

動的最適性規準を用いた簡易最適耐震設計法に関する研究

STUDY OF THE SIMPLIFIED OPTIMUM A SEISMIC DESIGN
USED DYNAMIC OPTIMALITY CRITERION

古川 浩平*・山田 善一**・吉村 洋司***

By Kohei FURUKAWA, Yoshikazu YAMADA
and Yoji YOSHIMURA

1. 緒 論

電子計算機の発達に伴って、数理計画手法を構造物の設計に適用した、いわゆる最適設計の研究が数多くなされてきたが、いまだ実際の設計に手軽に利用するには至っていないのが現状であろう。その理由は種々考えられるが、その中で最も大きな問題は、最適化に数理計画手法を用いているために、設計変数が多くなると、最適解を得るのに多数回の繰り返し演算を必要とし、そのため演算に要する費用が多大なものとなることと、収束性に問題がでてくることであろう。最近新しい数理計画手法も開発されているが、上記の問題のすべてが解決されるにはまだ程遠いといえる。

構造物の最適化問題を解く他の方法として、非数理計画手法である最適性規準を用いた最適化に関する研究が最近盛んに行われている^{1)~7)}。この方法はエネルギー原理などを用いて、構造物の特性に基づいた最適性規準を規定したうえで、その最適性規準を満たす点に反復手法を用いて収束させていく手法で、数理計画手法の基本である試行錯誤とは根本的に異なった方法である。そのため最適化の手法は簡単、収束性は敏速、変数の数と繰り返し回数とはあまり関係がなく、多変数問題では特に有利な手法だとされている。

動的外力下における最適化問題にも、この最適性規準を用いた方法が適用されている^{8)~10)}。これらはいずれも、応力^{9), 4)}、振動数^{9), 6)}、変位⁷⁾などのおおの単一の制約条件下での最適化問題を取り扱っていた。耐震設計においては、基本的に変位、応力、最小断面積の3制約が必要であるが、最適性規準を用いて、これら3制約を考慮した最適耐震設計手法はいまだ開発されていない。

著者らはすでに動的変位の制約のみを考えた動的最適性規準を用いた最適化手法を提案した⁷⁾。この手法によれば多変数問題であっても、敏速に最適解に収束し、非常に有効な手法であることが確かめられている。しかしこの手法では、応力制約や最小断面積制約が考慮されていないことと、最適化にあたりかなり小さい初期値を用いる必要があった。本研究は上記の研究をさらに進めて、変位、応力、最小断面積制約のすべてを考慮し、かつ初期値が許容領域にあると否とにかかわらず、敏速に収束する手法を開発しようと試みたものである。

上記の研究⁷⁾は最適化を極値問題として数学的に取り扱い、最適性の条件である動的最適性規準を導き出したが、本研究ではこれに応力、最小断面積制約を付加するため、数学的極値問題として取り扱うことが困難になった。そのため反復過程において、構造物断面と応答間の関係を仮定し、繰り返し計算により収束させていく方法をとった。

本研究の結果、変位、応力、最小断面積制約をもつ最適耐震設計が、数理計画手法を用いずに、少数回の繰り返し計算で得られることが確かめられた。本設計法を用いることにより、多変数をもつ構造物の最適耐震設計が簡単に行えるようになるものと考えられる。以下 2. で最適耐震設計法の定式化、3. で反復最適化手法を説明し、4. で計算例、5. で本研究の結論を述べる。

2. 最適耐震設計法の定式化

本研究で取り扱う最適化問題は次のように表現できる。目的関数として、構造物の総重量 W をとり、

$$W = \sum_i A_i l_i \rho_i \rightarrow \min \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 A_i , l_i , ρ_i はおのおの i 要素の断面積、要素長、比体積重量、である。制約条件として、次の3制約を考える。

$$\text{変位制約} \quad x_i \leq x_a \dots \dots \dots (2)$$

* 正会員 工博 山口大学助教授 工学部建設工学教室

** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

*** 正会員 工修 日本道路公団

$$\text{応力制約} \quad |\sigma_i| \leq \sigma_a \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{最小断面積制約} \quad A_i \geq A_{\min} \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 x_1 は注目点変位、 x_a は注目点の許容変位、 σ_i は i 要素の応力、 σ_a は許容応力、 A_{\min} は許容最小断面積、である。この最適化問題を解くために以下に示すような定式化を行う。

(1) 動的最適性規準

著者らの過去の研究により、変位制約下における動的最適性規準は次式で示される ν_i を全要素で等しくさせることと表現できる⁷⁾。

$$\nu_i = \frac{2 \mathbf{x}^t \mathbf{K}_i \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^t \mathbf{M}_i \mathbf{x}}{A_i \rho_i \cdot \mathbf{x}^t \mathbf{M} \mathbf{x}} \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 \mathbf{M} は質量マトリックス、 \mathbf{M}_i 、 \mathbf{K}_i は i 要素に関係した部分のみ値が入り他の要素に関係した部分はゼロの質量および剛性マトリックス、 \mathbf{x} は動変位、 λ は固有値であり、レイリー商により次のように表わされる。

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^t \mathbf{M} \mathbf{x}} \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 \mathbf{K} は剛性マトリックス、である。

(2) 変位制御

最適化過程において、構造物の注目点変位 x_1 を制御するためには、変位と断面積とを関係づける必要があるが、直接両者を関係づけることは難しい。そこでその媒介として固有値 λ を用いる。式 (6) を断面積で微分することにより、固有値の対断面積変化率 μ_i は次式で求められる。

$$\mu_i = \frac{\partial \lambda}{\partial A_i} = \frac{2 \mathbf{x}^t \mathbf{K}_i \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^t \mathbf{M}_i \mathbf{x}}{A_i \cdot \mathbf{x}^t \mathbf{M} \mathbf{x}} = l_i \rho_i \nu_i \dots\dots(7)$$

