

地震動によるすべりの統計的研究

STATISTICAL PREDICTION OF RIGID-BODY-SLIP
BY EARTHQUAKE EXCITATION

五十嵐俊一*・梶塚健治**・伯野元彦***

By Shunichi IGARASHI, Kenji KAJIZUKA and Motohiko HAKUNO

Slip displacement of a friction controlled mass excited by an earthquake ground motion is predicted both analytically and numerically. A set of linear differential equations each representing one continuous slip is solved with a stationary Gaussian excitation, and an analytical relation between accumulated slip and maximum velocity of ground motion is obtained. With 172 records of strong motion observed in Japan, 43 000 time histories of slip displacement are calculated numerically for various friction coefficients. A two D. O. F. regression equation of maximum slip displacement on friction coefficient and characteristic displacement of ground motion is found to explain 76 % of total variance of 36 249 D. O. F. The regression equation has also a good agreement with the analytical solution.

1. 導 入

構造物に作用する地震力に対して、構造物の変形能および耐力を確保することが伝統的な耐震設計の基本概念である。一方、地震動から構造物を隔離して地震力を軽減する考え方も古くから土木、建築各方面で提案されている^{1),2)}。

特に、海中に直接基礎を置く重力式海洋構造物の場合は、地震力に対して、所要の滑動安全率をもたせる伝統的な設計概念によると、非常に大きな安定重量が要求され、構造物の内部空間を利用する面で、効率が著しく低下する。

そこで、ある限界以上の地震動に対しては、基礎底面でのすべりを許容する設計方法が考えられる。これは、安定重量を削減できることに伴う一次的な利点に加えて、すべり限界以上の地震力をすべりを代償として免れるという効果もつものである。

この方法を実際の構造設計に適用するためには、地震動による基礎の運動を予測することが必要である。地盤

と構造物の動的な相互作用を、大変形、材料等の非線形性を考慮して解析することが要求される問題であり、地震動のランダムな性格と合わせ考えると、難しい問題といえる。

本研究は、地震動による構造物のすべり量の予測に役立てるために、粗い剛床上の一自由度系という最も単純な構造モデルについて、ランダム振動論による解析的な検討を加えるとともに、実際の強震記録を用いた数値解析結果の統計的分析を行うものである。

2. 基本方程式

粗い剛床上に置かれた剛体が、剛床の振動による慣性力の作用を受けて振動するモデルを用いて解析する〔図—1(a)〕。直接基礎式構造物に直接適用する場合は、地盤が地震時にも安定しており、地盤、構造物とも弾性変形が無視できるほど小さく、回転等のすべり以外の運動も同様に小さいと考えた一次近似構造モデルとしての意味をもたせ得る。

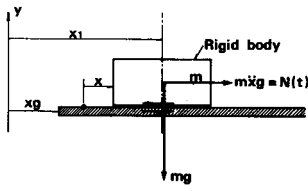
剛性床と剛体の間には、図—1(b)に示したクーロン摩擦力が作用すると考える。これは、相対速度 $\dot{x} = \dot{x}_g - \dot{x}_s$ の関数として、式(1)で表わされる。

$$F = \begin{cases} \alpha m \rho_s g & (\dot{x} = 0, -1 < \alpha < 1) \\ \alpha m \rho_s g \operatorname{sign} \dot{x} & (\dot{x} \neq 0) \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

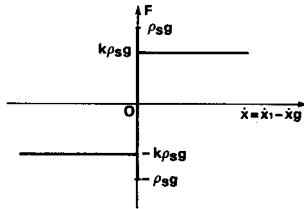
* 正会員 大成建設株式会社 土木本部設計部
(〒160-91 新宿区西新宿1-25-1)

** 正会員 大成建設株式会社 土木本部設計部

*** 正会員 工博 東京大学教授 地震研究所
(〒113 文京区弥生1-1-1)



(a) 剛床上一自由度系



(b) クーロン摩擦力

図-1 解析モデル

ここに、 ρ_s 、 $x\rho_s$ は、それぞれ静止摩擦係数および動摩擦係数 ($0 < x \leq 1$) である。

剛体の運動方程式は、相対変位 $x = x_1 - x_g$ について2階の非線形常微分方程式となる。

$$\ddot{x} + x\rho_s g \operatorname{sign} \dot{x} = -\ddot{x}_g \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $\operatorname{sign} \dot{x} \equiv \dot{x}/|\dot{x}|$ 、 $\dot{x} \neq 0$ である。

本研究では、式(2)の形まで構造系を単純化することによって、地震動 \ddot{x}_g と構造系側のパラメーターである摩擦係数 ρ_s 、 $x\rho_s$ の不確かさに焦点を絞って解析する。

3. すべりの基本的事項

運動方程式(2)から直接導かれるすべりの基本的事項を整理して述べる。

a) 滑動限界加速度： $|x_g| < a_{cr}$ ならば、剛体はすべり始めることはなく、運動方程式(2)は意味をもたない。

a_{cr} を“滑動限界加速度”とよんで、構造系からみた入力加速度のノルムと考える。

b) 相対摩擦係数：ある加速度 a を与えたとき、構造系のすべりやすさを表す尺度として、“相対摩擦係数” $\rho_m = \rho_s g/a$ を定義する。 a を入力地震動の最大加速度に取った場合、すべりを説明する有力な変数となる。

c) 水中の見掛けの摩擦係数：図-1のモデルは、見掛けの摩擦係数 ρ'_s を用いることにより、水中の運動を解析する基本モデルともなり得る。剛体に作用する浮力を $B = V\rho g$ 、剛体の付加質量を m_a とすれば、滑動限界加速度 a_{cr} は、(3)のつり合い式から次のように求まる。

$$\rho_s(m - m_w)g = (m + m_a)a_{cr} \dots\dots\dots (3)$$

$$\therefore a_{cr} = (m - m_w)/(m + m_a) \cdot \rho_s g \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 $m_w = V\rho$ 、 V は剛体の排水体積、 ρ は水の密

度である。また、運動方程式(2)は、次のように書き改められる。

$$\ddot{x} + x\rho_s g \frac{m - m_w}{m + m_a} \operatorname{sign} \dot{x} = -\ddot{x}_g \dots\dots\dots (5)$$

式(4)、式(5)が水中の剛体の運動を支配する方程式であるが、見掛けの摩擦係数 ρ'_s を用いれば、式(2)と同じ形に書ける。

$$\rho'_s = (m - m_w)/(m + m_a) \rho_s \dots\dots\dots (6)$$

図-1のようなモデルの場合、動水圧の効果は付加質量でよく表わせると報告されており³⁾、方程式(2)を用いた解析結果は、水中の場合にも、同様に適用できる。

4. 等価線形化法による解析解

非線形運動方程式(2)のホワイトノイズに対する応答は、Caughey⁴⁾ [1961]；Crandall⁵⁾ [1974]；Ahmadi⁶⁾ [1983]；らにより等価線形化法を用いて研究されている。本節は、三者の間の“等価線形化”の解釈の違いを明らかにするとともに、等価線形化法は、方程式(2)の形の非線形問題にはあまり効果的でないことを述べる。

入力地震動をホワイトノイズ $W(t)$ と仮定して、運動方程式(2)を統計的微分方程式⁷⁾に書き直して、式(7)を得る。

$$\dot{X} + x\rho_s g \operatorname{sign} \dot{X} = W(t) \dots\dots\dots (7)$$

$$\dot{X}(0) = \dot{y}_0, X(0) = y_0 \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 \dot{X} は確率過程 X の統計的微分を表わす。

