地盤のS波速度とQ値の同定問題における SLP法の改良とその適用

沢田　勉*・辻原　治**・平尾　潔***・
山本英史****

本論文の目的は，地震動記録を用いた水平成層地盤の同定問題にSLP法（反復線形計画法）を適用した際の，解の収束性を改善するための一手法を提示することにある．地盤各層のS波速度とQ値の同定問題は，重複反射法により周波数領域で定式化している．数値解析により，本論文で提案する改良SLP法と従来のSLP法を併用することにより，解の収束性および精度が大幅に改善されることを示している．

Keywords : *earthquake ground motion. soil properties, identification, convergency, modified successive linear programming*

1. まえがき

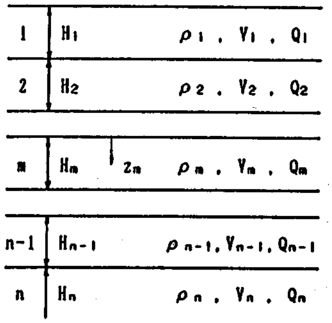
地表で観測される地震動は，震源機構，伝搬経路，観測点直下の地盤条件等の影響を受けて複雑に変化する．とくに，わが国のような大都市が立地する沖積層からなる平野部では，地盤条件は地表地震動特性に大きな影響を及ぼし，高々数百メートルしか離れていない2地点で地震動特性がかなり異なる場合も見られる[1),2)]．したがって，ある地点の地震動特性を的確に把握するためには，その地点直下の地盤条件を何らかの方法により推定することが必要となる．

微小地震時の地盤の動特性は，従来弾性波探査やPS検層によって推定されている．その他，S波速度やQ値をN値のような他の土質定数から推定する研究[3)]や常時微動から表層地盤の地震動増幅度を推定する研究[4)]等も行われている．強震時には，土は顕著な非線形性を示すため，このような方法による地盤の動特性の推定値は地震時のそれとかなり異なることが予想される．強震時の土の非線形特性を明らかにするために多くの室内実験も行われているが[5)]，それらの試験結果は必ずしも地震時の実地盤の動特性と対応するものではない．近年，国内外で，地表および地中に設置した地震計による同時観測，すなわち鉛直アレー観測が行われるようになり，それより得られた記録はデータベース化されつつある[6),7)]．このような鉛直アレー観測記録を利用して，地震時の実地盤の動特性を推定することにより，耐震工学上有用な情報が得られる．

地盤を含めた各種振動系の同定問題は，観測記録より得られるある種の物理量とモデルの残差平方和を評価関数として，それを最小化するという最適化問題として定式化される．このときの評価関数は，一般に，同定すべきパラメータの非線形関数となるので，各種の非線形最適化手法[8)~11)]が用いられる．従来の研究では，拡張カルマンフィルター[12),13)]，最急降下法[14)]，DFP法(Davidon-Fletcher-Powell法[15)]，Gauss-Newton法[16),17)]，SLP法（反復線形計画法；Successive Linear Programming)[15)]等が用いられている．これらの手法のうちSLP法は，アルゴリズムが簡単であるので，手軽に使えるという利点がある．とくに，振動系の同定問題のように，制約条件をもたない最小化問題では，各段階の解がLP（線形計画法）を用いなくとも容易に得られるので，非常に簡単である（後述)．ただし，SLP法は，他の方法に比べ，最適解近傍での収束性が悪いという欠点をもっている．

本研究の目的は，重複反射法を用いて定式化した地盤同定問題にSLP法を適用した際の解の収束性を改善するための一手法を提示することにある．同定問題の定式化においては，表層地盤を水平成層構造をもつ連続体としてモデル化し，深さ方向の複数点で得られた観測記録のスペクトル比と，SH波の重複反射を仮定して得た計算値との残差平方和を最小にするという評価関数を用い，地盤各層のS波速度とQ値を等価線形的に同定する（ただし，地盤各層の層厚と密度は既知とする)．本研究は，著者らによる既往の研究[15)]，すなわちSLP法による地盤同定問題の解析における解の収束性の改良を目的とするものであるため，実地震動記録は用いない．数値計算においては，重複反射法より求めた地表・地中の周波数応答倍率を目的関数とした．本研究で提示する改良SLP法は，最適解近傍での解の収束性がよく，振動系以外の同定問題にも簡単に適用できる．ただし，この方法の適用に際しては，最適化問題が無制約であること，および評価関数の1次と2次の偏微分係数が解析的に求められること等の制限がある．

* 正会員　工博　徳島大学助教授　工学部建設工学科
（〒770　徳島市南常三島町2-1）
** 正会員　工修　和歌山工業高等専門学校講師　土木工学科
*** 正会員　工博　徳島大学教授　工学部建設工学科
**** 学生会員　徳島大学大学院　工学研究科



図—1　水平成層地盤モデル

2.　地盤同定問題の定式化

一般に，比較的深い震源の近距離地震による地盤震動の強震部ではＳ波が卓越し，その震央直角方向成分はSH波であると考えられる．本研究では，図—1に示すような水平成層構造をもつモデル地盤に，鉛直下方よりSH波が入射するという仮定のもとに，地表または地中で得られた鉛直アレー観測記録より，地盤各層のＳ波速度とＱ値を同定する問題を考える．なお，本論文では，Ｑ値は周波数によらず一定であると仮定している．層厚および密度は，ボーリングや標準貫入試験等より比較的精度よく求められるので既知とする．

いま，図—1に示すような水平成層地盤において，層番号を上から順に1, 2,…, nとする．そして，この地盤の任意のp層およびq層の上端よりz_p, z_qなる点（以下これらをp点，q点とよぶ）に設置された地震計より，同時観測記録$x_p(t)$, $x_q(t)$が得られているものとする．なお，ここでの観測記録は加速度記録を想定している．観測記録$x_p(t)$, $x_q(t)$より得られるフーリエスペクトルをそれぞれ$X_p(f)$, $X_q(f)$とするとき，q点に対するp点の周波数応答倍率$\tilde{H}_{pq}(f)$は次式で表される．

$$\tilde{H}_{pq}(f)=|X_p(f)/X_q(f)| \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで，fは振動数である．