式 (7) より断面積変化 ΔA_i に伴う固有値の変化 $\Delta \lambda_i$ を次のように求めることができる。

$$\Delta \lambda_i = \mu_i \Delta A_i \dots\dots\dots(8)$$

固有値と変位との関係は、示方書の規定⁸⁾を参考にして実用上次のように表現できる⁷⁾。

$$\lambda x_1 = \text{const.} \dots\dots\dots(9)$$

この関係式は数値実験により、数回の繰り返し計算で収束することが確かめられている⁹⁾。式 (8)、(9) により変位と断面積が関係づけられたので、これを用いて変位制御を行う。

反復過程において固有値は次式のように表わされる。

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \Delta \lambda \dots\dots\dots(10)$$

ここに、上添字は反復回数を表わす。式 (9) より

$$\lambda^{n+1} x_1^{n+1} = \lambda^n x_1^n \dots\dots\dots(11)$$

が得られる。式 (10) と (11) より λ^{n+1} を消去し、得られた x_1^{n+1} を変位制約である式 (2) に代入し整理すると次式が得られる。

$$\Delta \lambda \geq \left(\frac{x_1^n}{x_a} - 1 \right) \lambda^n \dots\dots\dots(12)$$

動変位を制御するため断面積を変化させる必要があるが、最も簡単な方法として全要素において同一断面積変化 ΔA_0 を行うとすると、式 (8) より $\Delta \lambda$ は次のように求められる。

$$\Delta \lambda = \sum_{i=1}^m \Delta \lambda_i = \sum_{i=1}^m \mu_i \Delta A_0 = \Delta A_0 \sum_{i=1}^m \mu_i \dots\dots\dots(13)$$

式 (12) に式 (13) を代入することにより、

$$\Delta A_0 \geq \frac{\left(\frac{x_1^n}{x_a} - 1 \right) \lambda^n}{\sum_i \mu_i} \quad (\sum_i \mu_i > 0) \dots\dots\dots(14)$$

$$\Delta A_0 \leq \frac{\left(\frac{x_1^n}{x_a} - 1 \right) \lambda^n}{\sum_i \mu_i} \quad (\sum_i \mu_i < 0) \dots\dots\dots(15)$$

式 (14)、(15) により変位制約を満足させる断面積変化 ΔA_0 を求めることができる。最適化において断面積は小さいほどよいため、 $\sum \mu_i > 0$ の場合は式 (14) を満足する最小の ΔA_0 を採用すればよい。また $\sum \mu_i < 0$ の場合は要素断面積を 0 または負にしない最小の ΔA_0 を採用すればよい。式 (14)、(15) では $\sum \mu_i = 0$ の場合が抜けているが、この場合は後に述べるように他の制約に依存して最適化を進めればよい。

(3) 等変位下における軽量化手法

(2) において変位制約を満たす手法を定式化したのが、これは変位を許容変位に近づけるだけで、最小重量構造物を得る手法ではない。ここでは等変位下における軽量化手法について論じ、(2) の手法と組み合わせることにより、変位制約を満たしつつ最小重量構造物を得る手法を示す。すでに (1) で述べたように、変位制約下における最適化は、各要素の ν_i を等しくさせることであり、その検証もすでになされている^{7)、9)}。等変位下において軽量化を図るために、以下のように定式化を行う。その際、式 (9) の関係から、等変位ということは、固有値が変化しないということと同じであり、以下変位の代わりに固有値を用いて定式化する。

過去の研究⁷⁾より、最適構造物は ν_i の大きな要素の断面を大きく、 ν_i の小さな要素の断面を小さくすることにより得られることが明らかになっている。よって、断面変化量 ΔA_i は ν_i に比例する形で次のようにして表現する。

$$\Delta A_i = \alpha (\nu_i - \bar{\nu}) \dots\dots\dots(16)$$

ここで、 α は軽量化を行うための任意定数であり、この α を軽量化係数と名づける。 α の決定に関しては、後に 3. (2) で詳述する。 $\bar{\nu}$ はこれより大きな ν_i をもつ要素の断面を増加させ、これより小さな ν_i の要素の断面を減少させるための、いわば ν_i の平均値と同じような意

味をもつ量で、等変位下では固有値の変化がゼロであるということから、以下のようにして求められる。

固有値の変化 $\Delta\lambda$ は、

$$\Delta\lambda = \sum_i \mu_i \Delta A_i = \sum_i \mu_i \alpha (\nu_i - \bar{\nu})$$

$$= \alpha \left\{ \sum_i \mu_i \nu_i - \bar{\nu} \sum_i \mu_i \right\} = 0 \dots\dots\dots(17)$$

よって $\bar{\nu}$ は次式で定められる。

$$\bar{\nu} = \frac{\sum_i \mu_i \nu_i}{\sum_i \mu_i} \dots\dots\dots(18)$$

このときの重量変化 ΔW は

$$\Delta W = \sum_i l_i \rho_i \Delta A_i = \sum_i l_i \rho_i \alpha (\nu_i - \bar{\nu})$$

$$= \frac{\alpha}{\sum_i \mu_i} \left\{ \left(\sum_i l_i \rho_i \nu_i \right)^2 - \left(\sum_i l_i \rho_i \nu_i^2 \right) \left(\sum_i l_i \rho_i \right) \right\}$$

$$\dots\dots\dots(19)$$

ここで、

$$\left(\sum_i l_i \rho_i \nu_i \right)^2 - \left(\sum_i l_i \rho_i \nu_i^2 \right) \left(\sum_i l_i \rho_i \right) \leq 0 \dots\dots(20)$$

