

フィルダムの実用的 3 次元地震応答解析手法の定式化

FORMULATION OF A PRACTICAL METHOD FOR THREE DIMENSIONAL
EARTHQUAKE RESPONSE ANALYSIS OF EMBANKMENT DAMS

大町 達夫*・時松 孝次**

By Tatsuo OHMACHI and Kohji TOKIMATSU

1. はじめに

フィルダムはその特質から基礎のあまり良好でない地点に建設されることが多く、ダムへの入力地震動は基礎各部で振幅や位相を異にする場合が多いものと考えられる¹⁾。またダム建設地点は河川の狭隘な場所に選定されることが多いため、兩岸地山の拘束効果によりダムには 3 次元動的振動モードが発生し 2 次元動的考察からは想定し得ない振動状態も起こり得る²⁾。今後のダム建設は従来にもまして不利な地形・地質上の問題点に多く遭遇するものと予想されるが、ダムの耐震性に関しては現実のダムの地震時の挙動を正しく把握しそれを設計へ適切に反映させる努力が問題解決への道を与えるものであり、そのためにはダムの 3 次元地震応答解析手法の実用性を高めることが不可欠となる。

このような考えから、著者らはフィルダムの実用的な 3 次元動的解析手法を開発してきた^{3)~5)}。その手法は、要するにダムを一種の立体的な変断面ばりともみなして解析するものでダム全体の動的挙動を簡便に解析するのに適している。前論文⁶⁾ではこの手法を用いて荷重条件が最も単純であるダムの起振実験に対しシミュレーション解析を行い、実ダムにおける実測結果と比較して手法の妥当性と有用性を検証した。本論文は、その成果を踏まえて、本手法を 3 次元地震応答解析へ適用するための定式化を行うものである。前述の起振実験のシミュレーション解析においては上下流方向振動に焦点を絞り定式化と解析例を示したが、本論文ではダム軸方向および鉛直方向の振動についても記述する。

フィルダムの地震応答解析のためには、ダム材料の応力～ひずみ関係が非線形であることから、非線形解析手

法を確立することが必要であるとの見方もあるが、本論文ではそれを行っていない。その代わりに、ダム内のせん断剛性 G がダム頂からの深度 z の a 乗に比例する、すなわち $G \propto z^a$ の場合の剛性マトリックスや質量マトリックスあるいは刺激係数などを一般の a に対し誘導し、ひずみレベルの増大につれて a の値が変化する状況に対応できる線形解析手法としている。

2. 矩形の谷に位置するダムの固有振動

ダム軸方向に x 軸、上下流方向に y 軸、ダム頂から鉛直下方に z 軸を Fig. 1 のように定め、ダム基礎に対する各方向への相対変位成分をそれぞれ u, v および w とする。ここではダムの 3 次元振動のうち特に比較的低次の振動を対象とすることとし、それを簡略化して考える

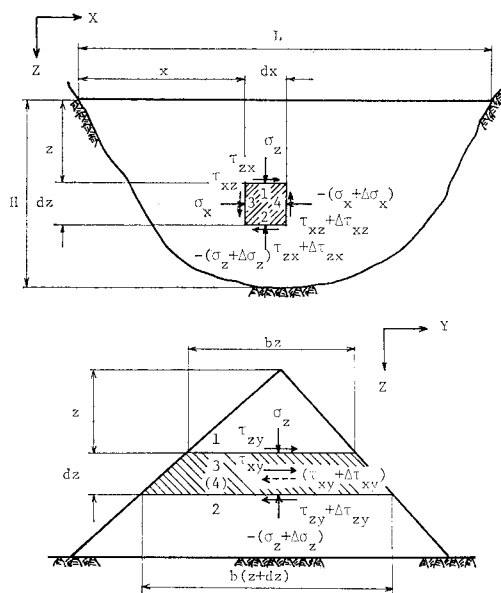


Fig. 1 Definition Sketch.

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 大学院総合理工学研究科

** 正会員 工博 東京工業大学助手 工学部

ため次の①～⑤の仮定をおく。

- ① ダムは三角形断面をもつ線形弾性体である。
- ② ダム内のヤング率 E やせん断剛性 G はダム頂からの深さの a 乗に比例して変化するが、密度 ρ とポアソン比 ν_0 は一定である。
- ③ 貯水はダム振動に影響を及ぼさない。
- ④ Fig. 1 のダム内に斜線で示す微小体の表面に作用する応力は、いずれも y 方向に一樣である。したがって、この微小体の自由振動時の運動方程式は次のように表わせる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{z} \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \dots\dots\dots (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{z} \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \dots\dots\dots (2)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{z} \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \dots\dots\dots (3)$$

- ⑤ ダム軸方向 (x 方向) の振動が卓越しているとき、 x 方向の直応力 σ_x と直ひずみ ε_x とは次のように表わせる。

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \dots\dots\dots (4 \cdot a)$$

同様に、鉛直方向の振動が卓越しているとき、 σ_z と ε_z とは次のように表わせる。

$$\sigma_z = E \varepsilon_z \dots\dots\dots (4 \cdot b)$$

また x, y, z の各方向への変位はそれぞれ独立で、一方方向への卓越振動によって発生する他方向への振動成分は無視し得るとする。この仮定のもとに運動方程式 (1) ~ (3) を変位成分で表わした次の各式

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[\frac{G}{z} \frac{\partial u}{\partial z} + E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \left[\frac{G}{z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \dots\dots (5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left[\frac{G}{z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial v}{\partial z} \right) + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{G}{z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \dots\dots\dots (6)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left[\frac{E}{z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(E \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \left[G \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right] \dots\dots\dots (7)$$

において右辺の 2 番目の [] が最初の [] に対し無視できるとすれば次のような簡略式が得られる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial u}{\partial z} \right) + E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots\dots\dots (8)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{G}{z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial v}{\partial z} \right) + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \dots\dots\dots (9)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{E}{z} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(E \frac{\partial w}{\partial z} \right) + G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots\dots\dots (10)$$

上下流方向の振動を表わす式 (9) は畑中⁷⁾が導いた粘弾性体のダムの自由振動方程式において粘性項を除外した場合の式と同一である。また残りの 2 式についてもそれぞれ他の研究者^{8), 9)}により導かれた式と基本的に同じであり (補遺 A 参照)、これらの 3 式が上記のような仮定に基づいて系統的に得られるものであることは留意されてよい。

さて、前記の仮定 ② から

$$G = G_0 z^a \dots\dots\dots (11)$$

$$\eta = E/G = 2(1 + \nu_0) \dots\dots\dots (12)$$

を導入する。各振動成分に対し変数分離形の解

$$u(x, z, t) = X_u(x) Z_u(z) e^{i\omega t} \dots\dots\dots (13)$$

$$v(x, z, t) = X_v(x) Z_v(z) e^{i\omega t} \dots\dots\dots (14)$$

$$w(x, z, t) = X_w(x) Z_w(z) e^{i\omega t} \dots\dots\dots (15)$$

を想定し、式 (8) ~ (10) にそれぞれ代入すれば次式を得る。ただし、 ω は固有円振動数、 i は虚数単位である。すなわち、式 (8) から

$$\begin{cases} X_u''(x) + \alpha^2 X_u(x) = 0 \dots\dots\dots (16) \\ Z_u''(z) + \frac{a+1}{z} Z_u'(z) \end{cases}$$

$$+ \left(\frac{\rho \omega^2}{G_0} z^{-a} - \eta \alpha^2 \right) Z_u(z) = 0 \dots\dots (17)$$