他方，SH波の重複反射を仮定すると，モデル地盤におけるq点に対するp点の周波数応答倍率が以下のように誘導される[18]．地表面（$z_1=0$）での加速度波の振動数f成分の振幅を$U_0(f)$とするとき，p点およびq点の加速度振幅$U_p(f)$, $U_q(f)$は次式で与えられる．

$$U_p(f)=\gamma_p(f)U_0(f) \quad \cdots\cdots(2)$$

$$U_q(f)=\gamma_q(f)U_0(f) \quad \cdots\cdots(3)$$

ここで，$\gamma_p(f)$, $\gamma_q(f)$は地表面に対する加速度振幅の低減率であり，次に示す2×2行列$[R_p]$および$[R_q]$の第1行第1列成分である．

$$[R_p]=[T_p][S_{p-1}]\cdots[S_1] \quad \cdots\cdots(4)$$

$$[R_q]=[T_q][S_{q-1}]\cdots[S_1] \quad \cdots\cdots(5)$$

上式に含まれる2×2行列$[S_m]$は，第m層の状態を表す行列で，その成分は次式で与えられる．

$$\left\{\begin{aligned} s_{m.11}&=[\exp(ia_m\omega)+\exp(-ia_m\omega)]/2\\ s_{m.12}&=[\exp(ia_m\omega)-\exp(-ia_m\omega)]/(2ib_m\omega)\\ s_{m.21}&=ib_m\omega[\exp(ia_m\omega)-\exp(-ia_m\omega)]/2\\ s_{m.22}&=s_{m.11}\end{aligned}\right. \quad \cdots\cdots(6)$$

ここで，ω（$=2\pi f$）は角振動数，iは虚数単位であり，係数a_m, b_mは次式のようになる．

$$\left\{\begin{aligned} a_m&=H_m/(V_m\sqrt{1+i/Q_m})\\ b_m&=\rho_m V_m\sqrt{1+i/Q_m}\end{aligned}\right. \quad \cdots\cdots(7)$$

また，式（4），（5）の右辺第一項の$[T_m]$, $m=p$または$m=q$は，式（6）で定義される行列$[S_m]$において，H_mの代わりにz_mを代入したものである．なお，$z_m=0$の場合には，$[T_m]=[I]$，すなわち単位行列となる．式（2）および（3）より，q点に対するp点の周波数応答倍率の重複反射法による解$H_{pq}(f)$が次式のように得られる．

$$H_{pq}(f)=|\gamma_p(f)/\gamma_q(f)| \quad \cdots\cdots(8)$$

式（6）および式（7）からわかるように，式（4）および（5）の行列$[R_p]$, $[R_q]$を構成する$[S_m]$や$[T_m]$は，地盤各層の層厚H_m，密度ρ_m，Ｓ波速度V_m及びＱ値Q_mを含むから，式（8）の$H_{pq}(f)$はこれらの地盤パラメータの非線形関数となる．ここで，地盤各層の層厚H_mおよび密度ρ_mを既知とすると，$q=n$の場合に同定すべきパラメータはＳ波速度V_mとQ値Q_m, $m=1, 2, \cdots, n-1$となる．これらの同定すべきパラメータを一般的に$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$として，式（8）の$H_{pq}(f)$を$H_{pq}(f;\alpha)$で表すと，パラメータ$\alpha$は，式（1）の観測記録より得られる周波数応答倍率と式（8）の残差平方和を最小にするという次式の評価関数により同定される．

$$G(\alpha)=\sum_{j=1}^{N_f}[H_{pq}(f_j;\alpha)-\tilde{H}_{pq}(f_j)]^2\rightarrow\min \quad \cdots\cdots(9)$$

ここで，f_jは対象とする振動数領域を分割したときのj番目の振動数点，N_fはそのときの振動数点の数，$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2\cdots, \alpha_N)$は同定すべきパラメータ，$N$はパラメータの数で，$N=2(n-1)$である．基盤および地中の任意点に$N_r$個の地震計が設置され，同時観測記録が得られる場合には，N_p組（$N_p=N_r-1$）の周波数応答倍率$\tilde{H}_{p_iq_i}(f_j)$, $i=1, 2, \cdots, N_p$を用いて，次式の評価関数によりαが同定される．

$$G(\alpha)=\sum_{i=1}^{N_p}\sum_{j=1}^{N_f}[H_{p_iq_i}(f_j;\alpha)-\tilde{H}_{p_iq_i}(f_j)]^2\rightarrow\min \quad \cdots\cdots(10)$$

3. SLP 法による同定問題の解析

地盤各層のＳ波速度とＱ値を同定する問題は,式(９)または (10) の評価関数を最小にする α_k, $k=1, 2, \cdots, N$ を決定する非線形最適化問題に帰着する．このような非線形最適化問題を解くために各種の非線形計画法が用いられるが，本研究では，SLP 法を用いてこの問題を解く．

SLP 法は，Gauss-Newton 法(GN 法) や Davidon-Fletcher-Powell法 (DFP 法) と同様に傾斜法の範疇に属するが，アルゴリズムが簡単であるため，多くの最適化問題に適用されている[19]．

以下の定式化においては,式の表示を簡単にするため,式（９）の評価関数を対象とし，引数 α, f_j は適宜省略する．このとき，式（９）は次式のように表される．

$$G=\sum_{j=1}^{N_f}(H_{pqj}-\widetilde{H}_{pqj})^2\rightarrow\min \qquad (11)$$

ここで，$G=G\ (\alpha)$, $H_{pqj}=H_{pq}\ (f_j\,;\alpha)$, $\widetilde{H}_{pqj}=\widetilde{H}_{pq}\ (f_j)$ である．SLP 法では，式 (11) を α の初期値 $\alpha^{(0)}$ のまわりにテーラー展開し，2 次以上の高次項を省略して，次式のように線形化する．

$$G\simeq G^{(0)}+\sum_{k=1}^{N}(\partial G/\partial\alpha_k)^{(0)}\Delta\alpha_k \qquad (12)$$

ここで，上付の添字（０）は初期値での値を示し，$\Delta\alpha_k=\alpha_k-\alpha_k^{(0)}$ はパラメータ$\cdot\alpha_k$ の増分量である．また，偏微分係数 $\partial G/\partial\alpha_k$ は次式より計算できる．

$$\partial G/\partial\alpha_k=2\sum_{j=1}^{N_f}(H_{pqj}-\widetilde{H}_{pqj})\partial H_{pqj}/\partial\alpha_k \qquad (13)$$