である。よって $\sum \mu_i > 0$ のとき $\alpha > 0$ とし、 $\sum \mu_i < 0$ のとき $\alpha < 0$ とすれば、 $\Delta W \leq 0$ となる。すなわち、 $\sum \mu_i > 0$ のとき、式 (18) で示される $\bar{\nu}$ より大きい ν_i の要素に対して正の断面積変化、すなわち重量増加を与え、 $\bar{\nu}$ より小さい ν_i の要素に対して負の断面積変化、すなわち重量減少を与える。その結果式 (20) に示すように、重量変化 ΔW は負となりさらに重量を減少させることができる。 ν_i がすべて等しくなったときに ΔW は 0 となり、これ以上重量を減らすことのできない最小重量構造物となる。 $\sum \mu_i < 0$ のときは、 $\bar{\nu}$ より大きい ν_i の要素の断面積を減少させ、 $\bar{\nu}$ より小さい ν_i の要素の断面積を増加させることにより、最小重量構造物を得ることができる。しかし、 $\sum \mu_i < 0$ になるのは、最適解とかけ離れた非常に極端な初期値を与えた場合のみであり、その場合でも最適化過程ですぐに $\sum \mu_i > 0$ となるため、実際上はほとんど考える必要はない。

最適化過程において、変位の取束条件を満たしつつ、最小重量構造物を得るための断面積変化 ΔA_{i1} は、式 (14)、(15) と式 (16) を組み合わせることにより、次のように得られる。

$$\Delta A_{i1} \geq \frac{\left(\frac{x_1^n}{x_a} - 1 \right) \lambda^n}{\sum_i \mu_i} + |\alpha| \cdot (\nu_i - \bar{\nu}) \quad \left(\sum_i \mu_i > 0 \right)$$

$$\dots\dots\dots(21)$$

$$\Delta A_{i1} \leq \frac{\left(\frac{x_1^n}{x_a} - 1 \right) \lambda^n}{\sum_i \mu_i} - |\alpha| \cdot (\nu_i - \bar{\nu}) \quad \left(\sum_i \mu_i < 0 \right)$$

$$\dots\dots\dots(22)$$

式 (21)、(22) では $\sum \mu_i = 0$ の場合が抜けているが、この場合は以下に述べる応力制御や最小断面積制約によって、最適化を進めればよい。式 (21)、(22) の右辺第 1

項は変位制約を満たすための全要素同一断面積変化を示し、第 2 項は等変位下における軽量化、すなわち最小重量化を示す。これにより、変位制約を満たすことと、最小重量化を図ることの 2 条件を同時に満たしつつ最適化が行える。

(4) 応力制御による軽量化

反復過程における応力と断面積との関係は、要素 i に作用する部材力 P_i が n 回目と $n+1$ 回目の反復において変化しないという仮定より、実用上次のように関係づければ十分である。

$$A_i^n \cdot |\sigma_i^n| = A_i^{n+1} \cdot |\sigma_i^{n+1}| = P_i = \text{const.} \dots\dots(23)$$

ここに、上添字 n 、 $n+1$ は反復回数である。いま反復途中を考えると、断面積は次のように求められる。

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \Delta A_{i2} \dots\dots\dots(24)$$

式 (23) に式 (24) を代入し A_i^{n+1} を消去し、応力制約を示す式 (3) を用いると次式が導かれる。

$$|\sigma_i^{n+1}| = \frac{A_i^n \cdot |\sigma_i^n|}{A_i^n + \Delta A_{i2}} \leq \sigma_a \dots\dots\dots(25)$$

$A_i^n + \Delta A_i > 0$ 、 $\sigma_a > 0$ であるから、

$$\Delta A_{i2} \geq \left(\frac{|\sigma_i^n|}{\sigma_a} - 1 \right) \cdot A_i^n \dots\dots\dots(26)$$

となる。この式 (26) は応力比を用いた全応力設計法と同じであり、この式より応力制約を満足し、最小重量構造物を得る断面積変化 ΔA_{i2} を求めることができる。

(5) 最小断面積制約による軽量化

反復過程における断面積変化は式 (24) に示されているが、この式 (24) と最小断面積制約式 (4) より次式が導かれる。

$$A_i^{n+1} = A_i^n + \Delta A_{i3} \geq A_{\min} \dots\dots\dots(27)$$

ゆえに、最小断面積制約を満たした最小重量構造物を得る断面積変化 ΔA_{i3} は次のように求めることができる。

$$\Delta A_{i3} \geq A_{\min} - A_i^n \dots\dots\dots(28)$$

3. 反復最適化手法の定式化

(1) 最適性の判定

2. で示した定式化に従って、最適化を行っていく場合、最適性の判定を行う必要がある。得られた解が式 (2)~(4) の各制約条件を満たしているだけでは最適解とはいえない。最適解は式 (5) に示す各要素の ν_i が等しくなっていなければならない。そこで ν_i のばらつきを表わす指標として次のような分散指数 η を定義する。

$$\eta = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\nu_i - \bar{\nu})^2 / m}}{\bar{\nu}} \dots\dots\dots(29)$$

ここに、 m は要素数である。最適な状態ではすべての ν_i が $\bar{\nu}$ と等しくなり、 $\eta=0$ となる。しかし著者らの過去の研究により、 ν_i は厳密に等しくならなくても、ほぼ等しい値になれば最適解とみなすことができる。そこでこの研究の結果を参考にして、最適解の構造物重量から 0.1% 以内の誤差を考慮して $\eta \leq 0.08$ となったとき、全要素の ν_i が等しくなったとして収束計算を打ち切ることとする。もちろんこのとき、式 (2)~(4) に示す制約条件を満たしていることは当然である。

