

少数種類の構造物からなるライフライン システムの耐震性の評価

SEISMIC RISK ANALYSIS OF LIFELINE SYSTEMS
COMPOSED OF A FEW KINDS OF STRUCTURES

川 上 英 二*

By Hideji KAWAKAMI

1. 序 論

上下水道・電気・通信・鉄道・道路等のライフラインシステムは、近年、産業および国民生活にとって基本的な機能を果たしており、地震国日本においては、これらシステムの地震時における機能の安全性を保つことが地震災害を減少するために重要であると考えられている。ライフラインシステムの機能の安全性を向上させるため従来、2つの方法——各構造物の構造上の強度を増加するという方法と、システムの形状を合理的に定めて機能の安全性を増加するという方法——がとられている。それに伴い多くの研究が行われ、特に前者の方法に関する研究は多く、現在までの研究により、ライフラインシステムを構成する各構造物の構造上の強度はかなり明らかになってきている¹⁾。しかし、後者の方法に関する研究は以下に示すように、まだ緒についたばかりである。

久保²⁾は関東地震による水道管の被害分布を統計的に整理し、地盤特性と水道管の被害との関係を求めている。一方、Panoussis³⁾は直列・並列システムの組合せから構成される簡単な形状のライフラインシステムの地震に対する信頼性を定量的に評価している。この研究をTaleb-Agha⁴⁾はさらに進め、Tie-set, Cut-setの考えを用いて、さらに複雑なライフラインシステムの信頼性を評価するための方法を展開している。以上の研究を工学的に意味あるものにするため、Shinozuka・Takada・Kawakami⁵⁾は地盤の影響を考慮して地中埋設管システムの信頼性を評価している。一方、柴田・土屋⁶⁾はブール代数を利用した方法を用いて、電力網システムの信頼性を評価している。また、田村・川上^{7)~9)}はモンテカルロ法を用いてシステムの信頼性を評価し、さらにライフラインシステムのおおの特性を考慮して、その機能の信頼性をシミュレーションを用いて評価している。伯

野・斎藤¹⁰⁾はシステムの信頼性に影響を与える因子について重回帰分析を用いた研究を行っている。

しかし、以上提案されている方法はどれも、システムの形状を一定とし、地震荷重を確定量または特定の分布をする確率量であると仮定した場合のシステムの信頼性を扱っており、いろいろな大きさの地震荷重が作用した場合のシステムの信頼性の変化を算定するためには、あるいは複数のシステムの信頼性を比較するためには、多くの地震荷重と複数個のシステムとのそれぞれの組合せに対し、システムの信頼性を算定し、その値の変化を調べる必要があり、膨大な計算量が必要となる。以上の結果を簡単に見通しよく求める方法が望まれていると考える。また従来、構造系の信頼性解析として、静定構造物および不静定構造物に対して信頼性解析の方法が研究されているが、外力に対し、システム全体で力学的に抵抗する役割を果たす構造系とは異なり、ライフラインシステムは各構造物の破壊により生ずるシステムの機能低下に対して、システムを並列化、または冗長度を増加させることにより、システム全体で機能低下に抵抗する役割を果たす、いわば機能系である。また、一般に破壊モードも多種多様である。したがって、このようなライフラインシステムに対しても新しい信頼性解析の方法が必要であると考えられる。

本論文では、ライフラインシステムの多くは、少数個の種類の構造物が多数個集まり、システムを構成し機能していることに注目して、システムの信頼性を荷重外力と構造物の強度とから求まる各種類の構造物の信頼性を用いて算定される関数と、システムの形状をネットワーク状にすることに影響されるシステムに固有な関数との2つの関数で表わす方法を展開した。これら2つの関数の性質を調べ、さらにこれらを用いてシステムの機能の信頼性を見通しよく求める方法を提案した。以上の方法を簡単なシステムのモデルに適用した結果、これらの方法がシステムの信頼性の算定に有用であることを確認し

* 正会員 工博 埼玉大学助手 工学部建設工学科

たので報告する。

2. システムの信頼性の評価方法

(1) 1種類の構造物からシステムが構成されている場合

ライフラインシステムは、多くの場合、少数種類の構造物が多数個集まって1つの機能を果たしている。上下水道の場合、多数個の管路の集合からシステムがおもに構成され、鉄道・道路も類似断面をもつ構造物の単位の集合と考えられる。