上式に含まれる偏導関数 $\partial H_{pqj}/\partial\alpha_k$ については，付録で詳述する．式 (12) の線形関数は無制約であり，このままでは増分量 $\Delta\alpha_k$ が発散するため，次のような move limit の制約が設けられる．

$$-\xi\alpha_k^{(0)}\leqq\Delta\alpha_k\leqq\xi\alpha_k^{(0)} \qquad (14)$$

ここで，ξ は move limit を決定する係数（正値）であり，$\xi=0.02\sim0.2$ の値が用いられる．この ξ は，SLP 法による解の収束性に影響し，ξ が大きい場合には，式 (12) の線形近似が成立しない範囲にまで $\Delta\alpha_k$ が動くことになる．他方，ξ が小さい場合には，繰り返し計算の回数が多大となり，解の収束性が悪くなる．これらのことを勘案して，数値計算では $\xi=0.05$ を用いた．

以上のようにして，式 (11) の非線形最小化問題は，式 (12) および (14) の線形計画問題に変換される．これを LP(線形計画法)を用いて解くことによりパラメータ α_k の増分量 $\Delta\alpha_k$ が得られるので，次の段階では $\alpha_k^{(1)}=\alpha_k^{(0)}+\Delta\alpha_k$ を初期値として同様の計算を繰り返す．

ところで，上述の LP 問題を解く際に，制約条件が式 (14) の move limit のみであることを考慮すると，増分量 $\Delta\alpha_k$ は以下のように簡単に求められる．

$$\begin{cases}(\partial G/\partial\alpha_k)^{(0)}\geqq0\ \text{のとき}\ \Delta\alpha_k=-\xi\alpha_k^{(0)}\\(\partial G/\partial\alpha_k)^{(0)}<0\ \text{のとき}\ \Delta\alpha_k=\xi\alpha_k^{(0)}\end{cases} \qquad (15)$$

これは，式 (12) の線形関数を最小にするには，偏微分係数 $(\partial G/\partial\alpha_k)^{(0)}$ の符号と反対方向に $\Delta\alpha_k$ を move limit の制約まで動かせばよいことを意味する．したがって，評価関数の１次の微分係数の符号さえわかれば，α_k の増分量 $\Delta\alpha_k$ が求められるので，LP を用いる必要がなくなり，問題は非常に簡単になる．

式 (12) および (14) の解，すなわち，式 (15) より各段階の増分量を求め解を修正していくと，最適解近傍で解が振動し，このままでは，上述の過程を何回繰り返しても収束解が得られない．このときには，move limit を決定する係数 ξ を次のようにしてせばめることが必要となる．

$$\xi^{(r+1)}=c\xi^{(r)} \qquad (16)$$

ここで，$\xi^{(r)}$ および $\xi^{(r+1)}$ は r 段階および $r+1$ 段階の計算過程での ξ を示し，cは move limit をせばめる係数(正値）であり，0.6～0.9 程度の値が用いられる．係数 c も ξ と同様に解の収束性に影響する．c が大きい場合には，解が収束するまでに多大の繰り返し計算が必要であり，他方，c が小さい場合には，move limit が急速にせばまり，解が強制的にある値に収束してしまう．数値解析では，試行錯誤により c の値を決め，$c=0.7$ を用いた．ただし，式 (16) による move limit の修正は，解が振動する場合にのみ行うものとする．

以上のような SLP 法の長所および短所を挙げると，次のようになる．

（1） GN 法や DFP 法に比べてアルゴリズムが簡単で，上述のように各段階の増分量を簡単に求められる．

（2） 筆者らの経験によると，SLP 法では（他の方法に比べて）初期値の影響を受けにくく大域的な解が得られる可能性が高い．

（3） 収束解を得るために多大の繰り返し計算が必要である．たとえば，式 (16) の係数 c として適当な値を選択しても，本研究の数値計算では，100 回以上の繰り返し計算が必要である．

4. SLP 法の改良

上述の（３）の欠点を改良するために，筆者らは SLP 法と DFP 法を折衷した方法により解の収束性を改善した[15]．しかし，この方法ではアルゴリズムが簡単であるという SLP 法の利点がなくなる．以下では，SLP 法の利点を保持したまま，その収束性の改良を考える．

SLP 法を適用して解を改良していく各段階で，解が

振動する原因は，式（12）のように，評価関数を1次近似して高次項を無視したことにより生じる．そこで，繰り返し計算の第r段階における評価関数（式（11））を，2次の項まで含む次式で近似する．

$$G \simeq G^{(r)} + \sum_{k=1}^{N} (\partial G/\partial \alpha_k)^{(r)} \Delta\alpha_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} (\partial^2 G/\partial\alpha_k \partial\alpha_l)^{(r)} \Delta\alpha_k \Delta\alpha_l \rightarrow \min \quad \cdots\cdots (17)$$

ここで，$\partial^2 G/\partial\alpha_k\partial\alpha_l$ は2次偏微分係数で，式（13）を用いて次式で計算できる．

$$\partial^2 G/\partial\alpha_k\partial\alpha_l = 2\sum_{j=1}^{N_f} \partial H_{pqj}/\partial\alpha_k \cdot \partial H_{pqj}/\partial\alpha_l + 2\sum_{j=1}^{N_f} (H_{pqj} - \tilde{H}_{pqj}) \partial^2 H_{pqj}/\partial\alpha_k\partial\alpha_l \quad \cdots\cdots (18)$$

上式に含まれる2次偏導関数 $\partial^2 H_{pqj}/\partial\alpha_k\partial\alpha_l$ については，付録で詳述する．式（17）の2次形式の最小化問題は，前述のSLP法と同様に式（14）のmove limitの制約をもつ．式（17），（14）の最小化問題は非線形であるので，ここでSLP法を適用して解く．説明の便宜上，式（17）および（14）を次のように表す．なお，定数項 $G^{(r)}$ は最小化とは無関係であるのでこれを省略する．

$$E \simeq \sum_{k=1}^{N} d_k x_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} e_{kl} x_k x_l \rightarrow \min \quad \cdots\cdots (19)$$

$$-x_{ku} \leqq x_k \leqq x_{ku} \quad \cdots\cdots (20)$$

ここで，$d_k = (\partial G/\partial\alpha_k)^{(r)}$，$e_{kl} = (\partial^2 G/\partial\alpha_k\partial\alpha_l)^{(r)}$，$x_k = \Delta\alpha_k$，$x_l = \Delta\alpha_l$，$x_{ku} = \xi\alpha_k^{(r)}$ である．上式における係数 d_k および e_{kl} は繰り返し計算の第r段階において一度だけ計算しておけばよい．式（19）をテーラー展開して線形化すると

$$E \simeq E^{(0)} + \sum_{k=1}^{N} (\partial E/\partial x_k)^{(0)} \Delta x_k \rightarrow \min \quad \cdots\cdots (21)$$