(2) 軽量化係数 α の決定

式 (16) に示す軽量化係数 α は任意定数であり、敏速にかつ確実に最適解に収束するように、うまく与える必要がある。本研究においては、軽量化に伴う断面積の変化率の最大値を規制することにより軽量化係数 α を定める。断面積の変化率の最大値を ζ とすると、断面積変化量 ΔA_i は次式で規制される。

$$\Delta A_i \leq \zeta \cdot A_i \dots\dots\dots(30)$$

式 (16) を代入して整理すると、

$$|\alpha| \leq \left| \frac{\zeta \cdot A_i}{\nu_i - \bar{\nu}} \right| \dots\dots\dots(31)$$

となる。軽量化係数 α は式 (31) を満たす最大の値を採用すればよい。収束を早めかつ最適解近傍での解の振動を防ぐために、 ζ は最適解に近づくにつれて小さくしていくべきだと考えられるため、 ζ は η の関数として次式のように定める。

$$\zeta = C_1 \cdot \eta \dots\dots\dots(32)$$

ここに、 C_1 は定数である。 C_1 は解が敏速かつ確実に収束するように適当に定める必要がある。 C_1 の決め方については 4. の計算例で示す。

(3) 反復最適化手法

2. で各制約を満足させるのに必要な断面積変化を求める手法は述べた。ここではこれらを総合した最小重量構造物を求めるための反復最適化手法について説明する。

式 (2)~(4) に示す制約を満足し、式 (5) に示す ν_i を全要素で等しくさすような断面積変化を求める式を再掲すると次のようになる。

変位制御による軽量化

$$\Delta A_{i1} \geq \frac{\left(\frac{x_1^n}{x_a} - 1\right) \lambda^n}{\sum_{i=1}^m \mu_i} |\alpha| \cdot (\nu_i - \bar{\nu}) \left(\sum_{i=1}^m \mu_i > 0 \right) \dots\dots\dots(33)$$

$$\Delta A_{i1} \leq \frac{\left(\frac{x_1^n}{x_a} - 1\right) \lambda^n}{\sum_{i=1}^m \mu_i} - |\alpha| \cdot (\nu_i - \bar{\nu}) \left(\sum_{i=1}^m \mu_i < 0 \right) \dots\dots\dots(34)$$

応力制御による軽量化

$$\Delta A_{i2} \geq \left(\frac{|\sigma_i^n|}{\sigma_a} - 1 \right) A_i^n \dots\dots\dots(35)$$

最小断面積制約による軽量化

$$\Delta A_{i3} \geq A_{\min} - A_i^n \dots\dots\dots(36)$$

ここに、上添字 n は反復回数である。

本研究における目的関数は構造物重量であるから、 ΔA_{i1} , ΔA_{i2} , ΔA_{i3} として各式を満たす最小の値を採用すれば最小重量構造物が得られる。ここで $\sum_i \mu_i < 0$ の場合、式 (34) を満たす ΔA_{i1} はどんなに小さな値でもいいため、実際上式 (34) はアクティブな制約にならず、考慮する必要がない。 $\sum_i \mu_i > 0$ の場合は式 (33), (35), (36) を満たす最小のもの、すなわち等号成立時の ΔA_{i1} , ΔA_{i2} , ΔA_{i3} を採用すれば個々の制約を満たした最小重量構造物が得られることになる。そしてこれらの3式 (33), (35), (36) のすべてを満たす ΔA_i はその中のアクティブなもの、すなわち ΔA_{i1} , ΔA_{i2} , ΔA_{i3} の最大値をとればよい。 $\sum_i \mu_i \leq 0$ の場合は、式 (35), (36) の等号成立時の ΔA_{i2} , ΔA_{i3} の大きい方を ΔA_i に採用すればよい。

ここで変位制御による軽量化の式 (33) から ΔA_i が決まる要素を変位制約支配要素と名付け、応力制御あるいは最小断面積制約による軽量化の式 (35), (36) から ΔA_i が決まる要素を応力・最小断面積制約支配要素と名付ける。式 (33), (34) は全要素が変位制約支配要素であるとして導かれている。ところが応力・最小断面積支配要素が生じるとこの前提が崩れ、変位制御による軽量化がうまく行えなくなる。そこで修正が必要になる。なぜなら、式 (13) や式 (17) に示すように固有値の変化 $\Delta \lambda$ を全要素で計算していたが、応力・最小断面積支配要素が生じると、その要素の ΔA_i は応力または最小断面積制約から決定されるため、変位制御による軽量化の対象となる要素から取り除く必要が生じる。すなわち、反復過程において固有値の変化量 $\Delta \lambda$ は、

$$\Delta \lambda = \Delta \lambda_D + \Delta \lambda_S = \sum_{i=1}^{m_D} \mu_i \Delta A_i + \sum_{j=1}^{m_S} \mu_j \Delta A_j \dots\dots(37)$$

ここに、 $\Delta \lambda_D$, m_D は変位制約支配要素による固有値の変化量およびその要素数、 $\Delta \lambda_S$, m_S は応力・最小断面積制約支配要素による固有値の変化量およびその要素数である。これを式 (12), (13) に代入することにより

$$\Delta \lambda = \sum_{i=1}^{m_D} \mu_i \Delta A_0 + \Delta \lambda_S \geq \left(\frac{x_1^n}{x_a} - 1 \right) \lambda^n \dots\dots(38)$$