1種類の m 個の構造物から構成されているシステムを考える。ある外力に対して、これらの m 個の構造物のうち、いくつかのものは破壊し、残りのものは安全であったと考える。そして、その結果、システムは安全であるか破壊であるかいずれかであったと考える。ここで、安全であった構造物の個数を x 個とすると、破壊した構造物の個数は $(m-x)$ 個であるが、システムが安全である事象 S_s は、構造物が零個安全であり (m 個破壊して)、かつシステムが安全である事象、構造物が1個安全であり、かつシステムが安全である事象、 \dots 、構造物が m 個安全であり、かつシステムが安全である事象の $(m+1)$ 個の事象の和集合であり、かつ、これらの事象は同時には起こり得ず、互いに排反事象である。ここで x 個の構造物が安全である事象を $A_x(x=0, 1, \dots, m)$ とおくと、排反事象に対する確率の加法性より、システムが安全である事象 S_s が生じる確率 ${}_sP$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} {}_sP &= \text{prob}(S_s) = \sum_{x=0}^m \text{prob}(A_x, S_s) \\ &= \sum_{x=0}^m \text{prob}(A_x) \cdot \text{prob}(S_s|A_x) \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ただし、 $\text{prob}(\cdot)$ は括弧内の事象が生じる確率を表わし、 $\text{prob}(\cdot, \cdot)$ は同時確率、 $\text{prob}(\cdot|\cdot)$ は条件付確率を表わす。また、本論文では各構造物およびシステムの状態は安全または破壊の2つの状態のいずれかで表わされるものと仮定する。

式(1)において、 $\text{prob}(A_x)$ は m 個の構造物のうち x 個の構造物が安全である確率であり、構造物に働く外力と構造物の強度とによって決定され、システムの形状にはよらない値である。一方、 $\text{prob}(S_s|A_x)$ は、 m 個の構造物のうち x 個の構造物が安全である場合にシステムが安全である確率であり、外力または構造物の強度の大きさのどちらにも関係なく、システムの形状および、システムが安全であるために各構造物が満たすべき条件によって決定される値である。ここで、安全である構造

物の数は確率変数 X であると考えられ、非負の整数 x に対して確率変数 X が x の値をもつ確率 $\text{prob}(A_x)$ 、 $\text{prob}(S_s|A_x)$ をそれぞれ x の関数 $A_X(x)$ 、 $S_X(x)$ と考えると、

$$A_X(x) = \text{prob}(A_x) \dots\dots\dots (2)$$

$$S_X(x) = \text{prob}(S_s|A_x) \dots\dots\dots (3)$$

となり、式(1)はこの2つの関数を用いて

$${}_sP = \sum_{x=0}^m A_X(x) \cdot S_X(x) \dots\dots\dots (4)$$

と表わされる。今後、この2つの関数をそれぞれ「構造物の強度の関数」および「システムの形状の関数」とよぶ。

(2) 複数種類の構造物からシステムが構成されている場合

システムが複数種類の構造物から構成されている場合、システムの信頼性は式(1)と同様にして次式で表わされる。

$$\begin{aligned} {}_sP &= \text{prob}(S_s) = \sum_{x_1=0}^{m_1} \dots \sum_{x_n=0}^{m_n} \text{prob}(1A_{x_1}, \dots, nA_{x_n}, S_s) \\ &= \sum_{x_1=0}^{m_1} \dots \sum_{x_n=0}^{m_n} \text{prob}(1A_{x_1}, \dots, nA_{x_n}) \\ &\quad \cdot \text{prob}(S_s|1A_{x_1}, \dots, nA_{x_n}) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ただし、システムは n 種類のそれぞれ m_1, \dots, m_n 個の構造物から構成されるとし、 iA_{x_i} は第 i 種 ($i=1, \dots, n$) の構造物が x_i 個安全である事象を表わしている。