ここで，偏微分係数 $\partial E/\partial x_k$ は

$$\partial E/\partial x_k = d_k + \sum_{l=1}^{N} e_{kl} x_l \quad \cdots\cdots (22)$$

また，この場合の Δx_k のmove limitは次式で与えられる．

$$-\zeta x_{ku} \leqq \Delta x_k \leqq \zeta x_{ku} \quad \cdots\cdots (23)$$

ここで，ζ はmove limitを決定する係数（正値）であり，式（14）の ξ と同様な考え方により決められる．x_k の増分量 Δx_k は，式（15）と同様にして，次式のように求められる．

$$\begin{cases} (\partial E/\partial x_k)^{(0)} \geqq 0 \text{ のとき } \Delta x_k = -\zeta x_{ku} \\ (\partial E/\partial x_k)^{(0)} < 0 \text{ のとき } \Delta x_k = \zeta x_{ku} \end{cases} \quad \cdots\cdots (24)$$

なお，式（19）の最小化問題の初期値は $x_k=0$，$k=1, 2, \cdots, N$ である．

このように，式（22）および（24）より増分量 Δx_k を求める過程を繰り返すことにより，第r段階における式（19）の最適解が得られる．なお，式（22）および（24）の増分量を求める計算においては，係数 d_k および e_{kl} を定数として扱うので，演算時間はほとんど必要としない．

以上のようなSLP法および改良SLP法を用いて，地盤同定問題を解析する手順を述べると，次のようになる．

（1） 同定すべきパラメータの初期値 $\alpha^{(0)} = \{\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \cdots, \alpha_N^{(0)}\}^T$ を与える．

（2） 初期値 $\alpha^{(0)}$ に対する評価関数の1次偏微分係数 $(\partial G/\partial\alpha_k)^{(0)}$ を式（13）より求める．

（3） 修正すべき増分量を式（15）より求める．

（4） パラメータが振動するまで（2），（3）の過程を繰り返す．

（5） 第r段階で解が振動をはじめた後は，1次および2次の偏微分係数 $d_k = (\partial G/\partial\alpha_k)$，$e_{kl} = (\partial^2 G/\partial\alpha_k\partial\alpha_l)$ を式（13）および（18）により計算する．

（6） 式（19）の評価関数の2次近似Eの初期値 $x_k^{(0)}=0$，$k=1, 2, \cdots, N$ における，1次偏微分係数 $\partial E/\partial x_k$ を式（22）より計算する．

（7） 式（24）より x_k の増分量 Δx_k を求め，$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} + \Delta x_k$ とする．

（8） （6）および（7）の過程を繰り返し，第r段階における増分量 $x_k^{(r)} = \Delta\alpha_k^{(r)}$ を求める．

（9） $\alpha_k^{(r+1)} = \alpha_k^{(r)} + \Delta\alpha_k^{(r)}$ として（5）～（8）の過程を繰り返す．

（10） 式（11）の残差平方和Gがある値以下になったとき，収束解が得られたとして，計算を終了する．数値計算では，次の収束判定基準を用いた．

$$G \leqq \varepsilon \quad \cdots\cdots (25)$$

ここで，ε は微小な正値で，たとえば，$\varepsilon = 10^{-3}$ が用いられる．

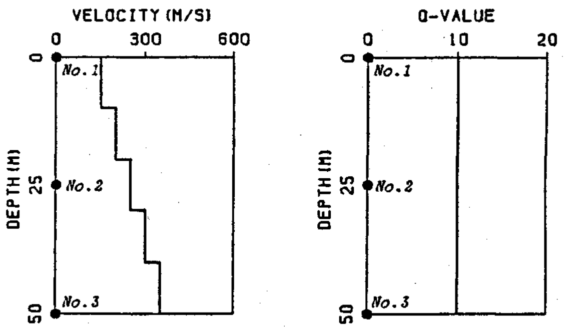
以上のように，SLP法および改良SLP法では，式（15）および（24）により，パラメータの修正が行われる．その際必要となる情報は，式（11）の残差平方和の1次および2次の偏微分係数であり，それ以外の知識（たとえばDFP法における共役勾配）を必要としない．ただし，この方法を適用するにあたっては，最適化問題が無制約であること，および2次偏微分係数が解析的に得られることなどの制約がある．

5. 数値計算例

前節で述べたSLP法および改良SLP法を用い，地盤各層のS波速度およびQ値を同定する．本研究では，手法の妥当性を検討するため，実地震記録は用いず，モデル地盤を設定して，重複反射法により求めた地盤伝達関数を式（1）の周波数応答倍率とする．解析に用いた

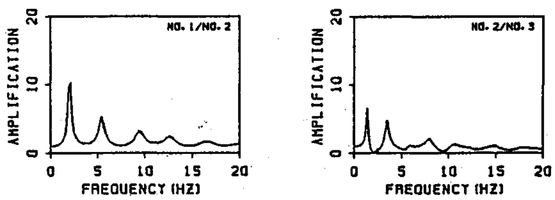
表—1 モデル地盤の諸元

層番号	層厚(m)	密度(t/m³)	S波速度(m/s)	Q値
1	10	1.8	150	10
2	10	1.8	200	10
3	10	1.8	250	10
4	10	1.8	300	10
5	10	1.8	350	10



