2xL \cdot \frac{1}{L^2} = \frac{2}{L}x \quad (10)$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{2}{L} \quad (11)$$

需給点ペア間距離の確率密度関数は、図-11の太線(N=0)で示すように一定値であることがわかる。ただし、需給点ペア間距離Xとしては、左右回りの2つのルートのうち、短い方の距離をとり、 $0 \leq X < L/2$ と考えている。

(2) 連結確率

閉路システム上に、点0を図-12左図のように適当に決め、この点が両端となる右図のように展開する。破壊の数をN、需給点ペア間の距離をx、供給点の位置を $h_Y(y)$ 、需要点の位置を $h_Z(y+x)$ とし、前述の開路システムと同様に考える。需給点の位置がこのように定まった場合に連結している確率は、図-12(a)に示すように $(L-x)$ の区間にN個の破壊が生じる確率と、(b)のようにxの区間にN個の破壊が生じる確率の和である。すなわち、

$$f^*_{X}(x, N) = 2 \int_0^{L-x} h_Y(y) \cdot h_Z(y+x) \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right)^N dy$$

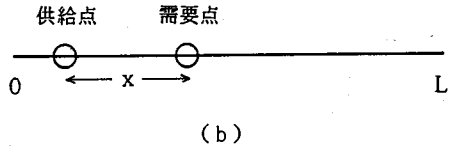
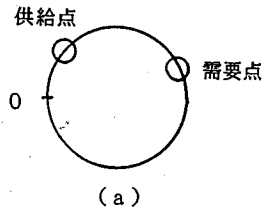


図-9 閉路システム

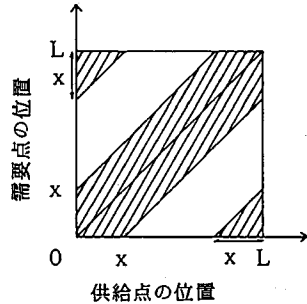


図-10 需給点ペア間距離がx以下となる供給点と需要点の位置の関係 (閉路システム)

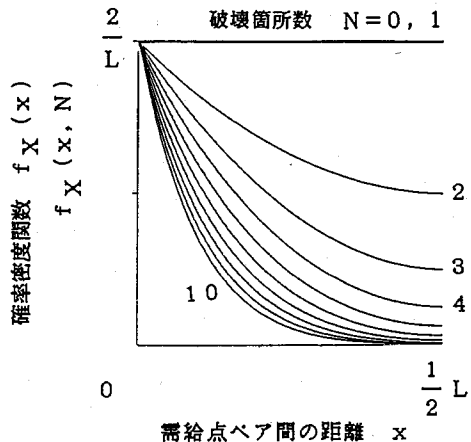


図-11 連結している需給点ペア間距離の確率密度関数 (閉路システム)

$$+ 2 \int_0^{L-x} h_Y(y) \cdot h_Z(y+x) \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^N dy = \frac{2}{L} \left\{ \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N + \left(\frac{x}{L}\right)^N \right\} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (12)$$

与えられ、これを図-13に示す。

需給点ペア間距離Xとして短い方のルートの距離を仮定すると、この値は0からL/2までの値をとる。そして、需給点ペア間距離Xがxに等しい場合とは、X

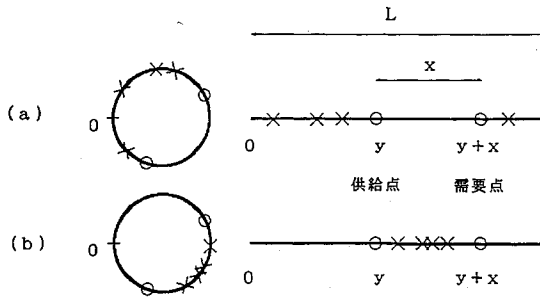


図-12 閉路システムの展開
(○:供給点, 需要点, ×:破壊箇所)