初期条件(8)に対する $\{\dot{X}\}$ の推移確率密度 $P\{\dot{X}|y, t|y_0, 0\}$ は、方程式(7)を \dot{X} に関する一階の常微分方程式とみることによって、Caugheyにより、式(9)の形に表わされている。

$$P_{ix1}(y, t|y_0, 0) = \frac{k \exp(-2k|y|/W_0)}{\pi^{1/2} W_0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du + \frac{\exp[k(y - |y|)/W_0 - (y - y_0 + kt)^2/2W_0 t]}{(2\pi W_0 t)^{1/2}} \dots (9)$$

ただし、

$$k = x\rho_s g, \omega = (y_0 + |y|)/(2W_0 t)^{1/2}$$

方程式(7)は速度依存の非線形項を含むために、 $\{X\}$ の確率的性質はマルコフベクトル法により求めることはできない。したがって、Caugheyらは、方程式(7)と“等価な”線形方程式(10)に支配される確立過程 $\{X_e\}$ の性質から $\{X\}$ の性質を推定する方法を用いた⁸⁾。

$$\dot{X}_e + \beta_e \dot{X}_e = W(t) \dots\dots\dots (10)$$

等価線形減衰定数 β_e は、式(10)の誤差であり式(11)に示される e を2乗平均的に最小にするように選ぶ。

$$e = x\rho_s g \operatorname{sign} \dot{X} - \beta_e \dot{X}_e \dots\dots\dots (11)$$

式(11)より $E[e^2]$ を求めれば、

$$E[e^2] = x^2 \rho_s^2 g^2 E[(\text{sign } \dot{X})^2] - 2\beta_e x \rho_s g E[\dot{X}_e \text{sign } \dot{X}] + \beta_e^2 E[\dot{X}_e^2] \dots\dots(12)$$

式(12)を最小にする β_e が等価線形減衰定数であるが、この計算のためには、 $\{\dot{X}\}$ 、 $\{\dot{X}_e\}$ の確率分布を知る必要がある。 $\{\dot{X}_e\}$ については、 $\{X_e\}$ とともに、入力が必要しもホワイトノイズでなくとも、線形システムの理論から計算できる。

$$\{X_e\}, \{\dot{X}_e\} \text{の平均値と分散は,} \\ E[X_e] = y_0 + \dot{y}_0 \beta_e^{-1} (1 - \exp[-\beta_e t]) \dots\dots(13)$$

$$E[\dot{X}_e] = y_0 \exp(-\beta_e t) \dots\dots(14)$$

$$\sigma_{X_e}^2 = \frac{W_0}{2\beta_e^2} (2\beta_e t - (1 - \exp(-\beta_e t))(3 - \exp(-\beta_e t))) \dots\dots(15)$$

$$\sigma_{\dot{X}_e}^2 = \frac{W_0}{2\beta_e} (1 - \exp(-2\beta_e t)) \dots\dots(16)$$

入力がガウス過程であれば、線形方程式 (10) の応答もガウス過程となり、その平均と分散は、式 (13)~(16) で表わされる。

Ahmadi は、式 (13)~(16) の非定常項まで考えた解析を行ったが、結果が繰り返し計算を含む、陰な形でしか求まらない。

等価線形法の通常の方法は、式 (12) を形式的に β_e で偏微分してゼロと置くことにより、“等価な” β_e を求めるものである。

$$\beta_e = x \rho_s g E[\dot{X}_e \text{sign } \dot{X}] / E[\dot{X}_e^2] \dots\dots(17)$$

厳密には、式 (12) の $E[X_e^2]$ は、式 (14)、(16) に示したように β_e に依存するので式 (17) は、あくまで $\beta_e \ll 1$ なる場合に成立する。

式 (17) を用いて β_e を求める場合にも、 $\{\dot{X}\}$ 、 $\{\dot{X}_e\}$ の結合確率密度を用いて、期待値を計算することが正しいと考える。これに対して、Crandall ; Caughey は、式 (17) の \dot{X}_e と \dot{X} をいずれかに同一視した解を求めている。

Crandall は、 \dot{X}_e を \dot{X} で置き換え、Caughey によって求められた式 (9) の定常項を用いて、 β_{e1} を次のように与えている。 W_0 をホワイトノイズの強さとするれば、

$$\beta_{e1} = x \rho_s g E[\dot{X} \text{sign } \dot{X}] / E[\dot{X}^2] = x^2 \rho_s^2 g^2 / W_0 \dots\dots(18)$$

一方、Caughey は、式 (12) の \dot{X} を \dot{X}_e で置き換え、ガウス型の確率密度関数を用いることにより、 β_{e2} を次のように求めた。

$$\beta_{e2} = 4 x^2 \rho_s^2 g^2 / \pi W_0 \dots\dots(19)$$

この β_e は、Ahmadi が、 β_e を t の関数として式 (16) を用いて求めた“非定常”解の定常部分と一致している。

式 (18)、あるいは式 (19) の β_e を用いて、式 (15) に代入すれば、等価線形応答の分散が求まる。

ここでは、式(12)に戻って、 $\{\dot{X}\}$ の確率密度は、式(9)

の Caughey の解の定常部分を用い、 $\{\dot{X}_e\}$ の確率密度は、式 (14) と式 (16) の定常部分で規定されるガウス分布を用いて $E[e^2]$ を計算し、これを最小にする β_e を求める。 $\{\dot{X}_e\}$ 、 $\{\text{sign } \dot{X}\}$ は無相関と考えて、式 (12)~(16) より、

$$E[e^2] = x^2 \rho_s^2 g^2 + W_0 \beta_e / 2 \dots\dots(20)$$

式 (20) の $E[e^2]$ は、 β_e の単調関数であり、 $\beta_e \geq 0$ であるから、式 (20) を最小にする β_{e3} は、

$$\beta_{e3} = 0 \dots\dots(21)$$

このときの 2 乗平均誤差は、

$$E[e^2]_{\beta_e = \beta_{e3}} = x^2 \rho_s^2 g^2 \dots\dots(22)$$

式 (21) の β_{e3} を原方程式に代入すれば、

$$\ddot{X}_e = W(t) \dots\dots(23)$$

すなわち、入力地震動と同じ加速度で振動する解が、最も 2 乗平均誤差の小さい解であり、式 (22) より、この誤差は、摩擦係数 $x \rho_s$ が小さいほど小さいといえる。

以上の三様の考え方より、応答の分散をそれぞれ求めることができる。式 (15) と式 (18)、(19) より

$$\sigma_{X_{e1}}^2 = W_0^2 t / x^4 \rho_s^4 g^4 \dots\dots(24)$$

$$\sigma_{X_{e2}}^2 = W_0^2 t \cdot 16 / \pi^2 x^4 \rho_s^4 g^4 \dots\dots(25)$$

$\beta_{e3} = 0$ の場合は、直接式 (23) を 2 回積分して、 $\dot{X}_e(0) = X_e(0) = 0$ とすれば、

$$X_e(t) = X_g(t) \dots\dots(26)$$

したがって、入力の分散と出力の分散は等しく、

$$\sigma_{X_{e3}} = \sigma_{X_g} \dots\dots(27)$$

σ_{X_g} は、入力がホワイトノイズの場合は、無限大であるが、 X_g が地震動の地表面変位であると考えれば意味をもつ。

応答変位の最大値を $X_{\max} = 3\sigma_x$ という慣用的な関係を用いて予測しよう。このとき、式 (24) と式 (25) の中のホワイトノイズの強さ W_0 も、式 (28) の関係を用いて、入力地震動の最大加速度 A で表わす。

$$W_0 = \eta^2 A^2 \dots\dots(28)$$

ただし、 η は比例定数。

また、摩擦係数も、3. で定義した相対摩擦係数 $\rho_n = \rho_s g / A$ で表わす。

$$X_{\max 1} = 3 \eta^3 A^{1/2} / x^2 \rho_n^2 \dots\dots(29)$$

$$X_{\max 2} = 12 \eta^3 A t^{1/2} / \pi x^2 \rho_n^2 \dots\dots(30)$$

また、式 (27) に対しては、地表面変位の最大値を D とすれば、

$$X_{\max 3} = D \dots\dots(31)$$

式 (29)、(30) は最大加速度に比例する最大すべり量を与えるのに対し、式 (31) は、最大変位に比例するものを与える。等価線形化法は本来、非線形性の小さいものに対して有効な解法であり、今回の場合は、 $\beta_e = 0$ が厳密な意味で最小の誤差を与える点でも明らかのように、有効な方法とはいえないと考える。