ここですでに示したように、 $\sum \mu_i < 0$ の場合は変位制約で断面変更を行わないことにより、 $\sum \mu_i > 0$ の場合のみを考えて

$$\Delta A_0 \geq \frac{\left(\frac{x_1^n}{x_a} - 1\right) \lambda^n - \Delta \lambda_S}{\sum_{i=1}^{m_D} \mu_i} \dots\dots\dots(39)$$

で変位制御がなされる。また式 (17) の $\Delta\lambda$ は変位制約支配要素のみで決定する必要があるため、 \bar{v} や η は変位制約支配要素のみで計算した次式を用いて決定される。

$$\bar{v}_D = \frac{\sum_{i=1}^{m_D} \mu_i v_i}{\sum_{i=1}^{m_D} \mu_i} \dots\dots\dots(40)$$

$$\eta_D = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m_D} (v_i - \bar{v}_D)^2 / m_D}}{\bar{v}_D} \dots\dots\dots(41)$$

以上により、応力・最小断面積制約支配要素が存在するとき、それ以外の要素における式 (33) は次のように修正される。

$$\Delta A_{i1} \geq \frac{\left(\frac{x_1^n}{x_a} - 1\right) \lambda^n - \Delta\lambda_S}{\sum_{i=1}^{m_D} \mu_i} + |\alpha| \cdot (v_i - \bar{v}_D) \left(\sum_{i=1}^{m_D} \mu_i > 0\right) \dots\dots\dots(42)$$

以上のようにして得られた ΔA_i を用いて、設計変数 A_i は次式のように求められる。

$$A_i^{n+1} = A_i^n + C_2 \cdot \Delta A_i \dots\dots\dots(43)$$

ここに、 C_2 は解の振動を防ぎ、収束を安定化するための

定数で、4. の計算例で考察を加える。

これより動的最適性規準を用いた最適耐震設計は次のような手順でなされる。

- ① 与えられた A_i に対して動的解析を行い、 x_1 、 σ_i 、 v_i 、 μ_i 等の諸量を計算する。
 - ② 最適解に収束したか判定し、収束していなければ手順 ③ に進む。
 - ③ 式 (33)、(35)、(36) より ΔA_i を求める。
 - ④ 手順 ③ で応力・最小断面積制約支配要素が生じた場合、その要素の ΔA_i は式 (35) または (36) より求め、それ以外の要素に対しては式 (42)、(35)、(36) より ΔA_i を求める。この操作を応力・最小断面積制約支配要素が生じなくなるまで繰り返す。
 - ⑤ ΔA_i がすべて決まったら $A_i^{n+1} = A_i^n + C_2 \cdot \Delta A_i$ として新しい A_i を求め、手順 ① に戻る。
- 以上の手順を 図-1 のフローチャートに示す。

4. 数値計算例および考察

数値計算例で用いる地震荷重として、図-2 に示す減衰 2% の応答スペクトル曲線を用いる。この曲線は一例であって、他のスペクトル曲線でも同様に利用できる。数値計算例の対象とする構造物は 図-3 に示す単純ばりで、全断面に 3 t/m の分布荷重と、中央質点に 35 t の荷重が載っているものとする。この構造物の断面 2 次モーメント (I)、断面係数 (Z)、断面積 (A) の関係を次のように仮定する¹⁰⁾。

$$I = A^2 / 0.64 \dots\dots\dots(44)$$

$$Z = 0.78 I^{3/4} \dots\dots\dots(45)$$

最初に、式 (32)、(43) に用いた任意定数 C_1 、 C_2 を決める必要がある。 C_1 、 C_2 は最適解にすみやかにかつなめらかに収束するように決めねばならない。 C_1 、 C_2 は任意定数であるから簡単のために $C_1 = C_2 = C$ とし、 C を変化させて最適化を行い C の値を決定する。図-4、5 は入力として鉛直方向に 100 ガル、断面積の初期値は全要素とも 1.0 m²、中点の許容変位 $x_a = 0.035$ m、鋼材として SS 41 を用いるものとしその地震時許容応力 $\sigma_a = 23800$ t/m²、最小断面積制約 $A_{min} = 0.001$ m² の