式 (9) から

$$\begin{cases} X_v''(x) + \alpha^2 X_v(x) = 0 \dots\dots\dots (18) \\ Z_v''(z) + \frac{a+1}{z} Z_v'(z) \end{cases}$$

$$+ \left(\frac{\rho \omega^2}{G_0} z^{-a} - \alpha^2 \right) Z_v(z) = 0 \dots\dots (19)$$

式 (10) から

$$\begin{cases} X_w''(x) + \alpha^2 X_w(x) = 0 \dots\dots\dots (20) \\ Z_w''(z) + \frac{a+1}{z} Z_w'(z) \end{cases}$$

$$+ \left(\frac{\rho \omega^2}{G_0 \eta} z^{-a} - \frac{\alpha^2}{\eta} \right) Z_w(z) = 0 \dots\dots (21)$$

式 (16), (18), (20) は各振動形のダム軸に沿う変化がいずれも正弦的であることを示す。各方向とも同形となるので添字を省略すれば

$$X(x) = A \sin \alpha x \dots\dots\dots (22)$$

ここで A は未定係数で、 α はダム長を L として

$$\alpha = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots \dots\dots (23)$$

である。

式 (17), (19), (21) において $a=0$ 、すなわちダム内の剛性分布が一樣な場合、各振動成分の鉛直軸に沿う形状は同一となって次式で表わせる。

$$Z(z) = c J_0(\lambda z) \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 c は通常は任意定数でよいが、ここでは以下 $Z(0)=1$ とするための定数とする。また $J_0(z)$ は第1種0次 Bessel 関数で、 λ は

$$u \text{ に対して } \lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{G_0} - \eta\alpha^2} \dots\dots(25)$$

$$v \text{ に対して } \lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{G_0} - \alpha^2} \dots\dots(26)$$

$$w \text{ に対して } \lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\eta G_0} - \frac{\alpha^2}{\eta}} \dots\dots(27)$$

である。式 (24) で与えられる振動形はダム長が無限大の場合の振動形に一致しているが、これは注目に値する。固有振動数はダム底で振幅がゼロとなる条件、すなわち $J_0(\lambda H)=0$ から定まり、この場合のせん断波速度 $v_{s0} = \sqrt{G_0/\rho}$ を用いれば

$$u \text{ に対して } \omega_{mn}H/v_{s0} = \sqrt{\mu_m^2 + \eta n^2 \pi^2 H^2 / L^2} \dots\dots(28)$$

$$v \text{ に対して } \omega_{mn}H/v_{s0} = \sqrt{\mu_m^2 + n^2 \pi^2 H^2 / L^2} \dots\dots(29)$$

$$w \text{ に対して } \omega_{mn}H/v_{s0} = \sqrt{\eta \mu_m^2 + n^2 \pi^2 H^2 / L^2} \dots\dots(30)$$

$$m, n=1, 2, 3, \dots$$

と表わせる。ただし上記の μ_m は $J_0(\mu_m)=0$ となる m 番目のゼロ点の値であり、 H はダム高である。

Fig. 2 は、式 (28)~(30) で与えられる各方向に関する無次元円振動数 $\omega_{mn}H/v_{s0}$ を、同じ条件に対する3次元有限要素解¹⁰⁾と比較したものである。この3次元有限要素解析においては、ダムは195個の四面体要素から成り、自由節点の総数は30でそれらはすべて両端から $L/3$ の鉛直平面上に配置され解析上の自由度は90である。またダム長・ダム高比 L/H が無限大の場合に対応する解として平面ひずみ有限要素解^{11),12)}も示した。これらの有限要素解はダムのポアソン比 ν_0 が0.45でのり面勾配が対称な1:1.5および1:3.0の場合について与えられており、図には3-Dとしてそれぞれ点線と破線で示し、また式(28)~(30)の解¹³⁾はQ.3-Dとして実線で示してある。図中の括弧内の2つの数字は、順に鉛直軸(z 軸)に沿う振動次数 m とダム軸(x 軸)に沿う振動次数 n をそれぞれ示している。図から $V(1,1)$, $V(1,2)$ モードに関しては3本の曲線はともによく近接し、これらの振動数がほぼダム長・ダム高比のみにより定まることが読み取れるが、詳細にみれば式(28)の解はのり面勾配の急な1:1.5のダムに対し近似度がより高いことがわかる。この傾向は $V(2,1)$, $W(1,1)$ モードに関してもいえるが、引用した有限要素解はダム長・ダム高比の増加に伴う収束がこれらのモードの場合十分でないことから明らかなように多くの解析誤

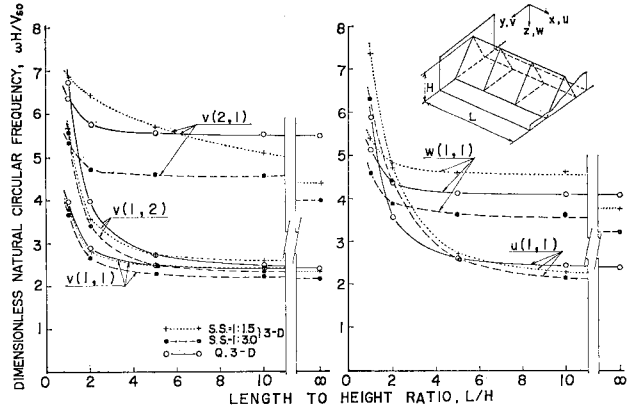


Fig. 2 Natural Circular Frequency of Homogeneous Earth Dam Models Located in Rectangular Canyon.

差を含んでいると思われるので、式 (28)~(30) の精度をこの図だけから子細に判断するのは無理である。ただ、例示したこれらの低次振動に関する限り、簡略化した運動方程式から得られる解と90の自由度を有する3次元有限要素解とはほぼ同程度のものであること、および $V(2,1)$ モードあるいはそれ以上の高次モードを3次元有限要素解析で精度よく算定するためには非常に多くの自由度を必要とすることなどは、この図からも指摘できよう。

$a \neq 0$ のとき、式 (17), (19), (21) に対し $a < 2$ の条件のもとで Frobenius 型の無限級数解が存在する¹⁴⁾。 $a=1, 2/3, 1/2, 2/5, 1/3$ など $2/a$ が整数となる場合、これらの方程式の解は次のような同一形で与えられる^{8),9)}。

$$Z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{ka} \dots\dots(31)$$

ただし

$$b_0 \neq 0, b_1 = \dots = b_{2/a-2} = 0$$

u に対し

$$b_k = -\frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{\rho\omega^2}{a^2 G_0} b_{k-2/a+1} - \frac{\eta\alpha^2}{a^2} b_{k-2/a} \right\} \dots\dots(32)$$

v に対し

$$b_k = -\frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{\rho\omega^2}{a^2 G_0} b_{k-2/a+1} - \frac{\alpha^2}{a^2} b_{k-2/a} \right\} \dots\dots(33)$$

w に対し

$$b_k = -\frac{1}{k(k+1)} \left\{ \frac{\rho\omega^2}{a^2 \eta G_0} b_{k-2/a+1} - \frac{\alpha^2}{\eta a^2} b_{k-2/a} \right\} \dots\dots(34)$$

$$k \geq 2/a$$

上式によれば、鉛直軸に沿う振動形 $Z(z)$ は、ダム高が同一でもダム長 L が短く α が大きいほど、またダム軸方向の振動次数 n が高いほど $\alpha=0$ の場合の振動形と異なってくる。ところで、 $\alpha=0$ すなわち $L \rightarrow \infty$ の場

合，上式の級数和は次式に収束する。

$$Z(z) = cz^{-\frac{a}{2}} J_{\frac{a}{2-a}}(\beta z^{\frac{2-a}{2}}) \dots (35)$$