(1)と同様、安全である各種類の構造物の数は確率変数 X_1, \dots, X_n であると考えられ、非負の整数からなる (x_1, \dots, x_n) に対して、確率 $\text{prob}(1A_{x_1}, \dots, nA_{x_n})$ および $\text{prob}(S_s|1A_{x_1}, \dots, nA_{x_n})$ を、それぞれ (x_1, \dots, x_n) の関数 $A_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ および $S_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ と考える。つまり、

$$A_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \text{prob}(1A_{x_1}, \dots, nA_{x_n}) \dots\dots\dots (6)$$

$$S_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \text{prob}(S_s|1A_{x_1}, \dots, nA_{x_n}) \dots\dots\dots (7)$$

式(5)、(6)、(7)より、システムが安全である確率は、

$$\begin{aligned} {}_sP &= \sum_{x_1=0}^{m_1} \dots \sum_{x_n=0}^{m_n} A_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad \cdot S_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

と表わされる。ここでも、前と同様、システムの信頼性は構造物の強度の関数 $A_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ とシステムの形状の関数 $S_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ とに分離されている。以下3.では前者の構造物の強度の関数を、4.では後者のシステムの形状の関数を扱い、その結果を用いて5.でシステムの信頼性を再び扱うことにする。

3. 構造物の強度の関数

1種類の構造物からシステムが構成されている場合、構造物の強度の関数は式(2)における $A_X(x)$ で表わされる。ところが、これは m 個の構造物のうち x 個が安全である事象が生じる確率である。ここで、構造物の安全性を評価する場合に考慮すべき確率変数としては、一般に、構造物の強度 R 、荷重外力 S が考えられ、破壊が起きない事象は $R \geq S$ で与えられることから、ある対象とする地震動を受けた場合に、この事象が発生する確率 $\text{prob}(R \geq S)$ を構造物の信頼性と定義する。まず、この値が一定値 q であると仮定する。また、実際のシステムでは、各構造物の強度 R 、荷重外力 S の間に相関が存在すると考えられるが、ここでは、簡単にするため、これらの値はすべて互いに独立であり、したがって、各構造物の破壊が独立事象であると仮定している。この場合、二項分布の公式より、

$$A_X(x) = \binom{m}{x} q^x (1-q)^{m-x} \dots\dots\dots (9)$$

と求められる。さらに、二項分布は構造物の総数 m が大きな値では正規分布に近似され、

$$A_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}\right) \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 \bar{x} 、 σ_x^2 はそれぞれ安全である構造物の数の平均値および分散であり、

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^m x A_X(x) = mq \dots\dots\dots (11)$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{x=0}^m (x-\bar{x})^2 A_X(x) = mq(1-q) \dots\dots\dots (12)$$

である。

複数種類の構造物からシステムが構成されている場合、構造物の強度の関数は、各種類の構造物の破壊が独立事象であると仮定すると、

$$A_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n A_{X_i}(x_i) \dots\dots\dots (13)$$

と表わされる。ところが、各種類の構造物に対して式(9)が成立し、これを式(13)に代入すると、

$$A_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \binom{m_i}{x_i} q_i^{x_i} (1-q_i)^{m_i-x_i} \dots\dots\dots (14)$$

となる。この関数はさらに、多次元正規分布

$$A_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma_x|}} \cdot \exp\left[-(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\Sigma_x^{-1}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^T/2\right] \dots\dots\dots (15)$$

ただし、

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \dots\dots\dots (16)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \dots\dots\dots (17)$$

$$\bar{x}_i = m_i \bar{q}_i \dots\dots\dots (18)$$

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{x_n}^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

$$\sigma_{x_i}^2 = m_i q_i (1-q_i) \dots\dots\dots (20)$$

で近似できる。

式(9)から(20)における各構造物の信頼性 q_i は従来の信頼性理論から次式により確定値として求められる。

$$q_i = \int_0^\infty F_s(u) f_{R_i}(u) du \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 $F_s(u)$ は荷重外力 u の確率分布関数であり、 $f_{R_i}(u)$ は第 i 種構造物の強度 u の確率密度関数である。