5. 区間分割法による解析解

運動方程式に継続時間 S のある地震動 x_g を与えた場合を時刻歴的に考察することにより、応答の統計的性質を求める。

継続時間 S のうち剛体がすべっている ($\dot{x} \neq 0$) 時間が $(t_0, t_1), (t_2, t_3), \dots, (t_{2n}, t_{2n+1})$ の $(n+1)$ 個であるとすれば、剛体の運動は、式 (2) を式 (32) に示した初期条件を用いて $(n+1)$ 回解けば求まる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t_{2i}) &= 0 \\ x(t_{2i}) &= x(t_{2i-1}) \end{aligned} \right\} i=0, 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots(32)$$

$(n+1)$ 個の区間の 1 つを考えれば、 $\text{sign } x$ は定数となるから、式 (2) は、線形方程式 (33) となる。

$$\ddot{x} + \kappa \rho_s g = -\ddot{x}_g \quad \dots\dots\dots(33)$$

ただし、符号は、 $\ddot{x}_g(t_{2i}) \geq 0$ による。

式 (33) の解は、直接積分より、 $t_{2i} = t_1$ として、

$$\dot{x}(t) = \pm \kappa \rho_s g (t - t_1) - (\dot{x}_g(t) - \dot{x}_g(t_1)) \quad \dots\dots\dots(34)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \pm \frac{1}{2} \kappa \rho_s g (t - t_1)^2 - (x_g(t) - x_g(t_1)) \\ &\quad + \dot{x}_g(t_1)(t - t_1) + x(t_1) \quad \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

区間 (t_{2i}, t_{2i+1}) では、 x は定符号であるから、 $x(t)$ は、単調関数となり、

$$\max_{t \in (t_{2i}, t_{2i+1})} x(t) = \begin{cases} x(t_{2i}), & \ddot{x}_g(t_{2i}) < 0 \\ x(t_{2i+1}), & \ddot{x}_g(t_{2i}) > 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(36)$$

式 (34) に $\dot{x}(t_{2i+1}) = 0$ の条件を用いることにより、 $x(t_{2i+1})$ は、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} x(t_{2i+1}) &= 1/2 \cdot (t_{2i+1} - t_{2i}) (\dot{x}_g(t_{2i+1}) + \dot{x}_g(t_{2i})) \\ &\quad - (x_g(t_{2i+1}) - x_g(t_{2i})) + x(t_{2i}) \quad \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

ただし、

$$\frac{\dot{x}_g(t_{2i+1}) - \dot{x}_g(t_{2i})}{t_{2i+1} - t_{2i}} = \pm \kappa \rho_s g \quad \dots\dots\dots(38)$$

式 (37) と (38) は、すべり量の増分 $x(t_{2i+1}) - x(t_{2i})$ が、 $(t_{2i+1} - t_{2i})$ の間の (平均地表面速度) \times (時間) と、実際の地表面変位の差であることを物語っている。また、1 回のすべりの初めと終りでは、地表面速度の平均変化率が $\pm \kappa \rho_s g$ に等しい。さらに、式 (37), (38) より、1 回のすべり量 $\Delta x_i = x(t_{2i+1}) - x(t_{2i})$ は、

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \pm \frac{1}{2} \kappa \rho_s g (\dot{x}_g^2(t_{2i+1}) - \dot{x}_g^2(t_{2i})) \\ &\quad - (x_g(t_{2i+1}) - x_g(t_{2i})) \quad \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

したがって、時間 s の中の地震動によるすべり x_s は、

$$\begin{aligned} x_s &= \sum_{i=1}^{N(s)} \Delta x_i \\ x_s &= \sum_{i=1}^{N(s)} \left[\pm \frac{1}{2} \kappa \rho_s g (\dot{x}_g^2(t_{2i+1}) - \dot{x}_g^2(t_{2i})) \right. \end{aligned}$$

$$\left. - (x_g(t_{2i+1}) - x_g(t_{2i})) \right] \quad \dots\dots\dots(40)$$

ただし、 $N(s)$ は、時間 s の中のすべりの回数である。

あるサンプル地震動 \dot{x}_g に関して導かれた方程式 (40) は、確率過程 $\{\dot{X}_g\}, \{X_g\}$ で応答過程 $\{X_s\}$ を陽な形で表わす方程式と考えてよい。式 (40) を確率変数間の関係を示す式として書き直せば、

$$\begin{aligned} X_s &= \sum_{i=1}^{N(s)} \left[\pm \frac{1}{2 \kappa \rho_s g} (\dot{X}_g^2(t_{2i+1}) - \dot{X}_g^2(t_{2i})) \right. \\ &\quad \left. - (X_g(t_{2i+1}) - X_g(t_{2i})) \right] \quad \dots\dots\dots(41) \end{aligned}$$

式 (41) の中で、時間 s の中のすべりの回数を示す計数過程 $N(s)$ と第 1 項の符号を式 (38) の関係を用いて決定すれば、 X_s の統計的性質を決定することができる。

ここでは、入力過程 \dot{X}_g, X_g を平均値ゼロの定常ガウス過程として X_s の平均値と分散を計算する。

$$\begin{aligned} \text{式 (41) の両辺の期待値をとって、} \\ E[X_s] &= 0 \quad \dots\dots\dots(42) \end{aligned}$$

式 (41) の \sum の各項は独立と考えられるので、 X_s の分散は、各項の分散の和で表わされる。

$$X_s = \sum_{i=1}^{N(s)} \Delta X_i \quad \dots\dots\dots(43)$$

$$\sigma_{X_s}^2 = \sum_{i=1}^{E\{N(s)\}} \sigma_{\Delta X_i}^2 + \text{Var} \left[\sum_{i=1}^{N(s)} E[\Delta X_i] \right] \quad \dots\dots\dots(44)$$

$\sigma_{\Delta X_i}$ は、式 (41) から直接計算される。 $t_{2i} = t_1, t_{2i+1} = t_2$ とすれば、

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta X_i}^2 &= E[\Delta X_i^2] \\ &= E \left[\frac{1}{4 \kappa^2 \rho_s^2 g^2} (\dot{X}_g^2(t_2) + \dot{X}_g^2(t_1) - 2 \dot{X}_g^2(t_1) \dot{X}_g^2(t_2)) \right. \\ &\quad + X_g^2(t_1) + X_g^2(t_2) - 2 X_g(t_1) X_g(t_2) \\ &\quad \pm \frac{1}{\kappa \rho_s g} (\dot{X}_g^2(t_2) X_g(t_2) - \dot{X}_g^2(t_2) X_g(t_1) \\ &\quad \left. - \dot{X}_g^2(t_1) X_g(t_2) + \dot{X}_g^2(t_1) X_g(t_1)) \right] \quad \dots\dots\dots(45) \end{aligned}$$