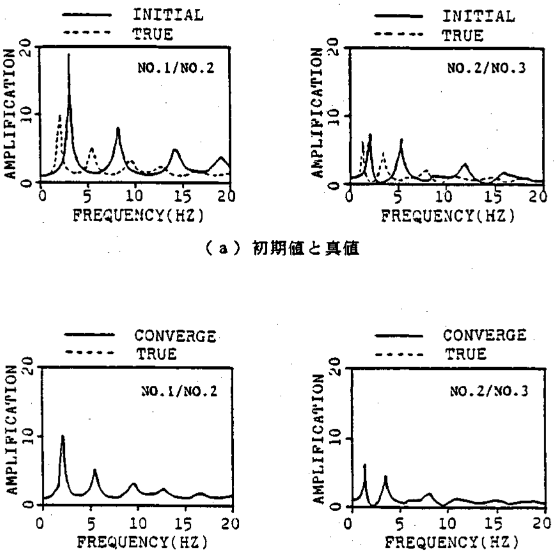
(a) S波速度　　(b) Q値

図—2 モデル地盤のS波速度およびQ値の深さ方向分布（●：地震計設置位置）



(a) No. 1／No. 2　　(b) No. 2／No. 3

図—3 モデル地盤の周波数応答倍率



(a) 初期値と真値

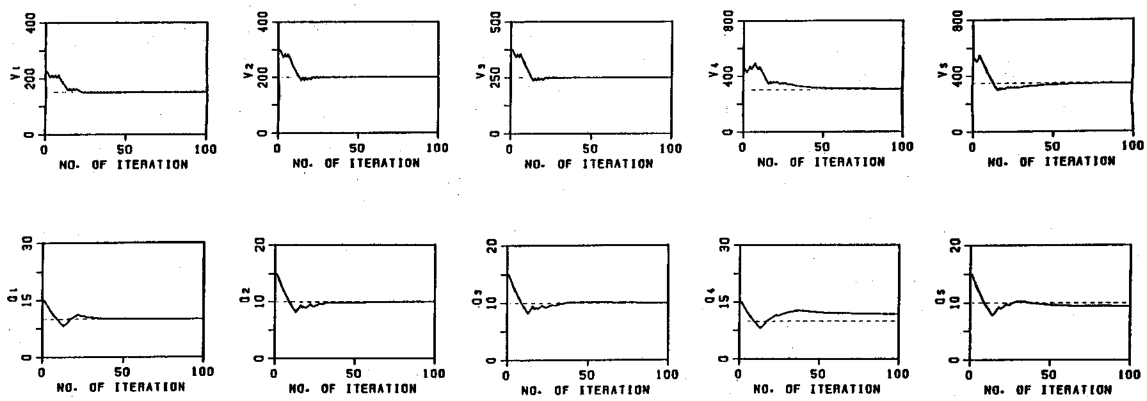
(b) 収束値と真値

図—4 初期値，収束値および真値に対する周波数応答倍率（SLP法）

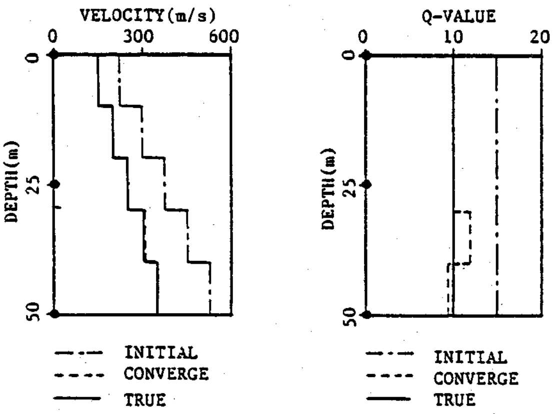
モデル地盤の層厚，密度，S波速度およびQ値を表—1に示す．図—2には，このモデル地盤のS波速度およびQ値の深さ方向の分布を示す．数値計算では，図—2のモデル地盤のNo. 1(地表，第1層上面)，No. 2(第3層中央）およびNo. 3(基盤，第5層下面）において観測記録が得られていると想定し，No. 1/No. 2およびNo. 2/No. 3の周波数応答倍率を用いて地盤各層のS波速度とQ値を同定する．表—1のS波速度およびQ値を真値としたときのNo. 1/No. 2およびNo. 2/No. 3の周波数応答倍率を図—3に示す．図において，横軸は振動数（Hz)，縦軸は応答倍率である．これらの周波数応答倍率を目的関数（式（1）の観測記録より求めた周波数応答倍率）とする．以下では，上述の同定問題の解析に，SLP法のみを適用した場合と改良SLP法を併用した場合について数値計算を行い，両手法を比較する．

(1) SLP法のみを適用した場合

SLP法のみを用いて，図—2のモデル地盤各層のS波速度およびQ値を同定する．初期値は表—1に示すS波速度およびQ値の1.5倍とし，層厚および密度は既知とする．実地盤の同定問題においては，S波速度とQ値の初期値をどのように与えるかは重要である．たとえば，S波速度の初期値として，PS検層等により得られた微小震動時の値を用いることが考えられる．ここでは，数値解析による手法の妥当性の検討を目的として，上記のような真値の1.5倍の値を初期値として用いた．なお，計算過程における各段階でのパラメータの増分量を規定するmove limitの係数ξ（式（14））およびmove limitの低減係数c（式（16））は，それぞれ，$\xi=0.05$および$c=0.7$とする．SLP法のみによる同定では，前節の解析手順（1）~（4）を繰り返し，解が振動する場合には，move limitに式（16）の低減係数を乗じて，パラメータの変動幅をせばめて，解を収束させる．なお，繰り返し回数は100回とする．式（10）の評価関数は，0.1~20 Hzの振動数領域を100等分した点（$N_f=101$）を対象とし，$N_p=2$とする．また，この計算例では，式（10）におけるp_i，q_iは，$p_1=1$，$p_2=3$，$q_1=3$，$q_2=6$である．図—4は，S波速度とQ値の初期値（Initial，実線）および収束値（Converge，実線）に対する周波数応答倍率を，真値（True，点線）のそれと対比して示したもので，上図が初期値，下図が収束値に対応する．図より，