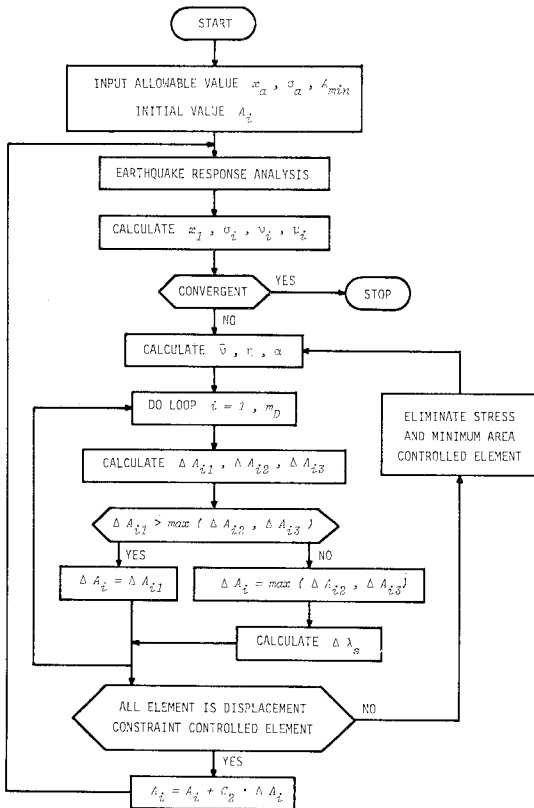


図-1 動的最適性規準を用いた簡易最適耐震設計法のフローチャート

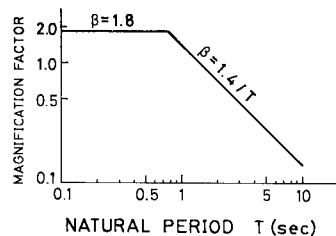


図-2 応答スペクトル曲線

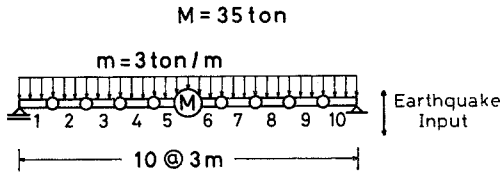


図-3 計算例に用いた単純ばり

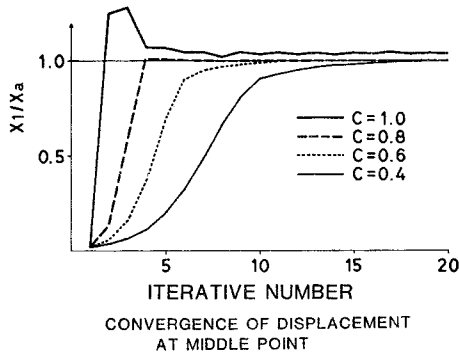


図-4 中点変位の収束状況

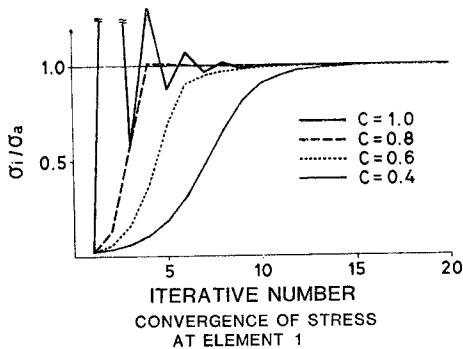


図-5 左端要素応力の収束状況

制約条件下で C を変化させて最適化を行った結果である。図-4 は中点変位の収束状況を示し、図-5 は左端要素応力の収束状況を示す。 $C=1.0$ の場合、変位も応力も許容値のまわりで大きく振動し、変位は許容値に収束しない。この結果から C が大きすぎると考えられる。 $C=0.4$ では、繰り返し回数 20 回を数えても、変位、応力とも許容値の 0.1% 以内には収束せず、 C が小さすぎると考えられる。 $C=0.8$ の場合、変位は 8 回、応力は 6 回の繰り返しで収束しているが、変位、応力とも 4 回目で許容値を越えた後収束しており、安定な収束性の条件にやや欠けるものと思われる。 $C=0.6$ の場合、変位、応力はともに 15 回の繰り返しでなめらかに収束するが、やや収束性が悪いと考えられる。以上の結果から比較的すみやかにかつなめらかに収束させるには、 $C=C_1=C_2=0.7$ が適当と考えられ、本研究の以下の計算においてはこの $C=0.7$ を用いる。

表-1 に $C=0.7$ を用いて最適化を行った例を示す。計算例の構造物は対称であるためその応答も対称になるので、表-1 には左半分の要素 1~5 の結果を示す。表-1 の最上段は初期値であり、全ケース、全要素とも初期値として $A_i=1.0 \text{ m}^2$ を与える。そのとき ν_i は 0.531 から 30.87 にばらついているし、中点変位 x_1 や各要素応力 σ_i はいずれも非常に小さい値をとっている。

ケース 1 は $x_a=0.035 \text{ m}$, $\sigma_a=23800 \text{ t/m}^2$, $A_{\min}=0.001 \text{ m}^2$ の制約下で最適化を行った例である。表中、数字の右肩の * 印は応答が許容値になっていることを示す。12 回の繰り返しで中点変位 x_1 は許容値である 0.035 m に収束し、要素 1, 2 は許容応力に収束している。要素 3, 4, 5 の ν_i はほとんど等しい。要素 1, 2 の ν_1, ν_2 は他の要素の ν_i と等しくはないが、これは要素 1, 2 が応力制約支配要素になっており、これ以上断面を減らせば応力制約を破ってしまうため他の ν_i と等しくさせる

表-1 単純ばりの最適設計結果

ケース	x_a (m)	σ_a (t/m ²)	A_{\min} (m ²)	要素番号					収束回数	W (t)	x_1 (m)	$\bar{\nu}$	η	
				1	2	3	4	5						
初期値	—	—	—	A_i	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	—	235.50	0.739×10^{-3}	23.11	0.6047
				σ_i	525	953	1280	1502	1616					
				ν_i	0.531	5.381	13.63	22.91	30.87					
1	0.035	23800	0.001	A_i	0.0429	0.0648	0.0825	0.0958	0.1054	12	18.40	0.0350*	4.131	0.0033
				σ_i	23790*	23792*	22790	22015	21281					
				ν_i	2.212	3.902	4.149	4.133	4.114					
2	0.025	23800	0.001	A_i	0.0457	0.0819	0.1058	0.1228	0.1354	8	23.14	0.0250*	4.730	0.0077
				σ_i	22729	17606	16508	15944	15346					
				ν_i	4.696	4.727	4.759	4.748	4.682					
3	0.050	23800	0.001	A_i	0.0425	0.0642	0.0794	0.0902	0.0971	8	17.59	0.0369	3.703	0.2614
				σ_i	23782*	23783*	23785*	23782*	23780*					
				ν_i	1.803	3.161	3.718	4.082	4.504					
4	0.035	23800	0.06	A_i	0.0600*	0.0648	0.0811	0.0943	0.1039	10	19.03	0.0349*	4.395	0.0035
				σ_i	14381	23789*	23357	22526	21751					
				ν_i	0.671	3.876	4.397	4.381	4.407					