$\{X_g\}, \{\dot{X}_g\}$ はガウス過程であるので、式 (46)~式 (48) の関係が成立する⁹⁾。

$$E[X(t_1)X(t_2) \dots X(t_{2m+1})] = 0 \quad \dots\dots\dots(46)$$

$$\begin{aligned} E[X(t_1)X(t_2) \dots X(t_{2m})] \\ = \sum E[X(t_j) \dots X(t_k)] \cdot E[X(t_g) \dots X(t_s)] \quad \dots\dots\dots(47) \end{aligned}$$

$$E[X^n(t)] = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1) \sigma_X^2 \quad \dots\dots\dots(48)$$

ただし、式 (47) の \sum は $2m$ 個の t_i を m 個に分ける $(2m)! / m! 2^m$ 通りの組合せについて取る、また、 n は偶数である。以上より、式 (45) は、

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta X_{t_1, t_2}}^2 &= \frac{1}{4 \kappa^2 \rho_s^2 g^2} (4(1 - \rho_{X_g}^2(t_1, t_2)) \sigma_{\dot{X}_g}^4 \\ &\quad + 2(1 - \rho_{X_g}(t_1, t_2)) \sigma_{X_g}^2) \quad \dots\dots\dots(49) \end{aligned}$$

ただし $\rho_{xg}(t_1, t_2)$, $\rho_{xg}(t_1, t_2)$ は、それぞれ \dot{X}_g , X_g の自己相関係数関数である。

さらに、 $1 - \rho_{xg}^2(t_1, t_2) \approx 1$, $\sigma_{\dot{x}_g} \gg \sigma_{x_g}$ を考慮して、

$$\sigma_{\Delta x_i}^2 = \frac{\sigma_{\dot{x}_g}^2}{x^2 \rho_s^2 g^2} \dots\dots\dots (50)$$

式 (44) と式 (50) より、 $E[\Delta X_i] = 0$ なる関係を用いて、

$$\sigma_{x_s}^2 = \sum_{i=1}^{E[M(s)]} \sigma_{\Delta x_i}^2 = \frac{E[N(s)] \sigma_{\dot{x}_g}^2}{x^2 \rho_s^2 g^2} \dots\dots\dots (51)$$

さて、応答の最大値を $X_{max} = 3 \sigma_x$ さらに、入力速度の最大値を $V = 3 \sigma_{\dot{x}_g}$, $\rho_n = \rho_{sg}/A$, $E[N(s)] = N$, として式 (29) ~ (31) と同様の予測式を作る。

$$X_{max4} = \frac{\sqrt{N} V^2}{3 x \rho_m A} \dots\dots\dots (52)$$

すべり量の統計量は、本節の議論に明らかなように、入力地震動の速度過程および変位過程に強く依存している。この意味でも、入力加速度過程の性質だけに注目する従来の方法だけでは不十分であるといえる。

6. 強震記録によるすべり量と統計的解析

地震動の弾性系に対する効果は、ホワイトノイズ、あるいは、浜波されたショットノイズ¹⁰⁾を用いて、ある程度よく表わせるといわれている^{11), 12)}。しかしながら、すべりの問題のように、“無線形”¹³⁾ともいわれる強い非線形性を示す系に対しては、等価線形法的な弾性系理論の直接の拡張からだけでは十分な知識を得られないことが、これまでの検討で明らかになった。

この問題は、構造モデルをより実際の構造物に近づけた有限要素解析ですべりまで含めた解析を行う場合にも、直面する問題である。増分変位と接線剛性マトリックスを用いる非線形有限要素法では、相対速度に依存する動摩擦力を忠実にモデル化することは、困難である。すべりの問題は、非線形弾塑性の立場からよりは、むしろ剛体力学的な立場からみる方が自然であり、現実的な解析が可能になると考える。

この意味で、式 (52) の X_{max4} がすべり量の自然な予測式であるといえるが、必ずしも十分とはいえない。本節は、実際の強震記録を用いたシミュレーション結果を用いて統計的な立場からすべり量と入力地震動の関係の研究するものである。

日本で観測された、1956年~1978年の約50回の強震加速度記録172波を運動方程式 (2) に入力して解析した。なお、1つの地震波に対して x と ρ_n を $10 \times 25 = 250$ 通りに変化させて $250 \times 172 = 43,000$ 個の応答 $x(t)$ を計算した。それぞれの応答 $x(t)$ の t に関する最大値をすべり量 x として、これについて分析を行った。

すなわち、地震波記録を $\{X_m\}$, 第 m 記録の記録時

間を s_m , 相対摩擦係数を $\{\rho_n\}$, 動摩擦係数と静止摩擦係数の比を $\{x\}$, 応答すべり量を $\{X_{mij}\}$ とすれば、

$$\begin{aligned} \{X_m\} &= \{\ddot{X}_{gm}(t), \dot{X}_{gm}(t), X_{gm}(t)\} \\ (m &= 1, 2, \dots, 172), 0 < t < S_m \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

$$\{\rho_{ni}\} = 0.04 \times i, (i = 1, 2, \dots, 25) \dots\dots\dots (54)$$

$$\{x_j\} = 0.1 \times j, (j = 1, 2, \dots, 10) \dots\dots\dots (55)$$

$$\{X_{mij}\} = \max_{0 < t < S_m} |x(t, \rho_{ni}, x_j, \ddot{X}_{gm})| \dots\dots\dots (56)$$

ここに、式 (56) の $X(t, \rho_{ni}, x_j, X_{gm})$ は、運動方程式 (2) を線形加速度法により数値積分して求めたすべり量である。さらに、波形記録 $\{X_m(t)\}$ を t に関して分析して表-1に挙げた特性値 $\{C_{mk}\}$, ($k = 1, 2, \dots, 33$) を計算した。

すべり量 $\{X_{mij}\}$ をよく説明するモデル F を回帰分析により求めることが本節の主題であるが、まず始めに、モデルの中の変数が式 (57) の形に分離できると仮定して、グラフィ的な考察を行った。

$$\begin{aligned} \{X_{mij}\} &= F(C_{mk}, x_j, \rho_{ni}) + e_{mij} \\ &= f(C_{mk}) \cdot g(x_j, \rho_{ni}, C_{mk}) + e_{mij} \dots\dots\dots (57) \end{aligned}$$

ここに、 $f(C_{mk})$ は、応答の大きさ [size] を決める関数であり、 $g(x_j, \rho_{ni}, C_{mk})$ は応答の形状 [shape] を決める関数である。 e_{mij} は応答の予測モデルからのばらつきである。線形弾性系の場合には、地震動の最大加速度が大きさ関数であると考えてよいので、これによって基準化した応答変位が、有名な平均応答スペクトルの計算に用いられており、これが線形弾性系の場合の形状関数であるといえる。

すべりの場合の大きさ関数を求めるために、式 (57) の両辺の i, j に関する平均値を取って、

$$\bar{X}_m = f(C_{mk}) \cdot \bar{g}(C_{mk}) + \bar{e}_m \dots\dots\dots (58)$$

ただし、 $(\bar{\cdot}) = \frac{1}{250} \sum_{i=1}^{25} \sum_{j=1}^{10} (\cdot)$

式 (58) で、 $\bar{g}(C_{mk})$ は、形状関数の C_{mk} による変動であるが、これは、 $f(C_{mk})$ の変動に比べて十分小さいと考えた。すなわち、各地震波の平均応答を C_{mk} で回帰するものが大きさ関数 $f(C_{mk})$ であると考えられる。

表-1に挙げた説明変数に関して、式 (58) を試みた結果、線形回帰で相関係数 γ が0.9以上のものは次の2つであった。

$$f_1 = 0.795 D + 0.587 (\gamma = 0.9395) \dots\dots\dots (59)$$

$$f_2 = 1.363 V^2/A + 0.913 (\gamma = 0.9135) \dots\dots\dots (60)$$

対数同士の線形回帰分析から相関係数の最大のものは、

$$f_3 = 2.431 (V^2/A)^{0.687} (\gamma = 0.893) \dots\dots\dots (61)$$

ただし、 D [cm], V [cm/s], A [cm/s²], f_1 [cm], f_2 [cm], f_3 [cm^{0.687}].