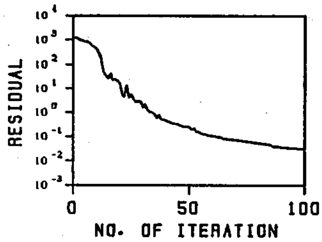


図—6　Ｓ波速度（上段）およびＱ値（下段）の収束状況（SLP法）

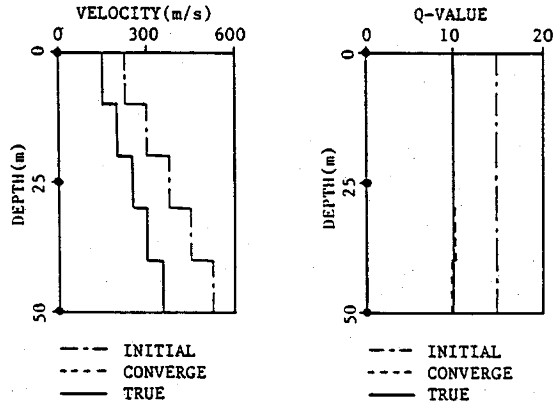


（a）Ｓ波速度　（b）Ｑ値

図—5　Ｓ波速度およびＱ値の初期値，収束値および真値の深さ方向分布（SLP法）



図—7　残差平方和（SLP法）



（a）Ｓ波速度　（b）Ｑ値

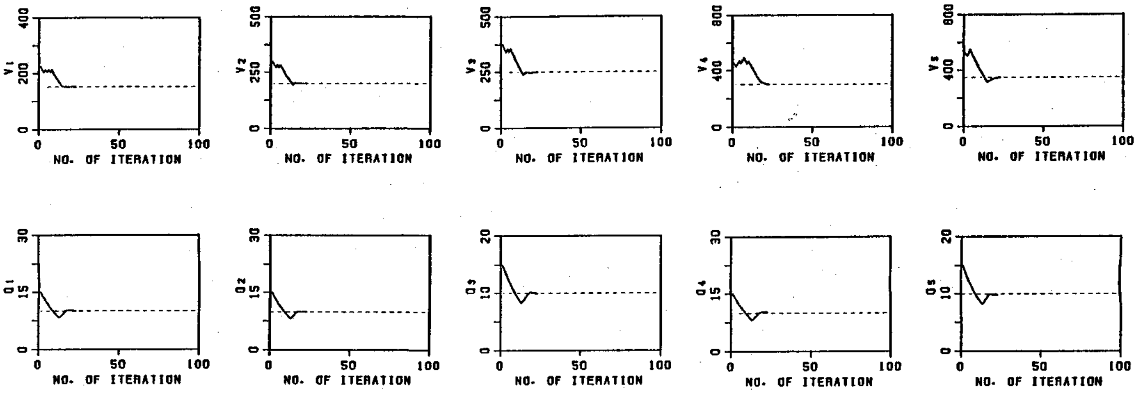
図—8　Ｓ波速度およびＱ値の初期値，収束値および真値の深さ方向分布（改良SLP法）

収束値に対応する周波数応答倍率は，真値のそれとほぼ完全に一致しているように見える．このように，SLP法のみを用いた場合でも，収束値と真値に対する周波数応答倍率の適合性は良好である．**図—5**は，Ｓ波速度（左図）およびＱ値（右図）の深さ方向の分布を，初期値（一点鎖線），収束値（点線）および真値（実線）に対して示したものである．この図にみられるように，各層のＳ波速度の収束値は真値とほぼ一致しているのに対し，Ｑ値は真値と若干異なる値となっている．**図—6**には，各層のＳ波速度とＱ値の収束状況を示す．これらの図において，横軸は繰り返し計算の回数であり，図中の点線は真値に対応する．また，**図—7**には，周波数応答倍率の残差平方和（式（10）の評価関数）を示す．図において，横軸は繰り返し回数，縦軸は残差平方和（対数）である．この図からわかるように，100回の繰り返し計算の終了時点においても，残差平方和は10^{-1}程度で未だ十分小さな値になっていない．したがって，**図—5**に示したＳ波速度とＱ値の収束解に対する値は，計算の途中の値と判断される．以上のように，SLP法のみを用いた場合には，解の収束性，とくにＱ値の収束性が悪い．

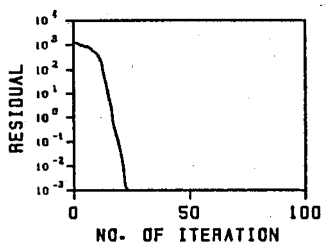
（2）　SLP法および改良SLP法を併用した場合

前節で述べた解析手順（1）～（10）により，地盤各層のＳ波速度およびＱ値を同定する．同定の際の諸条件は前述のSLP法のみを用いた場合と同一である．ただし，改良SLP法で用いる式（23）の係数ζは，$\zeta=0.05$を用いた．また，式（25）の収束判定基準に用いるεは，$\varepsilon=10^{-3}$とした．

土木学会論文集 No. 446／I-19, pp. 205~213, 1992. 4



図—9 S 波速度（上段）および Q 値（下段）の収束状況（改良 SLP 法）



図—10 残差平方和（改良 SLP 法）

以下解析結果を示す．

図—8 は，S 波速度および Q 値の深さ方向の分布を，初期値（一点鎖線），収束値（点線）および真値（実線）について示したものである．図より，収束値と真値はほぼ完全に一致していることがわかる．図—9 には，各パラメータの収束状況を示す．図より，各層の S 波速度および Q 値とも，20 回程度の繰り返しで真値（点線）に収束することがわかる．なお，この場合には，SLP 法による 10 回の繰り返し計算後に，改良 SLP 法が適用された．図—10 には，式（10）の評価関数の値（残差平方和，対数）を繰り返し回数に対して示した．図より，残差平方和は急速に小さくなり，20 回程度の繰り返し計算の後，収束判定基準を満足することがわかる．

以上のように，改良 SLP 法を用いることにより解の収束性が大幅に改善された．

6. まとめ

本研究では，重複反射法により定式化した地盤同定問題を，SLP 法を用いて解析する際の，解の収束性を改善するための一手法を提示した，SLP 法は，他の非線形最適化手法に比べて，アルゴリズムが簡単であるという長所をもつ．特に，本研究の地盤同定問題のように制約条件をもたない最適化問題では，LP を用いなくとも解を逐次修正できるので，非常に簡単になる．しかし，地盤同定問題のように，性質の異なるパラメータ（S 波速度と Q 値）を同時に同定する場合には，それらの感度（1 次偏微分係数）の大きさが異なるため[20),21)]，最適解近傍での解の収束性が悪くなる．本研究では，この欠点を改良するために，評価関数を 2 次形式で近似し，その最小点を SLP 法により求める手法を開発した．

本研究で得られた結果を要約すると，次のようになる．

（1） SLP 法および改良 SLP 法では，最小化すべき評価関数の 1 次および 2 次偏微分係数のみが必要であり，他の最適化手法のように特有の情報（たとえば共役勾配や LP 等）を必要としないので簡単である．