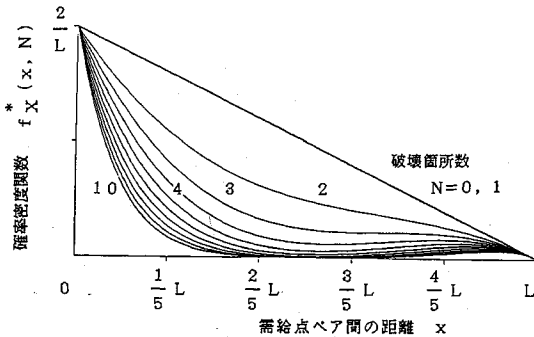


図-13 確率密度関数 $f_x^*(x, N)$

$=x$ の場合と $X=L-x$ の場合との和で表される。すなわち、需給点ペア間距離 X の確率密度関数は、

$$f_x(x, N) = f_x^*(x, N) + f_x^*(L-x, N) = \frac{2}{L} \left\{ \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N + \left(\frac{x}{L}\right)^N \right\} \dots (13)$$

で求められ、これを、図-11に示す。

なお、需給点ペア間距離 X として連結している方のルートに沿っての距離と仮定すると、図-14に示す2つのケース (a) (b) を考えることにより、

$$f_x(x, N) = 2 \int_0^{L-x} h_y(y) \cdot h_z(y+x) \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right)^N dy + 2 \int_0^x h_y(y) \cdot h_z(y+L-x) \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right)^N dy = \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N \dots (14)$$

となる。これを図-15に示す。

式(13) (図-11) を $0 \sim L/2$ の範囲で、または、式(14) (図-15) を $0 \sim L$ の範囲で積分すると、連結する確率は、

$$P(N) = \int_0^{L/2} \frac{2}{L} \left\{ \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N + \left(\frac{x}{L}\right)^N \right\} dx = \int_0^{L/2} \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N dx = \frac{2}{N+1} \dots (15)$$

となり、これを図-6の破線で示す。閉路システムに対する式(14), (15)と、開路システムに対する式(4), (6)とをそれぞれ比較すると、閉路システムでは、開路シ

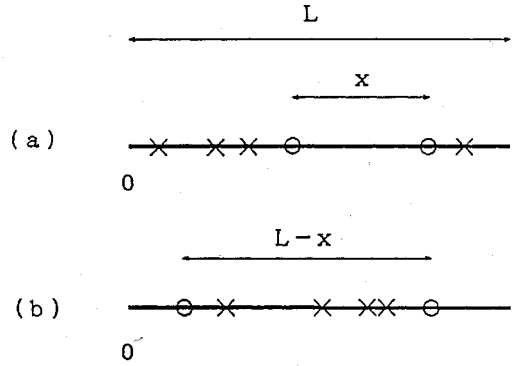


図-14 需給点ペア間距離が x で連結している場合 (閉路システム)
(○:供給点, 需要点, ×:破壊箇所)

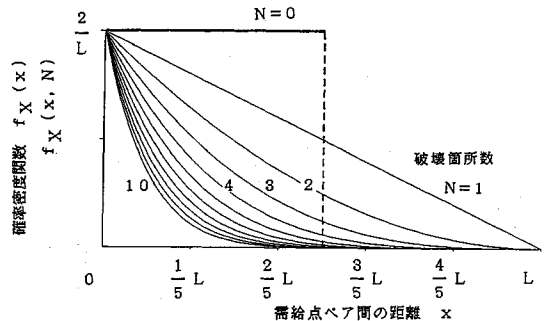


図-15 連結している需給点ペア間距離の確率密度関数 (閉路システム)

テムより破壊箇所数が1箇所少ない場合に一致している。この結果は、ループ化による冗長性の増加と信頼性の向上との関係を表すものであり重要であると考え。

式(15)の結果は、順列の理論を用いても導くことができる。閉路システムを適当に与えられた点で切断する。破壊箇所 N 個と需給点2個の合計 $N+2$ 個の順列 $N+2P_{N+2}$ のうち、連結しているのは、図-16の (a) のように需給点が隣接している場合と、(b) のように両端に需給点がある場合である。(a) の場合の数は $N+1P_{N+1} \cdot 2P_2$ 、(b) の場合の数は $NPN \cdot 2P_2$ である。従って、連結確率は次式で与えられる。

$$P(N) = \frac{N+1P_{N+1} \cdot 2P_2 + NP_N \cdot 2P_2}{N+2P_{N+2}} = \frac{2}{N+1} \dots (16)$$