以上より、ある地震によるすべりの大きさを与える指標として、最大変位 D または (最大の速度)² / (最大加速度)

を取ればよいことがわかる。後者も、変位のディメンジョンをもつ量であり、“特性変位”とよんで以下の解析に用いる。これは、すべりという観点からみた地震の大きさともいえる。

さらに、区間分割法により求めたすべり量の予測式も、 V^2/A の項を含んでいることは興味深い。

図-2に X_m と D , V^2/A , A のプロットを示した。

次に、形状関数 $g(x, \rho_n, C_{mk})$ の視覚的なイメージを得るために、1つの地震波による応答 X_{mij} を ρ_n について x をパラメーターとしてプロットした。

図-3は、エルセントロ波 [1940, NS] に対して、

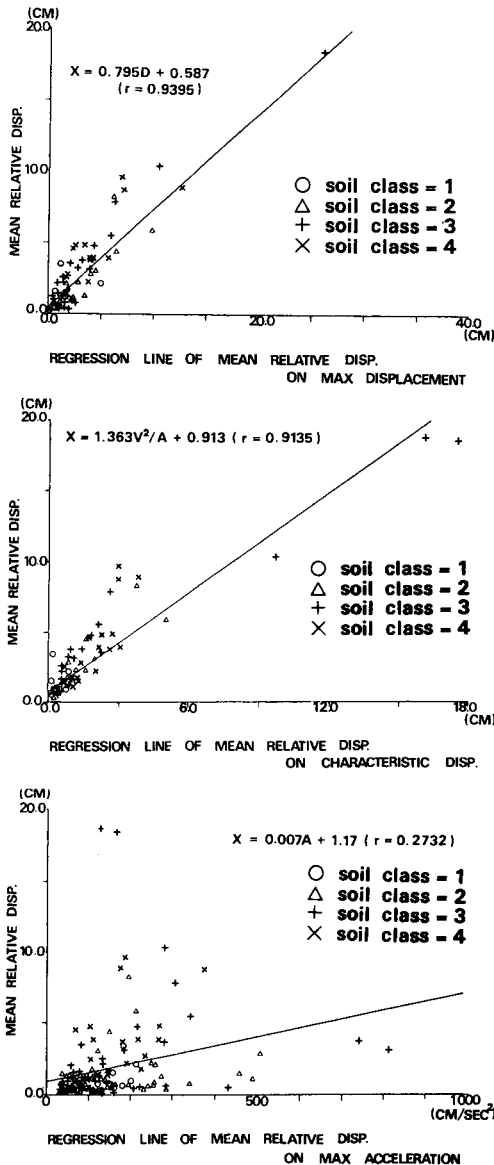
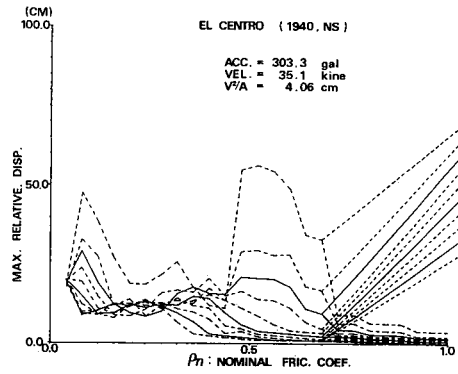


図-2 平均すべり量の回帰分析結果



FRICITION RESPONSE SPECTRUM

図-3 摩擦応答スペクトル

同様の計算を行った結果のプロットである。1つの地震波によるすべり量を摩擦係数に関して展開してプロットしたものであり、摩擦応答スペクトルとよんで以下を解析に用いる。

172波の摩擦応答スペクトルを観測地点別、地震別に見ると、観測地点に固有のパターンがあることがわかった。図-4は岩手県宮古港の68年5月から70年4月の観測データのスペクトルである。また、図-5は、松代市の群発地震のものである。

図-3～図-5に示した摩擦応答スペクトルによって、すべり量が相対摩擦係数に対して、極値をもつことがわかる。これらを数量化し、地震波および観測地点の地盤条件等との相関関係を追求すれば、興味深い関係が導かれると考えられるが、今回は、まず基本的な形状関数の形を求めた。

172枚のプロット全体を通していえることは、 x と ρ_n それぞれに対して応答が反比例的な動きを示すことである。 ρ_n に対しては、弱い傾向であるが、 x については、ほとんどあてはまる。

そこで、形状関数の候補として図-6(a)のような形状関数をいくつか考えて説明変数リスト表-1に加えた。

合計42個の説明変数候補を用いて、上下動を除く145波、36250個の標本数に対する重回帰分析を行った。分析は生データに対するものと対数同士の両方を試みた。表-1のSTEP-1は、対数同士の単回帰分析結果である。相関係数の高いものから、 a_1 , a_2 , $x\rho_n$, ρ_n , V , V^2/A と続いている。表中の a_1 は回帰係数、すなわち、何乗に比例するかを示し、 a_2 は切片、すなわち、定数倍を示す。形状関数候補のうち、等価線形化法、区間分割法両方の解析解に登場する $K\rho_n$ を採用して、2変数重回帰分析を行った結果が、表-1のSTEP-2である。

相関係数の最大のモデルとして、次式を得た。

$$X = 0.264(V^2/A)^{0.668} (x\rho_n)^{-0.924} \dots \dots \dots (62)$$

Data Summary of the Strong Motion Records for Fig.4-a through Fig.4-e

	COMP	DATE	TIME	ACC.	VEL.	V ² /A
a	NS	68/05/16	19:39	154.0	4.4	0.125
b	NS	68/05/23	04:29	132.7	2.4	0.043
c	NS	68/06/12	22:42	190.2	5.9	0.183
d	NS	68/11/14	03:42	109.3	2.1	0.040
e	NS	70/04/01	23:23	189.7	4.4	0.102