（2） 数値計算では，地盤同定問題を SLP 法を用いて解析した場合と，改良 SLP 法を併用して解析した場合について，解の収束性を比較した．その結果，SLP 法と改良 SLP 法を併用することにより，解の収束性および精度が大幅に改善されることがわかった．

以上のように，本研究で提示した方法は，手法が簡単でありかつ解の収束性がよいという長所を持つ．しかし，この手法を適用するに当たっては，2 つの制限，すなわち，対象とする最適化問題が無制約であること，および評価関数の 2 次偏微分係数が必要であるという制限に留意しなければならない．なお，観測記録に誤差が含まれる場合の同定や他の最適化手法との比較については別途報告する予定である．

[付録] 周波数応答倍率の 1 次および 2 次偏導関数

式（13）および（17）の偏微分係数に含まれる周波数応答倍率 H_{pq} $(f\,;\alpha)$ の 1 次および 2 次の偏導関数を求める．式の表示を簡単にするために，本文と同様に引数を適宜省略する．重複反射法による周波数応答倍率 H_{pq}（式（8））の右辺を実数部と虚数部を用いて表すと次のようになる．

$$H_{pq}=\left[\frac{\phi_p^2+\psi_p^2}{\phi_q^2+\psi_q^2}\right]^{1/2} \quad \cdots\cdots (A\text{-}1)$$

ここで，ϕ_p，ψ_p，ϕ_q，ψ_q は，γ_p (f) および γ_q (f) の実数部と虚数部である．

$$\begin{cases} \gamma_p(f)=\phi_p+i\psi_p \\ \gamma_q(f)=\phi_q+i\psi_q \end{cases} \quad \cdots\cdots (A\text{-}2)$$

式(A-1)を α_k について偏微分すると，1次偏導関数が次のように得られる．

$$\frac{\partial H_{pq}}{\partial \alpha_k}=D_1(D_2-D_3)D_4 \quad \cdots\cdots (A\text{-}3)$$

ここで，$D_1 \sim D_4$ は次のようになる．

$$\begin{cases} D_1=\left[\dfrac{\phi_p^2+\psi_p^2}{\phi_q^2+\psi_q^2}\right]^{-1/2} \\ D_2=\left(\phi_p\dfrac{\partial\phi_p}{\partial\alpha_k}+\psi_p\dfrac{\partial\psi_p}{\partial\alpha_k}\right)(\phi_q^2+\psi_q^2) \\ D_3=(\phi_p^2+\psi_p^2)\left(\phi_q\dfrac{\partial\phi_q}{\partial\alpha_k}+\psi_q\dfrac{\partial\psi_q}{\partial\alpha_k}\right) \\ D_4=(\phi_q^2+\psi_q^2)^{-2} \end{cases} \quad \cdots\cdots (A\text{-}4)$$

さらに，式（A-3）を α_1 について偏微分すると，2次偏導関数 $\partial^2 H_{pq}/\partial\alpha_k\partial\alpha_1$ が得られる．

$$\frac{\partial^2 H_{pq}}{\partial\alpha_k\partial\alpha_1}=\frac{\partial D_1}{\partial\alpha_1}(D_2-D_3)D_4+D_1\left(\frac{\partial D_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial D_3}{\partial\alpha_1}\right)D_4$$
$$+D_1(D_2-D_3)\frac{\partial D_4}{\partial\alpha_1} \quad \cdots\cdots (A\text{-}5)$$

ここで，$D_1 \sim D_4$ の α_1 に関する偏導関数は，次のようになる．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D_1}{\partial\alpha_1}=-(A/B)^{-3/2}\{(\phi_p\phi_{p1}+\psi_p\psi_{p1})B \\ \qquad -A(\phi_q\phi_{q1}+\psi_q\psi_{q1})\}/B^2 \\ \dfrac{\partial D_2}{\partial\alpha_1}=(\phi_{pk}\phi_{p1}+\phi_p\phi_{pk1}+\psi_{pk}\psi_{p1}+\psi_p\psi_{pk1})B \\ \qquad +2(\phi_p\phi_{pk}+\psi_p\psi_{pk})(\phi_q\phi_{q1}+\psi_q\psi_{q1}) \\ \dfrac{\partial D_3}{\partial\alpha_1}=(\phi_{qk}\phi_{q1}+\phi_q\phi_{qk1}+\psi_{qk}\psi_{q1}+\psi_q\psi_{qk1})A \\ \qquad +2(\phi_p\phi_{p1}+\psi_p\psi_{p1})(\phi_q\phi_{qk}+\psi_q\psi_{qk}) \\ \dfrac{\partial D_4}{\partial\alpha_1}=-4B^{-3}(\phi_q\phi_{q1}+\psi_q\psi_{q1}) \end{cases} \quad \cdots\cdots (A\text{-}6)$$

ここに，

$$\begin{cases} A=\phi_p^2+\psi_p^2 \\ B=\phi_q^2+\psi_q^2 \\ \phi_{pi}=\partial\phi_p/\partial\alpha_1 \\ \psi_{pi}=\partial\psi_p/\partial\alpha_1 \\ \phi_{qij}=\partial^2\psi_p/\partial\alpha_i\partial\alpha_j \\ \psi_{qij}=\partial^2\psi_p/\partial\alpha_i\partial\alpha_j \qquad (i,\ j=k \text{ or } l) \end{cases} \quad \cdots\cdots (A\text{-}7)$$

式（A-4）および（A-6）に含まれる ϕ_p，ψ_p，ϕ_q，および ψ_q の1次および2次偏導関数は，以下のようにして求められる．

いま，ϕ_p，ψ_p の偏導関数に注目すると，これらは $\gamma_p(f)$ の実数部および虚数部であり，かつ γ_p (f) は式（4）の $[R_p]$ の第1行第1列成分であることを想起し，$[R_p]$ を再度書くと，

$$[R_p]=[T_p][S_{p-1}]\cdots[S_1] \quad \cdots\cdots (A\text{-}8)$$

行列 $[T_p]$ や $[S_j]$ の各要素は式（6）のようになるから，以下では，前述の変数 α_k，α_1 をもとにもどし，V_j や Q_j で表すことにする．このとき，行列 $[R_p]$ の V_j および Q_j に関する1次偏導関数は次のようになる．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial[R_p]}{\partial V_j}=[T_p][S_{p-1}]\cdots\dfrac{\partial[S_j]}{\partial V_j}\cdots[S_1] \\ \dfrac{\partial[R_p]}{\partial Q_j}=[T_p][S_{p-1}]\cdots\dfrac{\partial[S_j]}{\partial Q_j}\cdots[S_1] \end{cases} \quad \cdots\cdots (A\text{-}9)$$