ことはできないからである。そのため $\bar{\nu}, \eta$ は要素 3, 4, 5 から得られ, $\eta=0.0033$ で収束条件を満たしている。このように変位, 応力, 最小断面積制約をもつ最適化問題であっても, わずか 12 回の繰り返しで最適解が得られることは, 本設計法が非常に有効な方法であることを示している。

ケース 2 は変位制約をより厳しく $x_a=0.025\text{ m}$ にとった例である。このときわずか 8 回の繰り返しで全要素の ν_i が等しくなり, 変位 x_i も許容変位に収束している。また η も 0.0077 となり収束条件を満たしている。

ケース 3 はケース 2 と逆に変位制約を緩めて $x_a=0.050\text{ m}$ とした例である。このときも 8 回の繰り返しで全応力設計が得られている。この最適解では全要素とも応力制約支配要素となるため ν_i は等しくならない。このように本設計法は有効な制約条件が単一の場合でもなら変更を加えることなく適用できる。

ケース 4 は最小断面積制約 $A_{\min}=0.06\text{ m}^2$ で他はケース 1 と同じ制約の場合である。繰り返し回数 10 回で要素 1 の断面積 A_i は許容値 0.06 m^2 となり, 要素 2 は応力制約支配要素に, 他の要素は変位制約支配要素となり, 変位・応力ともに許容値に収束している。このように本研究で提案した設計法を用いることによって, わずかな繰り返し回数で, 変位, 応力, 最小断面積制約下での最適耐震設計を簡単に行うことができる。

表-1 の初期値は許容領域内に与えたが, 許容領域外に初期値を与えた例を表-2 に示す。上段が初期値であり下段が最適解である。制約として表-1 のケース 4 と同じく, $x_a=0.035\text{ m}, \sigma_a=23\,800\text{ t/m}^2, A_{\min}=0.06\text{ m}^2$ を用いている。初期値として全要素とも $A_i=0.0001\text{ m}^2$ を与えた。このとき $x_i=7.283\text{ m}$ で, すべての σ_i は σ_a より大きい値をとり, 明らかに非許容領域にある。この場合でも表-1 のケース 4 と同じく 10 回の繰り返し

して同じ最適解に収束している。この例でもわかるように本設計法は, 初期値が許容領域にあると否とにかかわらずすみやかに収束することがわかる。

最適解を検証するために, 本設計法による結果と式 (1)~式 (4) を SUMT を用いて最適化した結果とを比較したものを表-3 に示す。両者とも制約条件として, $x_a=0.035\text{ m}, \sigma_a=23\,800\text{ t/m}^2, A_{\min}=0.001\text{ m}^2$ を用い, 初期値は全要素とも $A_i=1.0\text{ m}^2$ を与えている。SUMT での最適化にあたっては対称性を考慮して, 5 変数問題として取り扱っている。両者の最適解を比べてみると, 断面積はほんの少し異なっている要素もあるが, 目的関数である重量はほとんど等しい。よって両者の最適解はほぼ等しいといえる。本研究で開発した設計法で最適解を得るまでに要した計算時間は SUMT の約 1/60 であり, 本設計法の収束性のよいことは明らかである。

他のより多変数構造物の最適化の一例として, 図-6 に示すラーメン構造物に水平方向から 200 ガルの入力考えた場合の最適解を表-4 に示す。この計算では初期値 $A_i=1.0\text{ m}^2$, 制約条件として, 頂点の許容変位 $x_a=$

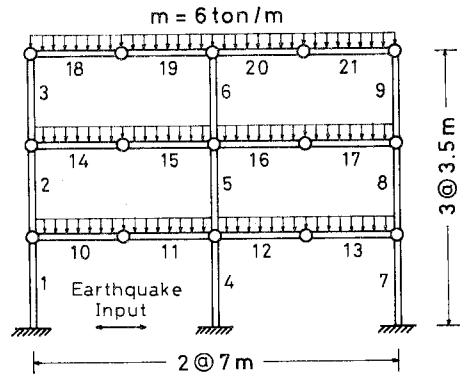


図-6 計算例に用いた 2 スパン 3 層ラーメン

表-2 初期値を非許容領域に与えた場合の最適設計結果

	要素番号	要素番号					収束回数	W (t)	x_i (m)	$\bar{\nu}$	η
		1	2	3	4	5					
初期値	A_i	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001					
	σ_i	0.160×10^9	0.295×10^9	0.405×10^9	0.490×10^9	0.550×10^9	—	0.024	7.283	5.303	0.873
	ν_i	-0.0389	0.280	6.900	0.310	-0.522					
最適解	A_i	0.0600*	0.0648	0.0813	0.0945	0.1039					
	σ_i	14386	23786*	23280	22461	21749	10	19.05	0.0350*	4.144	0.0060
	ν_i	0.674	3.890	4.377	4.369	4.427					

表-3 SUMT による解との比較

	要素番号	要素番号					W (t)	x_i (m)	構造解析の回数	CPU time (s)
		1	2	3	4	5				
本設計法による解	A_i	0.0429	0.0648	0.0825	0.0958	0.1054				
	σ_i	23790*	23792*	22790	22015	21281	18.40	0.0350*	10	3.9
SUMTによる解	A_i	0.0429	0.0650	0.0806	0.0935	0.1081				
	σ_i	23739*	23603	23551	22782	20498	18.38	0.0349*	865	236.2