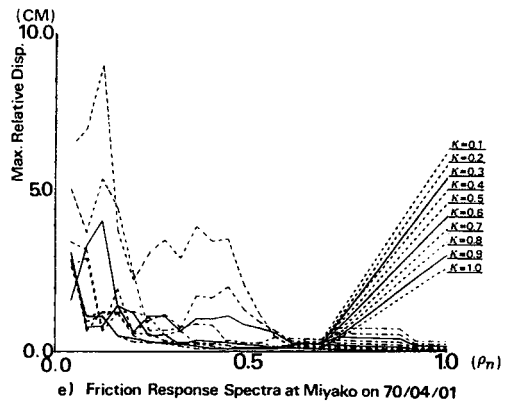
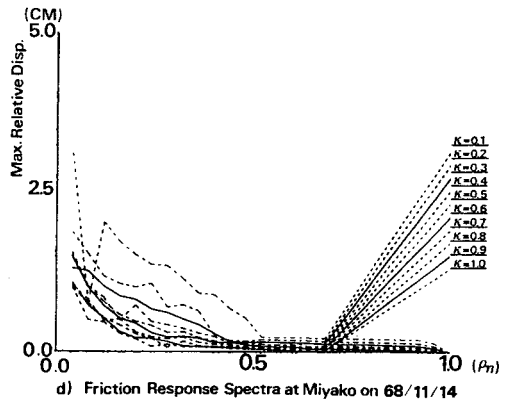
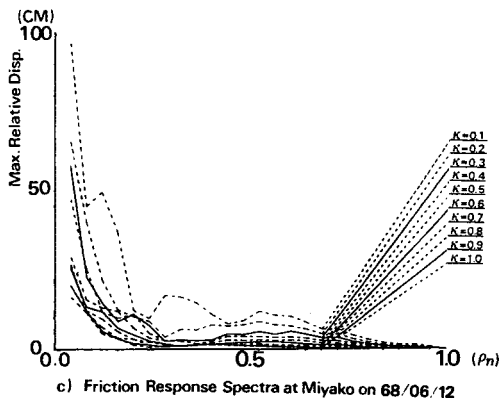
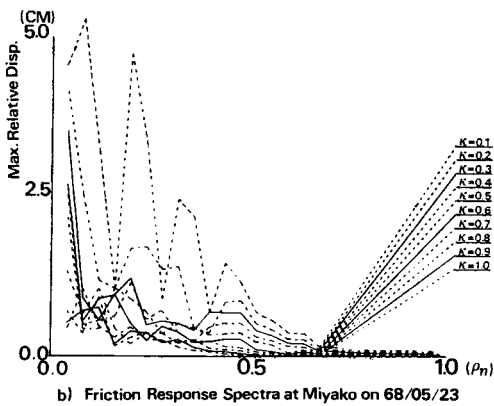
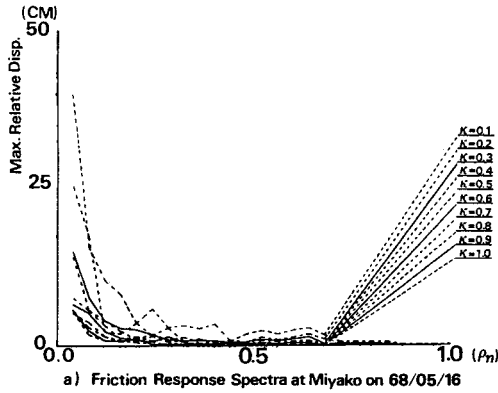
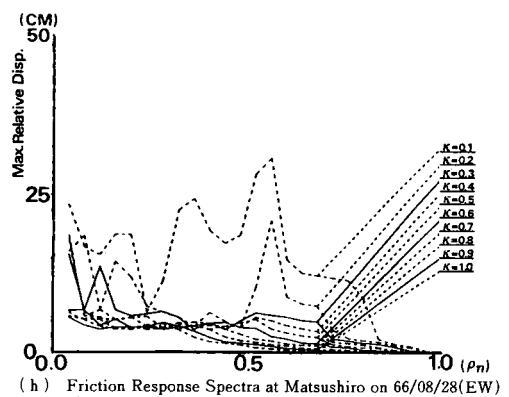
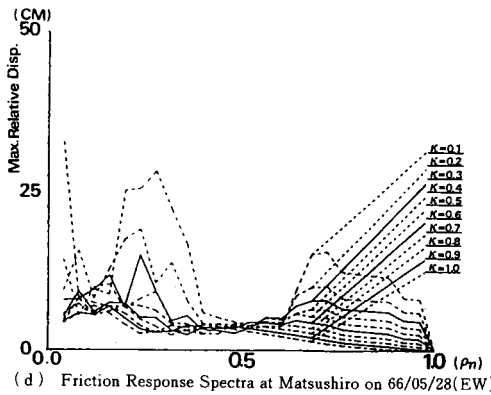
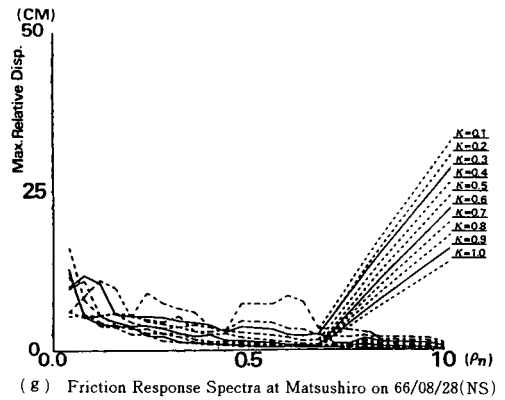
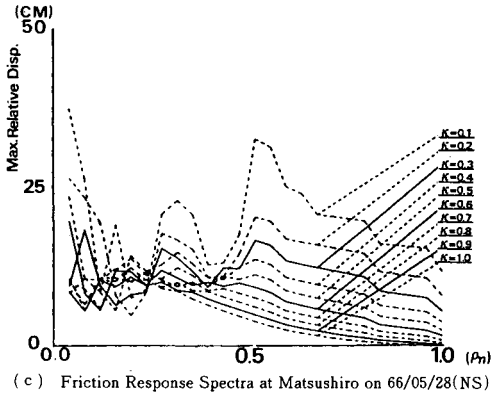
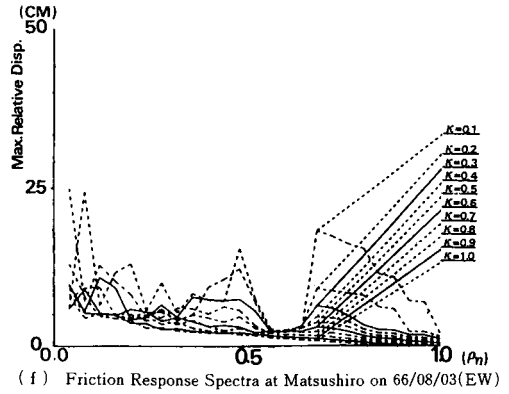
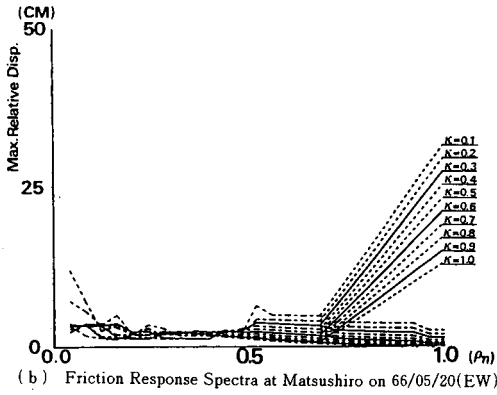
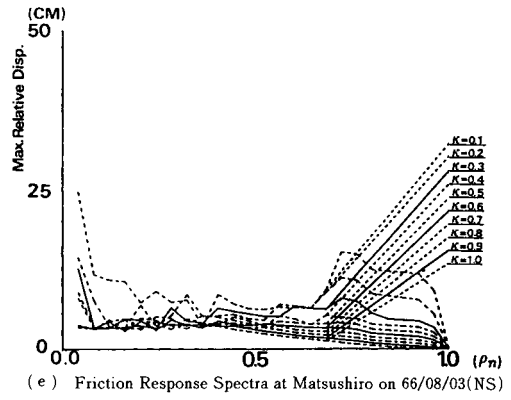
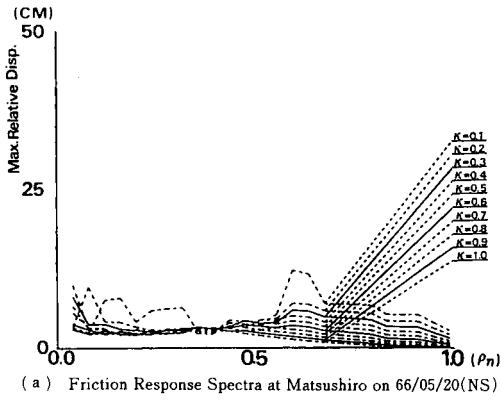