しかし、 $F_s(u)$ または $f_{R_i}(u)$ が確率変数である場合には、各構造物の信頼性 q_i は確率量として求められる。この信頼性の確率密度関数を $f_{Q_i}(q_i)$ とおくと、式(9)の代わりに、次式

$$A_{X_i}(x_i) = \binom{m_i}{x_i} \int_0^1 f_{Q_i}(q_i) q_i^{x_i} (1-q_i)^{m_i-x_i} dq_i \dots\dots\dots (22)$$

が成立する。したがって、安全である構造物の総数の平均値は、式(11)と同様にして、

$$\bar{x}_i = m_i \bar{q}_i \dots\dots\dots (23)$$

であり、分散は式(12)と同様にして、

$$\sigma_{x_i}^2 = m_i \bar{q}_i (1-\bar{q}_i) + m_i (m_i-1) \sigma_{q_i}^2 \dots\dots\dots (24)$$

と求められる。ただし、 \bar{q}_i 、 $\sigma_{q_i}^2$ はそれぞれ信頼性 q_i の平均値および分散

$$\bar{q}_i = \int_0^1 q_i f_{Q_i}(q_i) dq_i \dots\dots\dots (25)$$

$$\sigma_{q_i}^2 = \int_0^1 (q_i - \bar{q}_i)^2 f_{Q_i}(q_i) dq_i \dots\dots\dots (26)$$

を示している。結局、構造物の信頼性が確率変数である場合の構造物の強度の関数は、式(23)、(24)の平均値および分散を有する多次元正規分布(式(15))で近似できる。式(18)と(23)および式(20)と(24)を比較すると、構造物の信頼性が確定値のまわりに分布することにより構造物の強度の関数の平均値は変わらないが、分散が $m_i(m_i-1)\sigma_{q_i}^2$ だけ大きくなるのが認められる。なお、信頼性が確率変数である一種類の構造物から構成されているシステムに対する構造物の強度の関数は式(21)から(26)において添字 i を取り除けば同様に成立することはいうまでもない。

4. システムの形状の関数

(1) システムの形状の関数の算定方法 (1)——すべての順列組合せを考える方法——

システムの形状の関数 $S_X(x)$ または $S_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots,$

x_n) の厳密解は以下の手順に従い算定することができる。ただし、 $S_X(x)$ は $S_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$ で n が 1 の場合であるので、後者の場合について理論を進める。

① 第 i 種の m_i 個の構造物に 1 から m_i の番号を割り当てる。この操作を $i=1, \dots, n$ の全種類の構造物について行う。

② $1 \sim m_i$ を並び変えて $m_i!$ 個の順列を作り、これらの順列の全種類についての組合せを求めると $\prod_{i=1}^n m_i!$ 個の順列組合せが得られる。

③ それぞれの順列組合せに対し、各順列を破壊しにくい構造物の順序に並んだ列つまり (構造物の強度 R) - (荷重外力 S) の値が大きな順序に並んだ列であると考へ、最初から x_i 個の構造物は安全であり、それ以降の構造物は破壊するものとする。 $0 \leq x_i \leq m_i (i=1, \dots, n)$ の範囲のすべての整数の n 種類の構造物についての全組合せを表すベクトル (x_1, \dots, x_n) に対して、システムが安全であるか否かをシステムの破壊の基準に従い判定する。

④ 構造物の種類により破壊確率が異なっても、また、3. で扱ったように、同一種類の構造物の破壊確率が分布していても、同一種類の構造物の間では信頼性の大小を確定できない場合には、② の $\prod_{i=1}^n m_i!$ 個の順列組合せそれぞれの発生確率は等しく $1 / \prod_{i=1}^n m_i!$ である。③ の手順をすべての順列組合せに対して適用し、システムが安全となる順列組合せの数を (x_1, \dots, x_n) ($0 \leq x_i \leq m_i, i=1, \dots, n$) の関数として数え上げ、その数を $s(x_1, \dots, x_n)$ とおくとシステムの形状の関数の厳密解は、

$$S_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = s(x_1, \dots, x_n) / \prod_{i=1}^n m_i! \dots \dots \dots (27)$$

で算定される。構造物の種類および個数の増加に伴う、順列組合せの数の増加が著しいため、実際の複雑なシステムに対し本方法を適用することは非常に困難である。本方法は比較的単純なシステムに対してのみ適用可能である。