ここで β は

$$\left. \begin{aligned} u, v \text{ に対し } \beta &= \sqrt{\frac{\rho}{G_0} \frac{2}{2-a} \omega} \\ w \text{ に対し } \beta &= \sqrt{\frac{\rho}{\eta G_0} \frac{2}{2-a} \omega} \end{aligned} \right\} \dots (36)$$

である。

式 (35) は式 (17), (19), (21) に $\alpha=0$ を代入することによっても直接得ることができ¹⁵⁾，このときには $2/a$ が整数であることを必要としない。また，ダム底で振幅がゼロすなわち $Z(H)=0$ の条件を用いれば，上式は次のような単純な表現に変換し得る。

$$Z(z) \equiv z(\psi) = c\psi^{-\nu} J_\nu(\psi) \dots (37)$$

ただし

$$\psi = \mu_m \left(\frac{z}{H} \right)^{\frac{2-a}{2}} \dots (38)$$

$$\mu_m = \beta H^{\frac{2-a}{2}} \dots (39)$$

$$\nu = \frac{a}{2-a} \dots (40)$$

ここで μ_m は $J_\nu(\mu_m)=0$ となる m 番目のゼロ点の値である。 $a=0, 1/3, 1/2, 2/3$ および 1 の各場合の最低次の 2 つ，すなわち $m=1$ および 2 に対する振動形 $Z(z)$ を Fig. 3 に示す。これらの振動形のうち $0 \leq a \leq 2/3$ 程度の a の値に対応する振動形が実在のダムとの適合が良好であると報告されている^{8), 9), 21)}。なお， a が上記の値をとる場合などの c および μ_m の値を補遺 B に示した。

前述のように， z 軸に沿う振動形 $Z(z)$ は， $a=0$ の場合には L/H および n の値によらず一定であるが， $a \neq 0$ の場合にはこれらに依存しダム長が無限の場合の振動形とは異なる。 $a=1/2$ の場合について式 (33) に基づきこの例を示したのが Fig. 4 であり，実線と破線

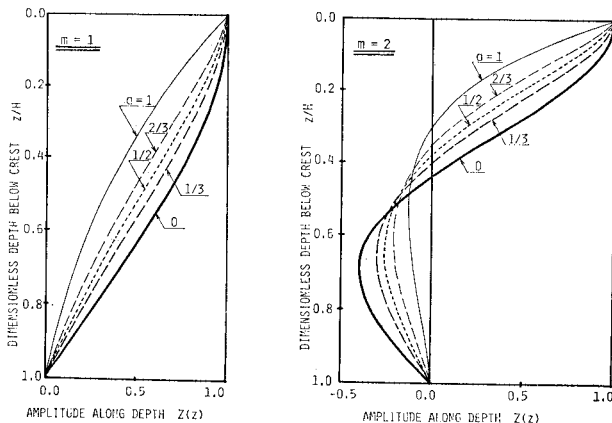


Fig. 3 Lowest Two Mode Shapes along Depth of Dam with Infinite Length.

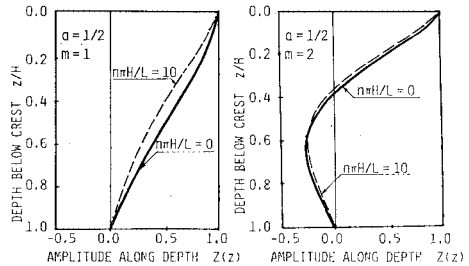


Fig. 4 Comparison of Mode Shapes along Depth of Dam with Infinite Length and Those of Dam with Finite Length.

との差にそのことが読み取れる。ところでわが国のフィルダムの統計によれば，高さが 50 m 以上のダムでは， $L/H \approx 3$ が最も多く大部分が $2 \leq L/H \leq 6$ の範囲にある。したがって， $1 \leq n \leq 10$ すなわちダム頂に沿う振動次数が 10 次以下であればこの場合の $Z(z)$ は Fig. 4 の実線と破線との間におさまり，その変動範囲が図示のように狭いことから実用にはいずれも実線の振動形で近似できることがわかる。換言すれば，実用上，式 (37) は式 (31) の近似式として十分使用可能であるといえる。また，この近似を用いれば後の解析が非常に円滑に遂行し得ることが推察される。これらのことから，矩形谷内のフィルダムの自由振動解として式 (41・a) の代わりにその近似式 (41・b) を採用し次章以下の展開を行うこととする。

$$u, v, w = \sum_k \sum_n b_k z^{ka} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{i\omega t} \dots (41 \cdot a)$$

$$\approx \sum_m \sum_n c\psi^{-\nu} J_\nu(\psi) \sin \frac{n\pi x}{L} e^{i\omega t} \dots (41 \cdot b)$$

ダムの固有振動数は，通常，ダム底で振幅がゼロとなる境界条件から導かれる振動数方程式を解くことにより得られるが，上記の近似では無限長ダムの振動形を準用しているのでこの方法は使えない。この近似を用いる場合の固有振動数は，後述のマトリックスの固有値問題を解くことによりむしろ一層容易に算定できる。

実在のフィルダムにおける起振実験，常時微動観測あるいは地震動観測などの結果を解析するに際し，以上に示した矩形谷内のダムの振動解析手法が非常に有用であるとの知見が幾つか示されている^{8), 9), 16)~18)}。これらによれば，ダム内の剛性分布あるいは弾性波速度分布が適切であれば，この手法は実ダムの数多くの固有振動を同定することが可能であり，3次元のフィルダムの振動評価手法として高い実用性を有している。著者らの考えではこの手法を適用する際の最大の難点は，不規則な形状の谷と等価な矩形谷をいかに定義するかが困難であること，また兩岸付近のダムの振動

形状が適切に評価できないことなどにある。これらの難点を克服するために、任意の谷形状に適用できる手法の確立が必要となる。

3. 任意形状の谷に位置するダムの固有振動

前述のように、谷形状が矩形の場合にはダムの自由振動は、 u, v, w のいずれについても式 (41・b) で近似できる。同式において $\sin(n\pi x/L)$ は x 軸に沿う振動形を、また $\phi^{-1}J_n(\phi)$ は z 軸に沿う振動形をそれぞれ表わし、後者は無限長くさび形ばりの振動形にほかならない。そこで、任意形状の谷に位置する非均質なダムの固有振動形についても、 x, y, z の各方向とも次式で近似することを考える。

$$R(x, z) = R(x, 0) f(x, z) \dots\dots\dots(42)$$

ただし $R(x, z)$ は u, v, w のいずれかの振動形を代表的に表わし、 $R(x, 0)$ はそのダム頂変位を表わすものとする。また $f(x, z)$ を式 (37) と同様に

$$f(x, z) \equiv f(\xi) = c\xi^{-\nu} J_\nu(\xi) \dots\dots\dots(43)$$

で与えるが、ダム軸横断面の高さは x 方向に変化するのでこれを H_x で表わし

$$\xi = \mu_m \left(\frac{z}{H_x} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \dots\dots\dots(44)$$

とおく。以後、 z 方向に m 次の振動モードについて有限要素技法を用いて定式化を進める。

ダムを Fig. 5 のように yz 平面で有限個に分割して得られる立体要素は三角錐あるいは三角錐台をなし、各断面のダム頂にのみ可動節点があるものとする。隣接する節点 i, j 間のダム頂変位 $r(x, 0)$ を次式で表わす。

$$r(x, 0) = \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{r} \dots\dots\dots(45)$$

ただし

$$\mathbf{S} = [1 \quad x] \dots\dots\dots(46)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \dots\dots\dots(47)$$

$$\mathbf{r} = [r_i \quad r_j]^T \dots\dots\dots(48)$$

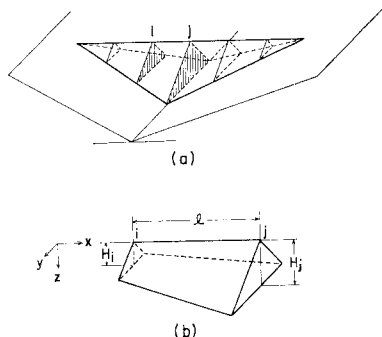


Fig. 5 Simplified Finite Element Modeling of Embankment Dam.