表-4 2 スパン 3 層ラーメンの最適設計結果

要素 番号	初期値			最適解		
	W (t)	x_1 (m)	η	W (t)	x_1 (m)	η
	577.0	8.35×10^{-6}	0.943	16.26	0.030 0*	0.072 7
	A_i (m^2)	σ_i (t/m^2)	ν_i	A_i (m^2)	σ_i (t/m^2)	ν_i
1	1.0	555	724.8	0.031 8	12 459	15.99
2	1.0	361	217.3	0.023 1	12 777	16.72
3	1.0	202	-54.8	0.016 5	16 395	16.30
4	1.0	803	310.6	0.045 1	12 457	20.86
5	1.0	330	137.7	0.034 0	11 622	18.84
6	1.0	175	-32.4	0.025 3	10 956	18.78
7	1.0	555	724.6	0.032 3	12 432	16.14
8	1.0	361	217.2	0.023 1	12 775	16.71
9	1.0	202	-54.8	0.016 5	16 401	16.31
10	1.0	207	145.8	0.030 1	11 631	18.20
11	1.0	162	108.9	0.028 9	12 080	18.44
12	1.0	162	108.9	0.028 9	12 030	18.45
13	1.0	207	145.8	0.030 2	11 678	18.36
14	1.0	188	11.5	0.026 3	14 372	17.49
15	1.0	145	-12.5	0.024 7	15 330	19.02
16	1.0	145	-12.5	0.024 7	15 330	19.01
17	1.0	188	11.5	0.026 3	14 374	17.49
18	1.0	146	-208.7	0.012 7	23 778*	-53.91
19	1.0	128	-206.3	0.012 9	23 764*	-52.97
20	1.0	128	-206.3	0.012 9	23 761*	-52.99
21	1.0	146	-208.7	0.012 7	23 781*	-53.92

0.03 m, $\sigma_a=23\ 800$ t/m², $A_{\min}=0.001$ m² を用いている。この例は設計変数が 21 ある例であるが、14 回の繰り返し計算で最上層のはり要素は応力制約で、他は変位制約で決まっている。数理計画手法を用いた最適化においては設計変数が増えると、最適化における繰り返し回数が急激に増加するが、本設計法は設計変数が多くなっても繰り返し回数はほとんど増えず、多変数問題に特に有効であることがわかる。

5. 結 論

本研究は動的最適性規準を用いることにより、変位、応力、最小断面積制約下での一般的な最適耐震設計を、少数回の繰り返し計算で得ることができる簡易最適耐震設計法を開発し、その設計法の有効性、収束性、汎用性に関し考察を加えたものである。本研究の結果は次のようにまとめることができる。

(1) 本研究で開発した設計法は、数理計画手法を用いずに変位、応力、最小断面積制約を考慮した最適耐震設計を、簡単に行うことができる。

(2) 本設計法の収束は非常に早く、15 回程度の繰り返しで最適解を得ることができる。そのため最適化に要する計算時間は非常に少なく、5 変数問題を例にとれば SUMT の計算時間の 1/60 程度であった。

(3) 本設計法は、設計変数の増加に伴う反復回数の増加が少ないため、設計変数の多い構造物の最適設計に

は特に有効である。

(4) 本設計法のアルゴリズムは簡単であり、プログラミングが容易である。

(5) 本設計法では、初期値は許容領域にあると否とにかかわらず収束するため、初期値を自由に選ぶことができる。

(6) 本設計法は、有効な制約条件が単一の場合であっても、なら問題なく最適解に収束する。

以上のように、本研究で開発を試みた動的最適性規準を用いた簡易最適耐震設計法は、非常に有用性の高いものと考えられる。今後本設計法を実際の大規模構造物の最適耐震設計に適用していくつもりである。

本研究で提案した手法は、最適化で用いられる包絡法の一つと考えられ、本手法により得られた解の厳密な最適性に関しては不明確な点もあり、この点に関しては今後とも研究を進めていく予定である。

本論文の内容について、鹿児島大学工学部の河野健二助教授、京都大学工学部の古田均助手から多くの貴重な助言をいただいた。本研究の一部は文部省科学研究費の補助を受けて行ったものであり、計算は京都大学大型計算機センターの M 200 により行ったことを付記し、謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Gellatly, R.A. and L. Berke : Optimality-criterion-based Algorithms, Chapter in Optimum Structural Design, Theory and Applications, edited by R.H. Gallagher and O.C. Zienkiewicz, John Wiley and Sons, 1973.
- 2) Gellatly, R.A. and D.M. Dupree : Examples of Computer-aided Optimal Design of Structures, Introductory Report of 10th Congress of IABSE, pp. 77~105, 1975.
- 3) Venkayya, V.B. and N.S. Khot : Design of Optimum Structures to Impulse Type Loading, AIAA Journal, Vol. 13, No. 8, pp. 989~994, August, 1975.
- 4) Venkayya, V.B. and F.Y. Cheng : Resizing of Frames Subjected to Ground Motion, Proceedings of the International Symposium on Earthquake Structural Engineering, pp. 597~612, August, 1976.
- 5) McConnell, R.D. : Least Weight Structures for Threshold Frequencies in a Seismic Environment, Computers & Structures, Vol. 7, pp. 157~160, 1977.
- 6) Levy, R. and K. Chai : Implementation of Natural Frequency Analysis and Optimality Criterion Design, Computers & Structures, Vol. 10, pp. 277~282, 1979.
- 7) 山田善一・古川浩平・横田健一 : 動的荷重下における変位を制約とする最適性規準法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 324 号, pp. 51~60, 1982 年 8 月.
- 8) 日本道路協会 : 道路橋示方書・同解説 V 耐震設計編, p. 39, 昭和 55 年 5 月.
- 9) 吉村洋司 : 最適性規準を用いた耐震設計法に関する研究, 京都大学修士論文, 昭和 57 年 2 月.
- 10) 田中 尚・中村雄二 : 建築構造物の自動設計と最適設計, コンピューターによる構造工学講座 II-7-B, 培風館, pp. 123~124, 昭和 48 年.

(1982.5.20・受付)