(2) システムの形状の関数の算定方法 (2) —— モンテカルロ法による方法 ——

(1) で扱ったようにすべての順列組合せを考える方法では、構造物の個数の増大に伴い、順列組合せの総数 $(\prod_{i=1}^n m_i!)$ は急速に増大するため、実際の複雑なシステムに対して (1) の方法は実用的ではない。そこで、すべての順列を扱う代わりに順列をランダムに生成し、システムの形状の近似関数をモンテカルロ法により算定する方法が考えられる。順列をランダムに生成するには、ま

ず $1 \sim m_i$ の自然数のそれぞれに対してランダムな数を発生させ割り当て、これらのランダム数を大きさの順に並び替え、同時に対応する $1 \sim m_i$ の自然数も並び替え、得られた自然数の列をランダムに取り出された順列と考へる。

上記以外の点では (1) の算定方法と同様であり、各種類の構造物に対し m_i^* ($i=1, \dots, n$) 個の順列をシミュレートした場合に得られる $\prod_{i=1}^n m_i^*$ 個の順列組合せのうち、システムが安全である順列組合せの数を (x_1, \dots, x_n) の関数として数え上げ、その数を $s^*(x_1, \dots, x_n)$ とすると、システムの形状の関数の近似解は、

$$S_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \approx s^*(x_1, \dots, x_n) / \prod_{i=1}^n m_i^* \dots \dots \dots (28)$$

で算定される。

(3) システムの形状の関数の算定方法 (3) —— Tie-set または Cut-set を用いる方法 ——

供給節点と需要節点とが連結の場合にシステムが安全であるとシステムの安全性について特に基準を設けた場合には、Tie-set または Cut-set を用いてシステムの形状の関数を算定することが可能である。各種類の構造物がそれぞれ x_i 個 ($i=1, \dots, n$) 安全である場合にシステムが安全である確率は、各種類の構造物に対する順列の最初の x_i 個の構造物の n 種類の構造物にわたっての組合せによって生じる構造物の集合 S_{x_1, \dots, x_n} に、少なくともひとつの Tie-set が含まれる順列組合せの数の順列組合せの総数 $(\prod_{i=1}^n m_i!)$ に対する割合に等しい。つまり、

$$\begin{aligned} S_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) &= \text{prob}(S_{x_1, \dots, x_n} | A_{x_1}, \dots, A_{x_n}) \\ &= \text{prob}(\text{any Tie-set} \subset S_{x_1, \dots, x_n}) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n m_i!} s(\text{any Tie-set} \subset S_{x_1, \dots, x_n}) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n m_i!} \sum_{h=1}^{NT} (-1)^{h-1} \sum_{j=1}^{NC_h} s(\cup_{k \in I_j^h} T.S_k \subset S_{x_1, \dots, x_n}) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n m_i!} \sum_{h=1}^{NT} (-1)^{h-1} \sum_{j=1}^{NC_h} \prod_{i=1}^n \binom{x_i}{i S_j^h} (i S_j^h)! \\ &\quad \cdot (m_i - i S_j^h)! \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

ただし、 $s(\cdot)$ は括弧内の条件を満足する順列組合せの総数、 $T.S_k$ は k 番目の Tie-set を構成する構造物の集合、 NT は Tie-set の総数、 $NC_h = \binom{NT}{h}$ 、 I_j^h は NT 個の Tie-set から h 個の Tie-set を取り出す組合せのうち j 番目の組合せを構成する要素である Tie-set の番号の集合、および、 $i S_j^h = |\cup_{k \in I_j^h} T.S_k|$ は I_j^h の要素である番号の Tie-set の和集合を構成する構造物のうち、第 i 種類の構造物の総数を表わす。また、式 (29)

では、大きさ m_i の列の最初の x_i 個のうちに所定の $i s_j^h$ 個を含む順列の数が $\binom{x_i}{i s_j^h} (i s_j^h)! (m_i - i s_j^h)!$ で求められることを用いている。