ここで x は節点 i からのダム頂に沿う距離、 l は要素のダム頂長、 \mathbf{r} は両節点の変位ベクトル、 T は転置を表わす。

要素両端のダム断面高 H_i および H_j を用いれば H_x は

$$H_x = H_i + (H_j - H_i) \frac{x}{l} \dots\dots\dots(49)$$

となる。式 (42) で与えられる変位に伴う要素内のひずみベクトル $\{\epsilon\}$ と応力ベクトル $\{\sigma\}$ はそれぞれ次のようになる。

$$\{\epsilon\} = \left[\frac{\partial r}{\partial x} \quad \frac{\partial r}{\partial z} \right]^T = \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{r} \dots\dots\dots(50)$$

$$\{\sigma\} = \mathbf{D} \{\epsilon\} \dots\dots\dots(51)$$

ただし

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} f_x(x, z) & f(x, z) + x f_x(x, z) \\ f_z(x, z) & x f_z(x, z) \end{bmatrix} \dots\dots(52)$$

$$f_x(x, z) = \partial f(x, z) / \partial x,$$

$$f_z(x, z) = \partial f(x, z) / \partial z$$

であり、弾性マトリックス \mathbf{D} は

$$u \text{ に対して } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \dots\dots\dots(53)$$

$$v \text{ に対して } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \dots\dots\dots(54)$$

$$w \text{ に対して } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \dots\dots\dots(55)$$

である。

仮想仕事の原理をこの有限要素に適用すれば、要素剛性マトリックス \mathbf{k} および要素質量マトリックス \mathbf{m} として次式を得る。

$$\mathbf{k} = \int_v \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{C} d(\text{vol}) \dots\dots\dots(56)$$

$$\mathbf{m} = \int_v \rho f^2(x, z) \mathbf{C}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{C} d(\text{vol}) \dots\dots\dots(57)$$

ただし、上式の積分は一つの要素に関する体積積分を表わす。

\mathbf{k} と \mathbf{m} の具体形を次のようにして誘導する。まず式 (11), (12) および式 (52)~(55) を式 (56) に代入し、 \mathbf{k} を4つの部分マトリックスに分解する。

$$\mathbf{k} = \tau(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \delta \mathbf{k}_4 \dots\dots\dots(58)$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \int_v G f^2(x, z) \mathbf{C}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{C} d(\text{vol}) \\ &= G_0 b \int_0^l \mathbf{C}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{C} k_1(x) dx \dots\dots\dots(59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2 &= \int_v G f(x, z) f_x(x, z) \mathbf{C}^T (\mathbf{N}^T \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{N}) \cdot \\ &\quad \mathbf{C} d(\text{vol}) \\ &= G_0 b \int_0^l \mathbf{C}^T (\mathbf{N}^T \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{N}) \mathbf{C} k_2(x) dx \dots\dots(60) \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_3 = \int_v G f_x^2(x, z) \mathbf{C}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{C} d(\text{vol})$$

$$= G_0 b \int_0^l \mathbf{C}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{C} k_3(x) dx \quad \dots\dots\dots (61)$$

$$k_1 = \int_v G f_z^2(x, z) \mathbf{C}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{C} d(\text{vol}) \\ = G_0 b \int_0^l \mathbf{C}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{C} k_4(x) dx \quad \dots\dots\dots (62)$$

上式で b はダム数幅 B とダム高 H の比 B/H に等しい (Fig. 1 参照). また,

$$N = [0 \ 1] \dots\dots\dots (63)$$

$$k_1(x) = \int_0^{H_x} z^{a+1} f^2(x, z) dz \quad \dots\dots\dots (64)$$

$$k_2(x) = \int_0^{H_x} z^{a+1} f(x, z) f_x(x, z) dz \quad \dots\dots (65)$$

$$k_3(x) = \int_0^{H_x} z^{a+1} f_x^2(x, z) dz \quad \dots\dots\dots (66)$$

$$k_4(x) = \int_0^{H_x} z^{a+1} f_z^2(x, z) dz \quad \dots\dots\dots (67)$$

である. 式 (58) 中の 2 つの定数 (r, δ) は $r(x, z)$ が表わす変位成分に対応させ, 次のように定める.

$$u \text{ に対して } (r, \delta) = (\eta, 1) \quad \dots\dots\dots (68)$$

$$v \text{ に対して } (r, \delta) = (1, 1) \quad \dots\dots\dots (69)$$

$$w \text{ に対して } (r, \delta) = (1, \eta) \quad \dots\dots\dots (70)$$

式 (43), (44) および式 (49) から次式を得る.

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{\mu_m}{(\nu+1)H_x} \left(\frac{\xi}{\mu_m} \right)^{-\nu} \quad \dots\dots\dots (71)$$

$$f_x(x, z) = \frac{c(H_j - H_i)}{(\nu+1)H_x l} \xi^{-\nu+1} J_{\nu+1}(\xi) \quad \dots\dots (72)$$

$$f_z(x, z) = \frac{c\mu_m^{\nu+1}}{(\nu+1)H_x} \xi^{-2\nu} J_{\nu+1}(\xi) \quad \dots\dots\dots (73)$$

これらを用いれば式 (64)~(67) の定積分は

$$k_1(x) = \frac{c^2 H_x^{a+2}}{\mu_m^{2(\nu+1)}} \int_0^{\mu_m} \xi^{2\nu+1} J_{\nu+1}^2(\xi) d\xi \\ = \frac{2c^2 J_{\nu+1}^2(\mu_m)}{(a+2)\mu_m^{2\nu}} H_x^{a+2} \quad \dots\dots\dots (74)$$

$$k_2(x) = \frac{c^2 (H_j - H_i) H_x^{a+1}}{\mu_m^{2(2\nu+1)} l} \int_0^{\mu_m} \xi^{2\nu+2} J_{\nu+1}(\xi) J_{\nu+1}(\xi) d\xi \\ = \frac{c^2 (H_j - H_i) J_{\nu+1}^2(\mu_m)}{2 l \mu_m^{2\nu}} H_x^{a+1} \quad \dots\dots\dots (75)$$

$$k_3(x) = \frac{c^2 (H_j - H_i)^2 H_x^a}{(\nu+1) l^2 \mu_m^{2(2\nu+1)}} \int_0^{\mu_m} \xi^{2\nu+3} J_{\nu+1}^2(\xi) d\xi \\ = \frac{c^2 (H_j - H_i)^2 J_{\nu+1}^2(\mu_m)}{2(\nu+1)(2\nu+3) l^2 \mu_m^{2\nu}} \{ \mu_m^2 + 4(\nu+1)^2 \} H_x^a \\ \dots\dots\dots (76)$$

$$k_4(x) = \frac{c^2 H_x^a}{(\nu+1) \mu_m^{2\nu}} \int_0^{\mu_m} \xi J_{\nu+1}^2(\xi) d\xi \\ = \frac{c^2 J_{\nu+1}^2(\mu_m)}{2(\nu+1) \mu_m^{2\nu-2}} H_x^a \quad \dots\dots\dots (77)$$

となるので, これらを式 (59)~(62) に代入すれば結局次のようになる.

$$k_1 = \frac{G_0 b c^2 J_{\nu+1}^2(\mu_m)}{(a+2)(a+3) l \mu_m^{2\nu}} \begin{bmatrix} k_0^* & -k_0^* \\ -k_0^* & k_0^* \end{bmatrix} \dots (78)$$