また行列 $[R_p]$ の，V_j，V_k，Q_j，Q_k に関する2次の偏導関数は，以下のようになる．

$[j=k$ の場合$]$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2[R_p]}{\partial V_j^2}=[T_p][S_{p-1}]\cdots\dfrac{\partial^2[S_j]}{\partial V_j^2}\cdots[S_1] \\ \dfrac{\partial^2[R_p]}{\partial Q_j^2}=[T_p][S_{p-1}]\cdots\dfrac{\partial^2[S_j]}{\partial Q_j^2}\cdots[S_1] \\ \dfrac{\partial^2[R_p]}{\partial V_j\partial Q_j}=[T_p][S_{p-1}]\cdots\dfrac{\partial^2[S_j]}{\partial V_j\partial Q_j}\cdots[S_1] \end{cases} \quad \cdots\cdots (A\text{-}10)$$

$[j\neq k$ の場合$]$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2[R_p]}{\partial V_j\partial V_k}=[T_p][S_{p-1}]\cdots\dfrac{\partial[S_j]}{\partial V_j}\cdots\dfrac{\partial[S_k]}{\partial V_k}\cdots[S_1] \\ \dfrac{\partial^2[R_p]}{\partial Q_j\partial Q_k}=[T_p][S_{p-1}]\cdots\dfrac{\partial[S_j]}{\partial Q_j}\cdots\dfrac{\partial[S_k]}{\partial Q_k}\cdots[S_1] \\ \dfrac{\partial^2[R_p]}{\partial V_j\partial Q_k}=[T_p][S_{p-1}]\cdots\dfrac{\partial[S_j]}{\partial V_j}\cdots\dfrac{\partial[S_k]}{\partial Q_k}\cdots[S_1] \end{cases} \quad \cdots\cdots (A\text{-}11)$$

式（A-8）～(A-10）に現れる行列 $[S_j]$ の1次および2次の偏導関数の各要素は，式（6）を V_j，Q_j で偏微分することにより容易に得られる．以上のようにして，式（A-8）～(A-10）より得られた $[R_p]$ の偏導関数の第1行第1列成分の実数部および虚数部が ϕ_p および ψ_p の偏導関数となる．ϕ_q および ψ_q については，同様にして得られるので省略する．

参考文献

1）田中・吉沢：強震地動に含まれる地盤特性，第4回日本地震工学シンポジウム，pp. 161～167，1974年．

2）翠川・小林：地震動の地震基盤からの入射波スペクトルの性質，日本建築学会論文報告集，第273号，pp. 43～53，1978年．

3) 正木・飯田：軟弱地盤のQ値とS波速度・N値との関係，地震2，第33巻，pp. 392～394，1980年.
4) 中島・大塚：微動による地盤増幅度特性推定の1手法，物理探鉱，第32巻，第4号，pp. 22～31，1979年.
5) 土質工学会：地震応答解析のための土の動的性質，pp. 15～51，1987年.
6) 杉戸・亀田・高山：アレー強震データベース(SMARD)の開発，第19回地震工学研究発表会講演概要集，pp. 13～16，1987年.
7) 片山・山崎・永田・佐藤：高密度三次元アレーによる地震動観測と記録のデーターベース化，土木学会論文集，No. 422/Ⅰ-14，pp. 361～369，1990年.
8) ディクソン（松原訳）：非線形最適化計算法，培風館，1974年.
9) コワリック他（山本他訳）：非線形最適化問題，培風館，1970年.
10) Bard, Y. : Comparison of gradient method for solution of nonlinear parameter estimation problems, Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol.7, No.1, pp.157～186, 1970.
11) 辻原・坂口・沢田：非線形最適化手法の比較に関する研究，和歌山工業高等専門学校研究紀要，第23号，pp. 73～78，1988年.
12) 星谷・斉藤：拡張カルマンフィルターを用いた同定問題の各種振動系への応用，土木学会論文集，No. 339，pp. 59～67，1983年.
13) 星谷・斉藤：線形多自由度系の動特性の推定，土木学会論文集，No. 344／Ⅰ-1，pp. 289～298，1984年.
14) 太田：地震工学への最適化法の適用，日本建築学会論文報告集，第229号，pp. 35～41，1975年.
15) 辻原・沢田・谷：鉛直アレー観測記録による地盤振動特性値の同定，構造工学論文集，Vol. 36A，pp. 747～756，1990年.
16) 栗田・松井：振動実験記録を用いた構造動特性の推定，土木学会第45回年次学術講演会講演概要集，第Ⅰ部，pp. 800～801，1990年.
17) Matsui, K. and Kurita, T. : Sensitivities of parameters due to model errors and measurement noises in structural identification problems, Proc. of JSCE, No.422／Ⅰ-14, pp.145～157, 1990.
18) 土岐：新体系土木工学11構造物の耐震解析，技報堂出版，pp. 80～91，1982年.
19) 山田・大久保：最適構造設計，丸善株式会社，pp. 169～175，1983年.
20) 沢田・平尾：地盤のせん断波速度の構造が地表地震動強度に及ぼす影響，構造工学論文集，Vol. 32A，pp. 777～788，1986年.
21) 沢田・平尾：せん断波速度の構造が地盤伝達関数に与える影響，土木学会論文集，第368号／Ⅰ-5，pp. 329～336，1986年.

(1991. 6. 19受付)

MODIFICATION OF SLP AND ITS APPLICATION TO IDENTIFICATION OF SHEAR WAVE VELOCITY AND QUALITY FACTOR OF SOIL

Tsutomu SAWADA, Osamu TSUJIHARA, Kiyoshi HIRAO and Hidefumi YAMAMOTO

A method is presented to improve the convergency of solution for identification of soil properties by Successive Iinear Programming (SLP), using vertical array records of earthquake motion. Identification problem of shear wave velocity and quality factor of each layeris formulated in the frequency domain on the basis of multiple reflection and refraction method. In numerical analysis we showed that the modified SLP, which has been presented here, performed very good. Convergency and accuracy of solution is dramatically improved using both SLP and modified SLP.