次に、式(8)の開路システムの場合と同様にして、連結していない場合には (連結長さ) = 0 と考えた需給点ペア間距離の期待値は、式(13)より、

$$\bar{x}(N) = \int_0^{L/2} \frac{2}{L} \left\{ \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N + \left(\frac{x}{L}\right)^N \right\} \cdot x dx = \frac{2}{(N+1)(N+2)} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \right] \cdot L \dots (17)$$

である。本式で求められる需給点ペア間距離の期待値を図-7破線で示す。

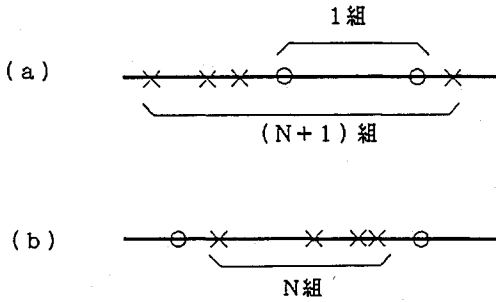


図-16 連結している場合 (閉路システム)
(○: 供給点, 需要点. ×: 破壊箇所)

また, 式(17)を式(15)または(16)で割ったものは, 連結しているという条件付の需給点ペア間距離の期待値

$$\begin{aligned} \bar{x}^*(N) &= \left\{ \int_0^{L/2} \frac{2}{L} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^N + \left(\frac{x}{L}\right)^N \right] \cdot x dx \right\} / \frac{2}{N+1} \\ &= \frac{1}{N+2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \right\} \cdot L \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

であり, これを図-8の破線で示す.

5. 分岐システム

(1) 需給点ペア間距離の確率密度関数

次に, 図-17に示すような長さ $L/3$ の3本のリンクからなる分岐システムを考え, この上に, 1点の供給点と1点の需要点を, 独立, 一様, ランダムに想定した場合, これらの2点間の距離 X の分布がどのようになるかを算定する.

分岐システム上に, 座標 x_1, x_2, x_3 を図-18のように設定し, 図-19に示すように, 供給点の位置を横軸に, 需要点の位置を縦軸にとると, これら2点間の距離 X が x 以下となる場合は斜線で示す場合で表すことができる. 3.(1), 4.(1)の場合と同様に, 需給点ペア間距離 X の確率分布関数 $F_X(x)$ は,

$$F_X(x) = 2xL \cdot \frac{1}{L^2} = \frac{2}{L}x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{3}L\right) \dots\dots (19)$$

$$F_X(x) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{L}x - \frac{3}{L^2}x^2 \quad \left(\frac{1}{3}L \leq x \leq \frac{2}{3}L\right) \dots\dots (20)$$

確率密度関数 $f_X(x)$ は,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{2}{L} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{3}L\right) \dots\dots (21)$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{4}{L} - \frac{6}{L^2}x \quad \left(\frac{1}{3}L \leq x \leq \frac{2}{3}L\right) \dots\dots (22)$$

これらを図-20の太線 ($N=0$) で示す.

(2) 連結確率

分岐システム上に, 破壊の数を N , 需給点ペア間の距離を x , 供給点の位置を $h_Y(y)$, 需要点の位置を $h_Z(y+x)$ とし, 前述の開路システムと同様に考える. 図-21(a)のように, 需要点, 供給点が何れもリンクA上にあり, 需給点ペア間が連結で, 距離が x である密度

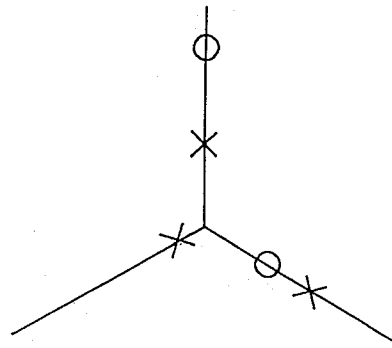


図-17 分岐システム
(○: 供給点, 需要点. ×: 破壊箇所)