ここで k_0^* は

$$k_0^* = \frac{H_j^{a+3} - H_i^{a+3}}{H_j - H_i} \quad \dots\dots\dots (79)$$

であり, 分母の因子 $(H_j - H_i)$ は分子にも含まれているので $H_j = H_i$ に対しても k_0^* が不定となることはない.

$$k_2 = \frac{G_0 b c^2 J_{\nu+1}^2(\mu_m)}{(a+2) l \mu_m^{2\nu}} \\ \cdot \begin{bmatrix} H_i^{a+2} - \frac{k_0^*}{a+3} & -\frac{(H_i^{a+2} + H_j^{a+2})}{2} + \frac{k_0^*}{a+3} \\ \text{sym.} & H_j^{a+2} - \frac{k_0^*}{a+3} \end{bmatrix} \\ \dots\dots\dots (80)$$

$$k_3 = \frac{G_0 b c^2 \{ \mu_m^2 + 4(\nu+1)^2 \} J_{\nu+1}^2(\mu_m) (H_j - H_i)^2}{2(a+1)(a+2)(a+3)(\nu+1)(2\nu+3) l \mu_m^{2\nu}} \\ \cdot \frac{k^*}{(H_j - H_i)^3} \quad \dots\dots\dots (81)$$

$$k_4 = \frac{G_0 b c^2 J_{\nu+1}^2(\mu_m) l}{2(a+1)(a+2)(a+3)(\nu+1) \mu_m^{2\nu-2}} \\ \cdot \frac{k^*}{(H_j - H_i)^3} \quad \dots\dots\dots (82)$$

ただし

$$k^* = \begin{bmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (83)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{11}^* &= -(a+1)(a+2)H_i^{a+3} \\ &\quad + 2(a+1)(a+3)H_i^{a+2}H_j \\ &\quad - (a+2)(a+3)H_i^{a+1}H_j^2 + 2H_j^{a+3} \\ k_{12}^* &= k_{21}^* = -(a+1)H_i^{a+3} + (a+3)H_i^{a+2}H_j \\ &\quad - (a+3)H_iH_j^{a+2} + (a+1)H_j^{a+3} \\ k_{22}^* &= -2H_i^{a+3} + (a+2)(a+3)H_i^2H_j^{a+1} \\ &\quad - 2(a+1)(a+3)H_iH_j^{a+2} \\ &\quad + (a+1)(a+2)H_j^{a+3} \\ &\quad \dots\dots\dots (84) \end{aligned} \right\}$$

一方, m に関しては

$$M(x) = \int_0^{H_x} z f^2(x, z) dz \\ = \frac{(\nu+1)c^2 H_x^2}{\mu_m^{2\nu+2}} \int_0^{\mu_m} \xi J_{\nu+1}^2(\xi) d\xi \\ = \frac{c^2(\nu+1) J_{\nu+1}^2(\mu_m)}{2 \mu_m^{2\nu}} H_x^2 \quad \dots\dots\dots (85)$$

となることを用いれば式 (57) の積分は次のようになる.

$$m = \rho b \int_0^l \mathbf{C}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{C} M(x) dx \\ = \frac{\rho b c^2 (\nu+1) J_{\nu+1}^2(\mu_m)}{2 \mu_m^{2\nu}} \int_0^l \mathbf{C}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{C} H_x^2 dx \\ = \frac{\rho b c^2 (\nu+1) l J_{\nu+1}^2(\mu_m)}{120 \mu_m^2} \\ \cdot \begin{bmatrix} 12 H_i^2 + 6 H_i H_j + 2 H_j^2 & 3 H_i^2 + 4 H_i H_j + 3 H_j^2 \\ \text{sym.} & 2 H_i^2 + 6 H_i H_j + 12 H_j^2 \end{bmatrix} \\ \dots\dots\dots (86)$$

以上に求めた $k_1 \sim k_4$ および m において $a=0, 2/3, 1$ を代入すればすでに示したこれらの各マトリックス⁶⁾と一致することが容易に確かめられる.

要素剛性マトリックス k と要素質量マトリックス m

とを全要素について適宜重畳すれば、ダム全体系の剛性マトリックス K_m と質量マトリックス M_m とが構成できる。有限要素化したダムの可動節点数すなわち自由度数を s とし、節点番号がダムの一端から他端へ順に付されているとき、 K_m および M_m は $s \times s$ の3重対角対称マトリックスになる。これらを用いてダム頂に沿う固有振動形ベクトル \tilde{R}_{mn} とそれに対応する固有円振動数 ω_{mn} が次の固有値問題を解くことにより与えられる。

$$[K_m - \omega_{mn}^2 M_m] \tilde{R}_{mn} = 0 \quad \dots\dots\dots(87)$$

単一の m に対し算定すべき ω_{mn} および \tilde{R}_{mn} の個数は、手法自体の近似精度が低次振動ほど良好であることから s' (ただし $s' \leq s$) である。

4. 地震応答解析手法

ダムを構成する立体有限要素の各自由節点位置におけるダム軸横断面の基礎に対する振動相対変位 u, v あるいは w は、いまこれを代表的に $R(x, z, t)$ と記すこととして、式 (87) の \tilde{R}_{mn} とその振動形の時間的変動 $Q_{mn}(t)$ を用いれば次のように表わせる。

$$R(x, z, t) = \sum_m R_m(\xi, t) f(\xi) \\ = \sum_m \sum_n \tilde{R}_{mn} f(\xi) Q_{mn}(t) \quad \dots\dots\dots(88)$$

ダムの減衰マトリックスを C_m で表わせれば、地震動を受けるダムの運動方程式は次式となる。

$$\sum_m M_m \{ \ddot{R}_m(\xi, t) + \dot{R}_0(t) \} + \sum_m C_m \dot{R}_m(\xi, t) \\ + \sum_m K_m R_m(\xi, t) = 0 \quad \dots\dots\dots(89)$$

ただし、 $\dot{R}_0(t)$ は各節点位置における $R_m(\xi, t)$ に対応する方向の地動加速度を代表的に表わす。式 (89) に式 (88) を代入すれば

$$\sum_m \sum_n M_m \tilde{R}_{mn} f(\xi) \ddot{Q}_{mn}(t) \\ + \sum_m \sum_n C_m \tilde{R}_{mn} f(\xi) \dot{Q}_{mn}(t) \\ + \sum_m \sum_n K_m \tilde{R}_{mn} f(\xi) Q_{mn}(t) \\ = - \sum_m M_m \dot{R}_0(t) \quad \dots\dots\dots(90)$$

となる。上式の両辺に $\xi^{\nu+1} J_\nu(\xi)$ を乗じ $[0, \mu_m]$ 間で積分を行えば、Bessel 関数には直交性

$$\int_0^1 \xi J_\nu(\lambda_1 \xi) J_\nu(\lambda_2 \xi) d\xi = 0 \quad \dots\dots\dots(91)$$

ただし $J_\nu(\lambda_1) = J_\nu(\lambda_2) = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$ がある¹⁹⁾ので、次のようになる。

$$\sum_n M_m \tilde{R}_{mn} \ddot{Q}_{mn}(t) + \sum_n C_m \tilde{R}_{mn} \dot{Q}_{mn}(t) \\ + \sum_n K_m \tilde{R}_{mn} Q_{mn}(t) = -I_m \sum_m M_m \dot{R}_0(t) \\ \dots\dots\dots(92)$$

ただし

$$I_m = \frac{\int_0^{\mu_m} \xi^{\nu+1} J_\nu(\xi) d\xi}{c \int_0^{\mu_m} \xi J_\nu^2(\xi) d\xi} = \frac{2 \mu_m^{\nu-1}}{c J_{\nu+1}(\mu_m)} \quad \dots\dots\dots(93)$$