Cut-set を用いても Tie-set の場合と同様にして各種類の構造物がそれぞれ x_i 個 ($i=1, \dots, n$) 安全である場合にシステムが破壊する確率 $\text{prob}(S_f|_1 A_{x_1}, \dots, n A_{x_n})$ が求められ、これを次式

$$S_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \text{prob}(S_s|_1 A_{x_1}, \dots, n A_{x_n}) = 1 - \text{prob}(S_f|_1 A_{x_1}, \dots, n A_{x_n}) \dots \dots \dots (30)$$

に代入することによりシステムの形状の関数を算定できる。

(4) システムの形状の確率密度関数 $f(y)$, $f(y_1, \dots, y_n)$ の導入

システムの形状の関数は、構成構造物が1種類の場合には式(4)における $S_X(x)$ で、また、複数種類の場合には式(8)における $S_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ で表わされるが、ここで、構造物が1つも破壊しない場合におけるシステムの信頼性は1であることを用いると、

$$S_X(m) = \text{prob}(S_s|_1 A_m) = 1 \dots \dots \dots (31)$$

$$S_{X_1 \dots X_n}(m_1, \dots, m_n) = \text{prob}(S_s|_1 A_{m_1}, \dots, n A_{m_n}) = 1 \dots \dots \dots (32)$$

が成立する。また、システムの種類・形状、構造物の種類等によって異なるものであるが、ここではどんな安全なシステムに対しても、その場合に安全な構造物の集合を含む集合の構造物が安全であるシステムは安全であるような場合を考える。この場合、システムの形状の関数 $S_X(x)$, $S_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ は x , または x_1, \dots, x_n に関して単調増加関数である。

ここで1種類の構造物から構成されるシステムに対し次の関数を定義する。

$$f(y) = S_X(y) - S_X(y-1) \dots \dots \dots (33)$$

ただし、

$$S_X(y) = 0 \quad (y \leq -1) \dots \dots \dots (34)$$

とする。式(31), (33), (34)を用いると、次式が成立する。

$$\sum_{y=0}^m f(y) = 1 \dots \dots \dots (35)$$

$$S_X(x) = \sum_{y=0}^x f(y) \dots \dots \dots (36)$$

$f(y)$ は安全な構造物の総数が $(y-1)$ 個からさらに1個増すことによるシステムの信頼性の増加分であり、上述したようにシステムの形状の関数が単調増加関数である場合には $f(y)$ は非負である。そこで $f(y)$ をシステムの形状の確率密度関数とよぶことにする。

複数の種類の構造物から構成されるシステムに対しては、式(33)を拡張し次の関数をシステムの形状の確率

密度関数として定義する。

$$f(y_1, \dots, y_n) = \sum_{r_1=0}^1 \dots \sum_{r_n=0}^1 (-1)^{\sum_{j=1}^n r_j} \dots \cdot S_{X_1 \dots X_n}(y_1 - r_1, \dots, y_n - r_n) \dots \dots \dots (37)$$

ただし、 y_1, \dots, y_n のうちに負の数が1つでも含まれれば $S_{X_1 \dots X_n}(y_1, \dots, y_n)$ は零であるとする。式(37)の右辺の関数は、

$$\frac{\partial^n}{\partial y_1 \dots \partial y_n} S_{X_1 \dots X_n}(y_1, \dots, y_n) \dots \dots \dots (38)$$

の後退差分であり、式(32), (37)を用いると、

$$\sum_{y_1=0}^{m_1} \dots \sum_{y_n=0}^{m_n} f(y_1, \dots, y_n) = 1 \dots \dots \dots (39)$$

$$S_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{y_1=0}^{x_1} \dots \sum_{y_n=0}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) \dots \dots \dots (40)$$

の関係が成立している。

(5) システムの形状の確率密度関数の性質

(1) から (4) により求められるシステムの形状の確率密度関数の性質を、1種類の構造物から構成される以下に示す簡単なシステムのモデルについて調べた。

① m 個の構造物からシステムが構成され、 m 個全部の構造物が安全な場合に限ってシステムが安全である場合には、システムの形状の確率密度関数は、

$$f(y) = \begin{cases} 0 & (0 \leq y \leq m-1) \\ 1 & (y=m) \end{cases} \dots \dots \dots (41)$$