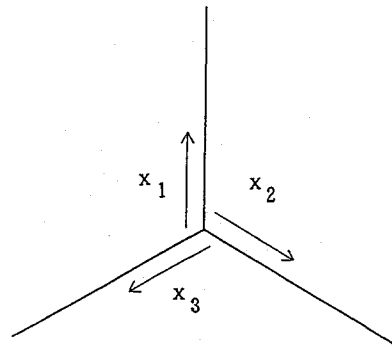


図-18 座標

関数 $f^*_X(x, N)$ は, y 座標を図のようにとると,

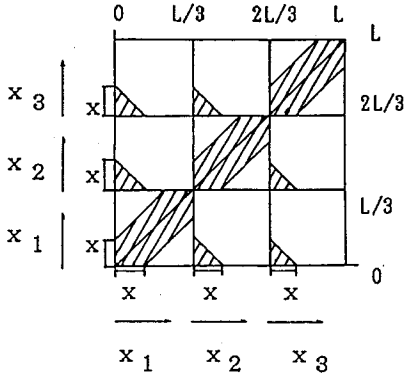
$$\begin{aligned} f^*_X(x, N) &= 2 \int_0^{L/3-x} h_Y(y) \cdot h_Z(y+x) \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right)^N dy \\ &= \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{L}\right) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{3}L\right) \\ &\dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

一方, y 座標をリンクA, B上に図-21(b)のようにとり, 需要点, 供給点が何れもリンクAまたはB上にあり, 連結である密度関数 $f^{**}_X(x, N)$ は

$$\begin{aligned} f^{**}_X(x, N) &= 2 \int_0^{2L/3-x} h_Y(y) \cdot h_Z(y+x) \cdot \left(\frac{L-x}{L}\right)^N dy \\ &= \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{L}\right) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{2}{3}L\right) \\ &\dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ただし, 式(23), (24)中の係数2は, 需給点の位置を交代しても良いことに対応している. 式(24)には, 図-21(a)のように, 需給点が何れもリンクAの上にある場合, および, リンクBの上にある場合を含んでいる. 需給点の配置には, 図-21(b)のように, リンクA, B上にある場合の他に, B, C上, C, A上にある場合の3通りがある. しかし, 単なるこれらの和(すなわち, 3倍)では, 需給点がA, B, Cそれぞれのみにある場合が2度ずつ数えられてしまうため, 結局, 連

$0 \leq x \leq L/3$ の場合



$L/3 \leq x \leq 2L/3$ の場合

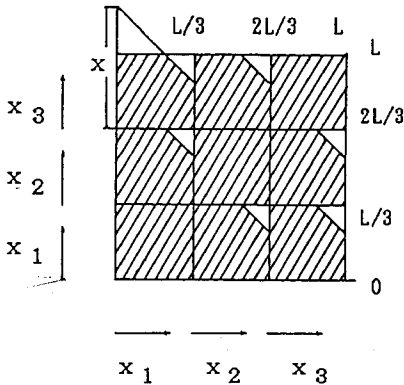


図-19 需給点ペア間距離が x 以下となる供給点と需要点の位置の関係 (分岐システム)

結している需給点ペア間距離の確率密度関数 $f_x(x, N)$ は

$$f_x(x, N) = 3f^{**}_x(x, N) - 3f^*_x(x, N) \\ = \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{3}L\right) \dots (25)$$

$$f_x(x, N) = 3f^{**}_x(x, N) \\ = \frac{6}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{1}{3}L \leq x \leq \frac{2}{3}L\right) \\ \dots (26)$$

となり、図-20 に示す。よって連結する確率は、

$$P(N) = \int_0^{L/3} \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N dx \\ + \int_{L/3}^{2L/3} \frac{6}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{L}\right) dx \\ = \frac{2}{N+1} + \frac{6}{N+1} \cdot \frac{1}{N+2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{N+2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{N+2} \right\} \\ \dots (27)$$

となり、図-6 の点線で示す。シミュレーションによる結果 (×印) と良く一致していることがわかる。

連結していなければ、(連結距離)=0 と考えた場合の

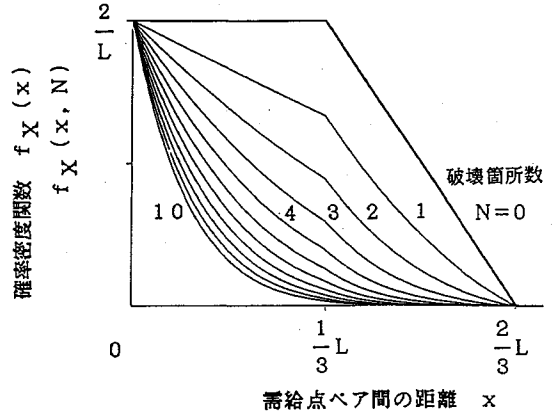


図-20 連結している需給点ペア間距離の確率密度関数 (分岐システム)