\tilde{R}_{mn} は式 (87) から求まるもので M_m に関する直交性を有する。したがって、 s' 個の \tilde{R}_{mn} のうち任意の一つの \tilde{R}_{mn}^T を式 (92) の両辺に左から乗ずれば

$$\tilde{R}_{mn}^T M_m \tilde{R}_{mn} \ddot{Q}_{mn}(t) + \tilde{R}_{mn}^T C_m \tilde{R}_{mn} \dot{Q}_{mn}(t) \\ + \tilde{R}_{mn}^T K_m \tilde{R}_{mn} Q_{mn}(t) \\ = -I_m \tilde{R}_{mn}^T M_m \dot{R}_0(t) \quad \dots\dots\dots(94)$$

となり、 C_m を比例減衰と考えれば結局次式が得られる(補遺D参照)。

$$\ddot{Q}_{mn}(t) + 2 \omega_{mn} h_{mn} \dot{Q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t) \\ = -I_m \frac{\tilde{R}_{mn}^T M_m \dot{R}_0(t)}{\tilde{R}_{mn}^T M_m \tilde{R}_{mn}} \quad \dots\dots\dots(95)$$

ここに ω_{mn} は鉛直方向に m 次、ダム軸方向に n 次のモードの固有円振動数で h_{mn} はそれに対応する減衰定数である。また I_m の数値例を Table 1 に示す。

式 (95) は通常の1自由度系の強制振動式と同形であり、地動加速度 $\dot{R}_0(t)$ が与えられれば $Q_{mn}(t)$ は従来の方で容易に算定できる。

ダム基礎が剛体的で地動加速度の分布が一樣に $\dot{R}_0(t)$ である場合には最も単純で

$$\dot{R}_0(t) = \{1\} \dot{R}_0(t) \quad \dots\dots\dots(96)$$

と置くことにより入力加速度が表現できる。ただし $\{1\}$ は全要素が1のベクトルである。また基礎各点での地動加速度の振幅や位相が異なるような場合に対しても式 (95) は容易にその効果を評価し得る。 $Q_{mn}(t)$ が算定されればそれを式 (88) に代入し、各モードについて重畳することによりダムの地震応答量が求まる。

式 (95) の精度あるいは適用性を検討するため、矩形谷内のダム底に一樣に上下流方向の地震加速度が入力する場合について考える。この場合にはダム軸に沿う振動形 R_{mn} が $\sin(n\pi x/L)$ となり n の偶数モードは発生しないなどのことから式 (95) に対応する次式が得られる²⁰⁾。

$$\ddot{Q}_{mn}(t) + 2 \omega_{mn} h_{mn} \dot{Q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t) \\ = -\frac{4}{n\pi} I_{mn} \dot{U}_0(t) \quad n=1, 3, 5, \dots\dots\dots(97)$$

ただし右辺の $\dot{U}_0(t)$ はダムへの入力地震加速度である。また I_{mn} はダムの振動形として本論文で採用した近似式 (41・b) を使用する場合には式 (93) の I_m と一致す

Table 1
Examples of m -Mode
Participation Factor I_m

a	I_m		
	$m=1$	$m=2$	$m=3$
0	1.602	-1.065	0.851
1/3	1.752	-1.398	1.230
2/5	1.791	-1.490	1.340
1/2	1.859	-1.650	1.539
2/3	2.000	-2.000	2.000
3/4	2.089	-2.231	2.321
4/5	2.151	-2.394	2.555
1	2.483	-3.332	4.005

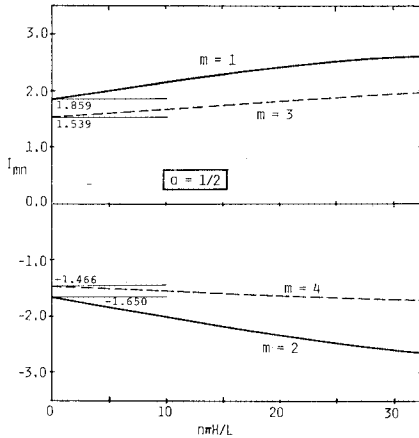


Fig. 6 Variation of Exact m -Mode Participation Coefficient I_{mn} .

るが、厳密式 (41・a) を使用する場合には $a=0$ のとき以外これと一致しない。厳密式に対応する I_{mn} を得るにはかなり面倒な数値積分を必要とするが $a=1/2$ についてこれを例示したのが Fig. 6 である。図によれば L/H が一定でもダム軸方向の振動次数 n が増すにつれて I_{mn} の絶対値は増大する。一方、近似式に対応する I_{mn} の値すなわち I_m の値は次数 n によらず一定で各曲線と図の縦軸との交点の値に等しい。これら両者の差は、現実的な L/H を想定するとたとえば 10 倍の n に対し最大 20% 程度 $|I_m|$ の方が小さい。ところで (m, n) 次の振動モードに対するいわゆる刺激係数は $(4/n\pi) I_{mn}$ であるので n が増すにつればほこれに逆比例して急激に減少することになる。さらに式 (41・a) が厳密解であるとはいえ、誘導の過程からも推察されるように高次振動に対する精度は低次振動に比べあまり期待し得るものではない。これらのことから矩形谷内のダムの地震応答解析に際し厳密式 (41・a) の代わりにその近似式 (41・b) を使うことは労力・精度の両面から望ましいことと考えられる。この意味で近似式 (41・b) に基づいて任意の谷形状に適用し得よう定式化した本論文の手法は高い実用性を有していると思われる。

Table 1 において注目すべきことは、 $|I_m|$ は $a=2/3$ の場合 m によらず一定であるが、 $a > 2/3$ であれば m の増大とともに増加し、 $a < 2/3$ であれば m の増大とともに減少することである。このことは減衰を一定とすれば、非均質なダムでは均質なダムより m の高次振動が発生しやすいことを意味する。実ダムでの検証を期待したい課題の一つである。

前述のように式 (88) の $R(x, z, t)$ は 3 方向への変位成分 u, v, w のいずれかを代表的に表わすものである。したがって、複数成分の応答量を必要とするときは、それらの方向に対応する入力加速度と式 (68)~(70) に示す定数 (τ, δ) を選択し、上記の手順を反復す

ることにより簡単にそれらが得られることになる。

5. おわりに

本論文においては、まず矩形の谷に位置する非均質なフィルダムの 3 次元振動特性について従来得られていた幾つかの知見を系統的に整理・統合し、この固有振動に関する近似式を提示した。次にこの近似式を基本として有限要素技法を適用することにより任意形状の谷に位置する 3 次元のダムの固有振動を算定するための有限要素マトリックスの具体形を与えた。引き続き、この有限要素モデルを用いてダムの地震応答解析を行うための定式化を行い、その適用性を検討した。ここに示した手法の特長として次のことが挙げられる。

(1) 本手法ではダム軸方向、上下流方向、鉛直方向の各地震応答を、それぞれ分離して独立に線形解析する。各方向の応答計算は形式上まったく同一であるので、単一方向に対する解析プログラムで複数方向に対する解析が行える。

(2) せん断剛性 G の分布がダム頂からの深さ z の a 乗に比例している場合すなわち $G \propto z^a$ のダムに対する有限要素マトリックスが陽な一般形で与えられているので a に特定の値を指定することにより種々の剛性分布に対する応答を種々比較することができる。

(3) ダム基礎における入力加速度の分布が一様である場合はもちろん、振幅・位相がダム軸方向に相違している場合に対しても容易に解析が行える。

(4) ダムの有限要素モデルはダム軸縦断面を有限個に鉛直分割するだけで得られ、全要素数や解析上の全自由度数は通常 50 以下で十分である。また必要なマトリックスは 3 重対角対称マトリックスとなるので、計算機の記憶容量や計算時間あるいは解析に要する作業量などが従来手法に比較し大幅に削減できる。

定式過程には多少煩雑な部分もあるが、解析に必要なマトリックスや数値の例を具体的に本文中あるいは補遺に示したので、これらを用いれば一般のダム技術者にも本手法を用い手軽に地震応答解析が行えるであろう。実際に地震応答解析を実施するに際し直面する問題として、① 入力地震加速度はダム基礎全般にどのように分布しているか、② ダム内の剛性分布を表わす指標 a はいかなる数値が適切か、③ 各モードごとの振動減衰はどの程度の数値を採用すべきか、④ m, n それぞれ何次までの高次モードを含めるべきか、などがあり、また⑤ 解析結果をいかに判断すべきか、といったことも問題となろう。これらに関して既存の知識は決して十分ではない。ダム震動に関する未解決の諸問題を解明する手段としても本手法は役立ち得るものと考えられる。

補 遺

Table A Examples of Normalizing Constant c and Characteristic Value μ_m .