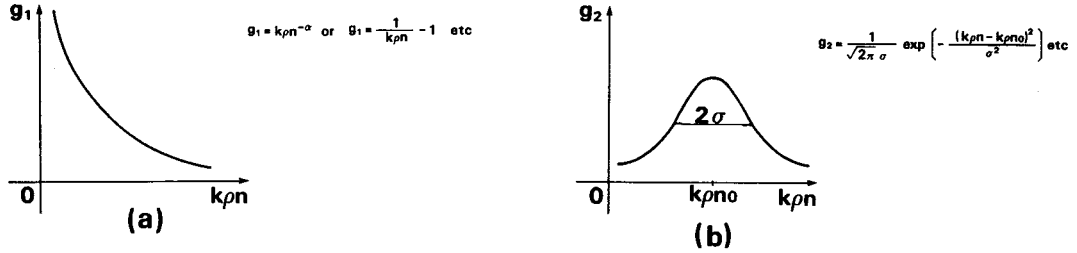
図-4 宮古港での強震記録に対する摩擦応答スペクトル

Data Summary of the Strong Motion Records for Fig.5-a through Fig.5-h

	COMP	DATE	TIME	ACC.	VEL.	V ² /A
a	NS	66/05/20	09:30	242.1	18.4	1.398
b	EW	66/05/20	09:30	232.9	15.3	1.005
c	NS	66/05/28	14:21	380.0	33.6	2.971
d	EW	66/05/28	14:21	277.0	27.5	2.730
e	NS	66/08/03	03:48	226.5	22.2	2.176
f	EW	66/08/03	03:48	188.7	22.2	2.618
g	NS	66/08/28	13:09	198.4	20.0	2.016
h	EW	66/08/28	13:09	114.2	18.7	3.062



図—5 松代市での強震記録に対する摩擦応答スペクトル



図—6 形状関数

表—1 地震動によるすべりの解析 説明変数一覧表

No.	記号	MEAN	σ	STEP 1			STEP 2				STEP 3						
				γ	a_1	a_2	γ	a_1	a_2	$a_3(k\rho_n)$	γ	a_1	a_2	$a_3(k\rho_n)$	$a_4(CDIS)$		
1	RD	最大滑り量	2.263	3.286	1.000			1.000				1.000					
2	ρ_n	$\rho_n = R_s g/A$	0.519	0.289	-0.521	-1.304	-0.799	0.661	-0.090	-0.841	-0.872						
3	$k\rho_n$		0.286	0.233	-0.650	-1.239	-1.201										
4	ρ_s	静止摩擦係数	0.079	0.089	-0.242	-0.462	-0.900	0.693	0.360	-0.526	-1.135	0.872	0.049	-0.539	-0.953	0.657	
5	NSOIL	地盤種別	2.517	0.867	0.206	1.122	-0.711	0.705	0.979	-1.209	-0.925	0.871	-0.107	-0.532	-0.924	0.683	
6	NSITE	測点番号	21.600	11.291	-0.162	-0.412	0.214	0.686	-0.347	-0.417	-0.926	0.872	0.069	-0.656	-0.924	0.685	
7	CDIS	$CDIS = V^2/A$	0.990	2.202	0.4795	0.768	0.013	0.871	0.668	-0.578	-0.924						
8	MAG	マグニチュード	6.218	0.877	0.103	1.510	-1.483	0.679	1.693	-2.178	-0.925	0.873	0.596	-1.052	-0.924	0.656	
9	DIST	震央距離	70.414	75.692	-0.063	-0.076	-0.176	0.663	-0.054	-0.760	-0.925	0.871	0.013	-0.597	-0.924	0.670	
10	DEPT	震源深さ	39.945	25.191	-0.122	-0.172	-0.046	0.678	-0.157	-0.619	-0.925	0.871	-0.016	-0.556	-0.924	0.663	
11	A	最大加速度	150.005	123.205	0.234	0.711	-1.759	0.720	0.625	-2.134	-0.927	0.873	0.145	-0.890	-0.925	0.636	
12	V	最大速度	9.890	9.751	0.465	1.134	-1.237	0.860	0.986	-1.665	-0.925	0.874	0.319	-0.920	-0.925	0.474	
13	D	最大変位	2.108	3.884	0.441	0.752	-0.291	0.845	0.660	-0.842	-0.925	0.872	0.102	-0.612	-0.924	0.581	
14	RATIO	(最大鉛直加速度)/A	0.141	0.232	-0.194	0.142	0.015	0.670	0.123	-0.575	-0.923	0.872	0.015	-0.550	-0.924	0.656	
15	TG	地盤の特性値	0.434	0.223	0.218	0.766	0.033	0.707	0.652	-0.567	-0.926	0.873	0.167	-0.517	-0.925	0.641	
16	TA	最大加速度時の平均周期	0.341	0.256	0.356	1.171	0.358	0.781	1.004	-0.285	-0.924	0.871	0.054	-0.555	-0.924	0.649	
17	TV	最大速度時の平均周期	0.876	0.673	0.216	0.601	-0.191	0.713	0.549	-0.751	-0.924	0.873	-0.149	-0.584	-0.924	0.716	
18	TD	最大変位の平均周期	1.939	1.583	0.204	0.397	-0.336	0.707	0.360	-0.884	-0.926	0.871	-0.021	-0.572	-0.924	0.676	
19	AA	$\frac{1}{10^3} \int_0^t \ddot{x} \sigma^2 dt$	10.438	16.312	0.330	0.453	-0.560	0.775	0.408	-1.087	-0.929	0.877	0.122	-0.682	-0.925	0.587	
20	VV	$\frac{1}{10^2} \int_0^t \dot{x} \sigma^2 dt$	11.644	21.974	0.387	0.452	-0.511	0.811	0.405	-1.041	-0.927	0.876	0.110	-0.675	-0.925	0.559	
21	DD	$\frac{1}{10^2} \int_0^t x \sigma^2 dt$	45.516	105.299	0.372	0.345	-0.561	0.801	0.309	-1.085	-0.927	0.873	0.056	-0.649	-0.925	0.597	
22	TPEAKA	金井スペクトルの最頻周期	0.241	0.177	0.202	0.618	0.149	0.707	0.565	-0.441	-0.926	0.873	0.127	-0.496	-0.925	0.644	
23	TPEAKV	金井スペクトル (速度)	0.605	0.429	0.291	0.743	-0.040	0.742	0.632	-0.628	-0.923	0.871	0.011	-0.575	-0.924	0.664	
24	TPEAKD	金井スペクトル (変位)	1.085	0.625	0.010	0.022	-0.291	0.661	-0.008	-0.845	-0.925	0.872	-0.052	-0.581	-0.924	0.670	
25	ΣTA	$\Sigma(\text{ピーク加速度}) \times (\frac{\text{秒}}{\text{時}})$	30.431	3.481	0.241	0.390	-0.766	0.719	0.339	-1.255	-0.925	0.874	0.089	-0.699	-0.925	0.633	
26	ΣTV	$\Sigma(\text{ピーク速度}) \times (\frac{\text{秒}}{\text{時}})$	3.602	4.894	0.270	0.339	-0.351	0.732	0.291	-0.894	-0.925	0.871	-0.013	-0.572	-0.924	0.677	
27	ΣTD	$\Sigma(\text{ピーク変位}) \times (\frac{\text{秒}}{\text{時}})$	3.439	6.767	0.235	0.286	-0.296	0.722	0.260	-0.848	-0.926	0.871	0.011	-0.581	-0.924	0.661	
28	SA(0.5)	$\dot{Z} < 0.5A$ でない継続時間	6.107	5.994	0.120	0.186	-0.385	0.681	0.183	-0.937	-0.925	0.871	0.037	-0.600	-0.924	0.659	
29	S	記録時間	32.897	21.952	0.240	0.731	-1.333	0.723	0.661	-1.786	-0.928	0.874	0.159	-0.819	-0.925	0.633	
30	SV(0.5)	$\dot{Z} < 0.5V$ でない継続時間	7.949	7.666	0.054	0.089	-0.351	0.667	0.113	-0.917	-0.925	0.874	0.079	-0.630	-0.924	0.664	
31	SD(0.5)	$Z < 0.5D$ でない継続時間	10.746	10.715	0.080	0.138	-0.401	0.672	0.147	-0.959	-0.925	0.872	0.054	-0.622	-0.924	0.661	
32	TAVA(0.5)	SA(0.5)間の平均周期	0.258	0.225	0.356	1.394	0.555	0.781	1.195	-0.114	-0.922	0.873	0.197	-0.479	-0.924	0.614	
33	TAVA	全体の平均加速度周期	0.266	0.118	0.347	1.801	0.803	0.780	1.580	0.120	-0.920	0.872	0.155	-0.496	-0.924	0.635	
34	TAVV(0.5)	SV(0.5)間の平均周期	0.644	0.525	0.305	1.049	-0.007	0.754	0.918	-0.592	-0.923	0.873	-0.205	-0.607	-0.925	0.735	
35	TAVV	全体の平均速度周期	0.624	0.372	0.317	1.270	0.038	0.762	1.119	-0.552	-0.924	0.872	-0.185	-0.605	-0.924	0.721	
36	TAVD(0.5)	SD(0.5)間の平均周期	1.680	1.555	0.206	0.560	-0.364	0.706	0.497	-0.907	-0.925	0.872	-0.087	-0.556	-0.924	0.693	
37	TAVD	全体の平均変位周期	1.675	1.212	0.235	0.730	-0.389	0.718	0.645	-0.928	-0.925	0.872	-0.103	-0.552	-0.924	0.697	
38	RA(2)	A_2/A	0.847	0.855	-0.000	-0.009	-0.294	0.660	-0.137	-0.855	-0.925	0.871	-0.068	-0.583	-0.924	0.668	
39	RV(2)	V_2/V	0.835	0.735	0.020	0.310	-0.267	0.661	0.260	-0.822	-0.925	0.876	0.777	-0.508	-0.924	0.679	
40	RD(2)	D_2/D	0.776	0.140	0.090	0.564	-0.221	0.670	0.518	-0.778	-0.925	0.871	0.100	-0.566	-0.924	0.664	
41	α_1	$\alpha_1 = 1/k\rho_n - 1$	0.716	0.949	0.716	0.949	-0.807	0.772	0.049	-0.788	-0.698	0.886	0.022	-0.590	-0.822	0.572	
42	α_2	$\alpha_2 = (1 - k\rho_n) / (1 + k\rho_n)$	0.699	1.916	0.699	1.916	0.266	0.667	0.286	-0.713	-0.535	0.878	0.319	-0.367	-0.764	0.668	