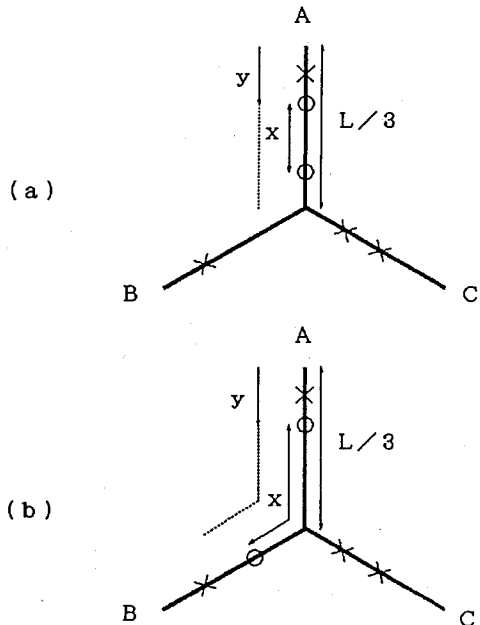


図-21 需給点ペア間距離が x で連結している場合 (分岐システム) (○: 供給点, 需要点. ×: 破壊箇所)

需給点ペア間の距離の期待値は

$$\bar{x}(N) = \int_0^{L/3} \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N dx \\ + \int_{L/3}^{2L/3} \frac{6}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{L}\right) dx \\ = \frac{L}{(N+1)(N+2)} \left\{ 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{N+2} + 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{N+2} \right\} \\ + \frac{12L}{(N+1)(N+2)(N+3)} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{N+3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{N+3} \right\} \\ \dots (28)$$

であり、図-7 の点線で示す。

また、連結している条件付の期待値は、

$$\begin{aligned} \bar{x}^*(N) = & \left\{ \int_0^{L/3} \frac{2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N x dx \right. \\ & \left. + \int_{L/3}^{2L/3} \frac{6}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^N \left(\frac{2}{3} - \frac{x}{L}\right) x dx \right\} / P(N) \\ & \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

つまり、式(28)/式(27)となり、図-8の点線で示す。

6. 結 論

道路交通システムなどのように、システム上のどの地点も、供給、需要地点のいずれにもなりうるようなシステムに対し、破壊箇所数（物理的な被害）と需給点ペア間の連結性（機能的な支障）との関係を解析的に検討した。

扱った最も基本的なシステムは、開路、閉路、分岐システムである。これらの3つのシステムに対し、一対の供給点・需要点とN個の破壊箇所とがネットワーク上に独立、一様、ランダムに発生するものと仮定した。

まず、需給点ペア間の距離の確率密度関数の解析解を式(3), (11), (21,22)のように算定した。ただし、3つの括弧は順に開路、閉路、分岐システムに対応し、以下も同様である。また、N個の破壊箇所が生じた場合の、需給点ペア間距離 $X=x$ で連結している確率を式(4), (13,14), (25,26)のように定式化した。また、需給点ペア間の連結確率の解析解を、式(6), (15), (27)のように求めた。更に、需給点ペア間の距離の期待値の解析解を式(8,9), (17,18), (28,29)のように算定した。また、多数回のシミュレーションを行うことにより、連結確率の理論解の確認を行った。

これらの結果は、システムの形状の簡単な仮定、需給点および破壊位置の独立性・一様性の仮定、機能としての連結性能の仮定など数多くの単純な仮定のもとでの解析結果であり、ネットワーク一般を対象として、その基本的な理論解を提供するものである。また、更に検討すべき点も多く残っている。しかし、仮定が簡単であり基本的である程得られた結果はシステムの特性の一面を表わしているものと考えられる。得られた結果は、システムの信頼性を考えるうえでの一つの判断材料になり得るものと考ええる。

参 考 文 献

- 1) 岡本舜三：耐震工学，オーム社，1971.
- 2) 久保慶三郎：地震と土木構造物，鹿島出版会，1981.
- 3) 高田至郎：ライフライン地震工学，共立出版，1991.
- 4) Panoussis,G.: Seismic reliability of lifeline network, Seismic Design Decision Analysis-Report No.15, MIT, Dept. of Civil Eng. Res. Rep. R 74-57, 1974.
- 5) Shinozuka,M., Takada,S. and Kawakami, H.: Risk analysis of underground lifeline network systems, US-

South East Asia Symposium on Engineering for Natural Hazards Protection. Manila, Philippines, Sept. 1977.