$\nu = \frac{a}{2-a}$	a	c	μ_m				
			$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
0.0	0.0	1.000	2.405	5.520	8.654	11.792	14.931
0.1	0.181 8 (=2/11)	1.020	2.557	5.676	8.810	11.948	15.088
0.2	0.333 3 (=1/3)	1.055	2.707	5.830	8.965	12.104	15.244
0.3	0.461 5 (=6/13)	1.105	2.854	5.982	9.119	12.259	15.399
0.3333	0.5 (=1/2)	1.125	2.903	6.033	9.171	12.310	15.451
0.4	0.571 4 (=4/7)	1.171	2.999	6.133	9.273	12.413	15.554
0.5	0.666 7 (=2/3)	1.253	3.142	6.283	9.425	12.566	15.708
0.6	0.75 (=3/4)	1.354	3.283	6.432	9.576	12.719	15.862
0.6667	0.8 (=4/5)	1.433	3.376	6.530	9.677	12.821	15.964
0.7	0.823 5 (=14/17)	1.476	3.422	6.579	9.727	12.871	16.015
0.8	0.888 9 (=8/9)	1.622	3.560	6.726	9.876	13.023	16.167
0.9	0.947 4 (=18/19)	1.795	3.696	6.871	10.025	13.173	16.319
1.0	1.0	2.000	3.832	7.016	10.173	13.324	16.471

A. ダム軸方向の振動を扱った文献 8) で使用する基本方程式は本文中の式 (8) とまったく同一であるが、鉛直振動を扱った文献 9) では本論文と多少異なった展開をしている。そこでは鉛直振動卓越時に、 $\epsilon_x=0$ および $\sigma_y=0$ を仮定し $\sigma_z = E\epsilon_z/(1-\nu_0^2)$ の関係式を使用している。したがって本論文で用いた係数 $\eta=2(1+\nu_0)$ を文献では $\eta^*=2/(1-\nu_0)$ としているが、 $0 \leq \nu_0 \leq 0.5$ の範囲で η と η^* との差は大胆な近似を用いるこの種の問題では実用上あまり意味をなさないと思われる。

B. 本文中に現われる定数 c および μ_m の具体的数値例を Table A に示す。

C. 本文に示した数値解析手法のプログラムを作成するに際して、次の点は有用であろう。

(1) 部分マトリックス k_1 および k_2 は、通常式 (58) のように和の形で使用される。 k_1 と k_2 の和を作ると k_0^* は消去されて次のような簡単な形となる。

$$k_1 + k_2 = \frac{G_0 b c^2 J_{v+1}^2(\mu_m)}{(a+2) l \mu_m^{2v}} \begin{bmatrix} H_i^{a+2} & - (H_i^{a+2} + H_j^{a+2})/2 \\ \text{sym.} & H_j^{a+2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A.1)$$

(2) 式 (81), (82) の k_3 および k_4 に共通の $k^*/(H_j - H_i)^3$ は、 $a=0, 1/3, 1/2, 2/3$ および 1 の各場合、次のように因数分解できる。

$$\frac{k^*}{(H_j - H_i)^3} = A \begin{bmatrix} B & C \\ C & D \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A.2)$$

と表わすとき

i) $a=0$ の場合

$$A=1, B=D=2, C=1 \dots\dots\dots (A.3)$$

ii) $a=1/3$ の場合

$$A=2/9(H_i^{2/3} + H_i^{1/3}H_j^{1/3} + H_j^{2/3})^3 \dots\dots (A.4)$$

$$B=14 H_i^{7/3} + 42 H_i^{6/3}H_j^{1/3} + 84 H_i^{5/3}H_j^{2/3} + 100 H_i^{4/3}H_j^{3/3} + 90 H_i^{3/3}H_j^{4/3} + 54 H_i^{2/3}H_j^{5/3} + 27 H_i^{1/3}H_j^{6/3} + 9 H_j^{7/3} \dots\dots\dots (A.5)$$

$$C=6 H_i^{7/3} + 18 H_i^{6/3}H_j^{1/3} + 36 H_i^{5/3}H_j^{2/3} + 45 H_i^{4/3}H_j^{3/3} + 45 H_i^{3/3}H_j^{4/3} + 36 H_i^{2/3}H_j^{5/3} + 18 H_i^{1/3}H_j^{6/3} + 6 H_j^{7/3} \dots\dots\dots (A.6)$$

$$D=9 H_i^{7/3} + 27 H_i^{6/3}H_j^{1/3} + 54 H_i^{5/3}H_j^{2/3} + 90 H_i^{4/3}H_j^{3/3} + 100 H_i^{3/3}H_j^{4/3} + 84 H_j^{2/3}H_j^{5/3} + 42 H_i^{1/3}H_j^{6/3} + 14 H_j^{7/3} \dots\dots\dots (A.7)$$

iii) $a=1/2$ の場合

$$A=1/4(H_i^{1/2} + H_j^{1/2})^3 \dots\dots\dots (A.8)$$

$$B=15 H_i^{4/2} + 45 H_i^{3/2}H_j^{1/2} + 48 H_i^{2/2}H_j^{2/2} + 24 H_i^{1/2}H_j^{3/2} + 8 H_j^{4/2} \dots\dots\dots (A.9)$$

$$C=2(3 H_i^{4/2} + 9 H_i^{3/2}H_j^{1/2} + 11 H_i^{2/2}H_j^{2/2} + 9 H_i^{1/2}H_j^{3/2} + 3 H_j^{4/2}) \dots\dots\dots (A.10)$$

$$D=8 H_i^{4/2} + 24 H_i^{3/2}H_j^{1/2} + 48 H_i^{2/2}H_j^{2/2} + 45 H_i^{1/2}H_j^{3/2} + 15 H_j^{4/2} \dots\dots\dots (A.11)$$

iv) $a=2/3$ の場合

$$A=1/9(H_i^{2/3} + H_i^{1/3}H_j^{1/3} + H_j^{2/3})^3 \dots (A.12)$$

$$B=2(20 H_i^{8/3} + 60 H_i^{7/3}H_j^{1/3} + 120 H_i^{6/3}H_j^{2/3} + 145 H_i^{5/3}H_j^{3/3} + 135 H_i^{4/3}H_j^{4/3} + 90 H_i^{3/3}H_j^{5/3} + 54 H_i^{2/3}H_j^{6/3} + 27 H_i^{1/3}H_j^{7/3} + 9 H_j^{8/3}) \dots\dots\dots (A.13)$$