($\gamma=0.871$)

ただし、 $V[\text{cm/s}]$, $A[\text{cm/s}^2]$

これは、2つの自由度で、36 249 自由度の変動のほとんどを説明している式である。さらに、Caughey らによる等価線形化法による解析解が示している、応答が $k\rho_n$ の (-2) 乗に比例するという関係に対して、区間分割法により求めた応答は、 $k\rho_n$ の逆数に比例するという解の方が、実際により近いことを物語るものである。

$k\rho_n$ と (V^2/A) とその他の変数を用いた 3 自由度のモデルを試みた結果を STEP-3 に示した。STEP-2 に比べて相関係数の向上はほとんどない。図-6 (b) に示したピークをもった形状関数を用いたり、より複雑な数式モデルを試みれば、幾分かの相関係数の向上が期待されるが、これは、解析解の改良と合わせて今後の課題である。

7. 結 論

本研究により得られた結論をまとめる。

(1) 1 回のすべりによるすべり量は、入力地震動の(平均速度)×(すべり時間)と地表面変位の増分の差であり、1つの地震によるすべり量は、これらを加えたものであると考えることによりすべり量の統計的性質を解析的に求めることができた。

この方法は、従来の線形粘性減衰方程式を用いた等価線形化法に比べて、より直接的な方法であり、実際に近い解析解を与えるものである。

(2) 実地震波による統計的分析の結果、すべりを特性変位 (V^2/A) と相対摩擦係数 $(\mu\rho_n = \rho d_s/A)$ でよく説明する式 (62) が得られた。これは、2 自由度で、36 249 自由度の変動の 76 % を説明するものであり、(1) の解析解ともよく一致する。

(3) 今回取り上げた 30 以上の地震動にかかわる工学的特性値の中で、特性変位 (V^2/A) は、すべりという観点からみた地震動の大きさを表わすきわだった指標であり、本研究で得られた予測式と合わせて、すべりを

許容する構造物やすべりによる免震効果を期待する構造物の設計に役立てることができると考える。

参 考 文 献

- 1) Martel, R. R. : The Effects of Earthquakes on Buildings with a Flexible First Story, Bulletin of Seismological Society of America, Vol.19, No.3, 1929.
- 2) Pentti Varpasuo, Kai Rätty and Jouko Kenttälä : A trilinear Base-Isolator Concept for Nuclear Power Plants, Nuclear Engineering & Design 58, 1980.
- 3) Uwabe, T. and Higuchi, N. : Saking table tests for displacements computing method of sliding block in water during earthquakes, Proc. 6th Japan Earthquake Engineering Symposium, 1982.
- 4) Caughey, T.K. and Dienes, J.K. : Analysis of a Non-linear First-Order System With a White Noise In-put, Journal of Applied physics, Vol.32, pp.2476~2479, 1961.
- 5) Crandall, S.H., Lee, S.S. and Williams, J.H. : Accumulated slip of a Frictions Controlled Mass Excited by Earthquake Motions, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, pp.1094~1098, 1974.
- 6) Ahmadai, G. : Stochastic Earthquake Response of Structures on Sliding Foundation, Int. J. Eng. Sci., Vol.21, No.2, pp.93~102, 1983.
- 7) Y.K. リン (森大吉郎ら訳) : 構造動力学の確率論的方法, 培風館, pp.45~51, 1972.
- 8) Caughey, T.K. : Equivalent Linearization Techniques, Journal of the Acoustical Society of America, Vol.35, pp.1706~1711, 1963.
- 9) loc. cit. 7) pp.80~81.
- 10) loc. cit. 7) p.37.
- 11) Bycroft, G.N. : White Noise Representation of Earthquakes, Journal of Engineering Mechanics Div., ASCE, p.2434, 1960.
- 12) Clough, R.W. and Penzien, J. : Dynamics of Structures, McGraw-Hill, New York, pp.611~617, 1975.
- 13) 藤野陽三・佐々木有三・伯野元彦 : 地震動による物体のすべりについて, Bull. Earthq. Res. Inst., Vol.53, pp.461~480, 1978.

(1984. 7. 20・受付)