- 6) 田村重四郎・川上英二：ライフラインのネットワークシステムの耐震性の一評価方法について，生産研究，30巻7号，1978.
- 7) 伯野元彦・斉藤嘉則：ライフ・ラインの耐震性に影響する因子，第15回地震工学研究発表会講演概要，1979.
- 8) 篠塚正宣・小池 武：埋設ライフラインシステムの連結性能に関する地震危険度解析，土木学会論文報告集，第311号，1981.
- 9) 川上英二：少数種類の構造物からなるライフラインシステムの耐震性の評価，土木学会論文報告集，第312号，1981.
- 10) 沢田博司・佐武正雄・浅野照雄：ガス配管網の耐震信頼性の一評価方法について，土木学会第37回年次学術講演会概要集，第1部，1982.
- 11) 篠塚正宣・小池 武：埋設ライフラインシステムの機能性能に関する地震危険度解析，土木学会論文報告集，第311号，1981.
- 12) 田村重四郎・川上英二：モンテカルロ法による地中埋設管システムの耐震性の評価方法，土木学会論文報告集，第311号，1981.
- 13) 磯山龍二・片山恒雄：大規模水道システムの地震時信頼度評価法，土木学会論文報告集，第321号，1982.
- 14) 川上英二：道路交通システムの機能上の耐震性の一評価方法，土木学会論文報告集，第327号，1982.
- 15) 星谷 勝・小池精一：ライフラインの地震災害における復旧予測モデル，土木学会論文報告集，第308号，1981.
- 16) 亀田弘行・後藤尚男・浅岡克彦：地震後の各復旧段階における上水道配水管の信頼度解析，第16回地震工学研究発表会講演概要，1981.
- 17) 山田善一・家村浩和・野田 茂：反復分割法による震災後の上水供給系の事変信頼性解析，土木学会論文報告集，第326号，1982.
- 18) 和泉正哲・野村希品・牧瀬研二：ガス・電気・上水供給システムの震害復旧シミュレーション，Proc. of the 6th Japan Earthquake Engineering Symposium, 1982.
- 19) 鈴木 操・岸野佑次・浅野照雄：震害を受けたライフラインシステムの復旧過程の解析，土木学会第37回年次学術講演会概要集，第1部，1982.
- 20) Ando,T., Noda,S., Hamada,M. and Yamada,Y.: Practical simulation method for restoration process of electric power system damaged by earthquake, Third International Conference on Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1987.
- 21) 神奈川県：神奈川県地震被害想定調査報告書，1986.
- 22) 星谷勝・大野春雄・千葉利晃：震後の上水道機能の復旧予測，都市供給施設における震害の防止・軽減並びに復旧対策に関する研究，文部省科学研究費報告書（代表者：佐武正雄），1990.
- 23) 東京都防災会議：東京における地震被害の想定に関する調査研究，1991.
- 24) 川上英二：単純なライフラインネットワークの被害率と供給率との関係について，土木学会論文報告集，第344号，1984.
- 25) Kawakami,H.: Earthquake physical damage and function-

al serviceability of lifeline network models, Earthquake
Engineering and Structural Dynamics, Vol.19, 1990.

(1992.1.21 受付)

CONNECTIVITY OF PAIRS OF SUPPLY AND DEMAND POINTS DISTRIBUTED OVER A SIMPLE NETWORK

Hideji KAWAKAMI

To theoretically investigate the relationship between the degree of physical damage to the lifeline system and the functional service ratio immediately following an earthquake, this paper evaluates three simple models : open and closed curve models, and a Y-shaped model. Supply points, demand points, and failures are assumed to be distributed randomly and uniformly throughout the system. The connectivity and the distance between surviving pairs of supply and demand points are presented as a function of the total number of failures.