$$C=3(5 H_i^{8/3} + 15 H_i^{7/3}H_j^{1/3} + 30 H_i^{6/3}H_j^{2/3} + 39 H_i^{5/3}H_j^{3/3} + 42 H_i^{4/3}H_j^{4/3} + 39 H_i^{3/3}H_j^{5/3} + 30 H_i^{2/3}H_j^{6/3} + 15 H_i^{1/3}H_j^{7/3} + 5 H_j^{8/3}) \dots\dots\dots (A.14)$$

$$D=2(9 H_i^{8/3} + 27 H_i^{7/3}H_j^{1/3} + 54 H_i^{6/3}H_j^{2/3} + 90 H_i^{5/3}H_j^{3/3} + 135 H_i^{4/3}H_j^{4/3} + 145 H_i^{3/3}H_j^{5/3} + 120 H_i^{2/3}H_j^{6/3} + 60 H_i^{1/3}H_j^{7/3} + 20 H_j^{8/3}) \dots\dots\dots (A.15)$$

v) $a=1$ の場合

$$A=2 \dots\dots\dots (A.16)$$

$$B=3 H_i + H_j \dots\dots\dots (A.17)$$

$$C=H_i + H_j \dots\dots\dots (A.18)$$

$$D=H_i + 3 H_j \dots\dots\dots (A.19)$$

D. 式 (95) は等価節点力の概念を用いても誘導できる。これによる本手法の定式化が実ダムの地震応答解析例とともに文献 21) に示されている。

参 考 文 献

1) Ohmachi, T.: Earthquake characteristics at dam foundations, Proc. Int. Spmpo. on Weak Rock, ISRM Tokyo Sympo., Vol. 2, pp. 1255~1260, 1981.

2) Ohmachi, T. : Analysis of dynamic shear strain distributed in three-dimensional earthdam models, Proc. Int. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, Vol. 1, pp. 459~464, 1981.

3) 大町達夫：フィルダムの3次元の振動モードに関する実用的解法，東工大土木工学科研究報告，No. 26, pp. 125~136, 1980年6月。

4) 大町達夫・時松孝次・越智武雄：有限せん断ばりモデルによる3次元のアースダムの振動解析，東工大土木工学科研究報告，No. 27, pp. 123~149, 1980年12月。

5) 大町達夫・時松孝次：実物大型フィルダムの簡便な3次元動的解析のための有限要素マトリックス，東工大土木工学科研究報告，No. 29, pp. 13~26, 1981年12月。

6) 大町達夫・時松孝次：3次元のフィルダムの振動解析のための実用的モデル，土木学会論文報告集，No. 328, pp. 31~40, 1981年12月。

7) 畑中元弘：土堰堤の振動に関する3次元の考察—自由振動について—，土木学会誌，No. 37-10, pp. 1~6, 1952.

8) Abdel-Ghaffar, A.M. and A.S. Koh : Longitudinal vibration of non-homogeneous earth dams, Int. Jour. of Earthq. Engrg. and Str. Dyn., Vol. 9, pp. 279~305, 1981.

9) Gazetas, G. : Vertical oscillation of earth and rockfill dams : analysis and field observation, 土質工学会論文報告集，Vol. 21, No.4, pp. 56~68, 1981.

10) Frazier, G.A. : Vibration characteristics of three dimensional solids with application to earth dams, ph. D. Thesis submitted to Montana State Univ., 1969.

11) Clough, R.W. and A.K. Chopra : Earthquake stress analysis in earth dams, Jour. Engrg. Mech. Div., ASCE, Vol. 2, No. EM 2, Proc. Paper 4793, April, 1966.

12) Chopra, A.K. : Earthquake response of earth dams, Jour. Soil Mech. Found. Engrg., ASCE, Vol. 93, No. SM 2, pp. 65~81, Proc. Paper 5137, pp. 65~81, March, 1967.

13) Ohmachi, T. : Three dimensional dynamic behavior of embankment dams, Preprint # 81-040, ASCE 1981 International Convention, May, 1981.

14) 東京大学応用物理学教室編：微分方程式，東京大学基礎工学 2，東京大学出版会，pp. 119~122, 1960.

15) 森口繁一・宇田川銑久・一松 信：数学公式 III—特殊関数一，岩波全書，p. 161, 1960.

16) Abdel-Ghaffar, A.M. and R.F. Scott : Analysis of earth dam response to earthquakes, Jour. Geotech. Engrg. Div., ASCE, Vol. 105, No. GT 12, Proc. Paper 15033, pp. 1379~1404, Dec., 1979.

17) Abdel-Ghaffar, A.M. and R.F. Scott : Comparative study of dynamic response of earth dam, Jour. Geotech. Engrg. Div., ASCE, Vol. 107, No. GT 3, Proc. Paper 16097, pp. 271~286, March, 1981.

18) 大町達夫：フィルダムと地盤との動的相互作用に関する基礎的考察，土と基礎，28-8 (271), pp. 31~36, 1981.

19) 犬井鉄郎：特殊関数，岩波全書，pp. 315~317, 1962.

20) Abdel-Ghaffar, A.M. : Earthquake induced longitudinal vibration in earth dams, Report No. 80-SM-14, Princeton Univ., 1980.

21) Ohmachi, T., K. Tokimatsu and S. Soga : Practical Dynamic Analyses of Earth Dams by a Simplified 3-D Method, Proc. 6th Japan Earthquake Engineering Symposium-1982, pp. 1145~1152, 1982.

(1982.3.31・受付)

正 誤 表

「3次元のフィルダムの振動解析のための実用的モデル」

著者：大町達夫・時松孝次

(土木学会論文報告集 第328号, pp. 31~40, 1982年12月)

ページ, 欄, 行	誤	正																
p. 36, 式 (63)	$A_{mn} = \frac{P_{mn}}{M_{mn}} \left[\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_{mn}} \right)^2 + \left(2 h_{mn} \frac{\omega_0}{\omega_{mn}} \right)^2 \right]^{-1/2}$	$A_{mn} = \frac{P_{mn}}{\omega_{mn}^2 M_{mn}} \left[\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_{mn}} \right)^2 + \left(2 h_{mn} \frac{\omega_0}{\omega_{mn}} \right)^2 \right]^{-1/2}$																
p. 37, Table 3	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Model</th> <th>G_0</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$G = G_0$</td> <td>69 tf/m²</td> </tr> <tr> <td>$G = G_0 \varphi^{2/3}$</td> <td>225 tf/m^{2/3}</td> </tr> <tr> <td>$G = G_0 \varphi$</td> <td>2563 tf/m²</td> </tr> </tbody> </table> <p>(1 tf = 9.8 kN)</p>	Model	G_0	$G = G_0$	69 tf/m ²	$G = G_0 \varphi^{2/3}$	225 tf/m ^{2/3}	$G = G_0 \varphi$	2563 tf/m ²	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Model</th> <th>G_0</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$G = G_0$</td> <td>25 629 tf/m²</td> </tr> <tr> <td>$G = G_0 \varphi^{2/3}$</td> <td>2 250 tf/m^{2/3}</td> </tr> <tr> <td>$G = G_0 \varphi$</td> <td>691 tf/m²</td> </tr> </tbody> </table> <p>(1 tf = 9.8 kN)</p>	Model	G_0	$G = G_0$	25 629 tf/m ²	$G = G_0 \varphi^{2/3}$	2 250 tf/m ^{2/3}	$G = G_0 \varphi$	691 tf/m ²
Model	G_0																	
$G = G_0$	69 tf/m ²																	
$G = G_0 \varphi^{2/3}$	225 tf/m ^{2/3}																	
$G = G_0 \varphi$	2563 tf/m ²																	
Model	G_0																	
$G = G_0$	25 629 tf/m ²																	
$G = G_0 \varphi^{2/3}$	2 250 tf/m ^{2/3}																	
$G = G_0 \varphi$	691 tf/m ²																	