である。

② m 個の構造物からシステムが構成され、そのうち特定の $i s_1^1$ 個の構造物が安全である場合にシステムが安全である場合(需給節点が連結である場合にシステムが安全であると基準を設けた場合に、両節点の間には $i s_1^1$ 個の構造物から構成されている Tie-set が1つしかないトリー状のシステムの場合)、式(29), (33)を用いるとシステムの形状の確率密度関数は、

$$f(y) = \frac{i s_1^1 (m - i s_1^1)! (y-1)!}{m! (y - i s_1^1)!} \dots \dots \dots (42)$$

で表わされ、 $i s_1^1 \leq y \leq m$ の範囲で正の値となり単調増加関数である。Fig. 1 に $m=17$, $i s_1^1=5, 10, 15$ の場合について $f(y)$ を計算した結果を示してある。この図より、 $i s_1^1$ の値が大きいくほど、分布は右に寄っていることがわかる。

③ m 個の構造物からシステムが構成され、そのうち特定の $i s_1^1$ 個または $i s_2^1$ 個の構造物が安全である場合にシステムが安全である場合②と同様な基準を設けた場合に、需給節点間にはそれぞれが $i s_1^1$ 個と $i s_2^1$ 個の構造物から構成されている2つの Tie-set が存在する場合)、式(29), (33)よりシステムの形状の確率密度関数

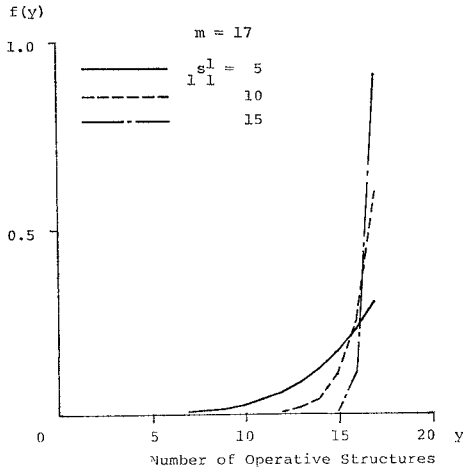


Fig. 1 Density Function Representing Redundancy due to System Configuration (in Case Supply and Demand Nodes are Connected to Each Other by Only One Tie-Set Composed of $1s_1^1$ Structures).

は、

$$f(y) = \frac{(y-1)!}{m!} \left[\frac{{}_1s_1^1(m-{}_1s_1^1)!}{(y-{}_1s_1^1)!} + \frac{{}_1s_2^1(m-{}_1s_2^1)!}{(y-{}_1s_2^1)!} - \frac{{}_1s_1^2(m-{}_1s_1^2)!}{(y-{}_1s_1^2)!} \right] \dots\dots\dots (43)$$

と表わされる. ただし, 2つの Tie-set が同一構造物を含まず独立である場合には,

$${}_1s_1^2 = {}_1s_1^1 + {}_1s_2^1 \dots\dots\dots (44)$$

であり, 同一構造物を1つ以上含むため従属である場合には,

$${}_1s_1^2 < {}_1s_1^1 + {}_1s_2^1 \dots\dots\dots (45)$$

である. **Fig. 2** に $m=17$ で $({}_1s_1^1, {}_1s_2^1, {}_1s_1^2)$ の値がそれぞれ $(5, 5, 10)$, $(5, 10, 15)$, $(5, 5, 8)$, $(5, 10, 13)$ である場合の関数 $f(y)$ を示してある. この図より, Tie-set が2つの場合には1つの場合とは異なり, 極大値を有する関数になり得ること, 特に2つの Tie-set が独立な場合には $y=m$ で零となること, また, Tie-set を構成する構造物の数が多いほど, 分布は右に寄っていることがわかる.

④ 形状の確率密度関数 $f(y)$ が求められているシステムに, システムの安全に無関係な構造物を1つ追加して得られる新しいシステムに対する関数 $f^*(y)$ を算定する.

現在のシステムに対して得られる各順列の最初の $(y-1)$ 個の構造物だけが安全である場合にはシステムは破壊し, 最初の y 個の構造物が安全である場合にシステムが安全となるような y の値をすべての順列に対して求め, y の関数としてその順列の個数を数え上げたものを $\bar{s}(y)$ とおく. この関数は (1), ④ で定義した関数 $s(y)$ の後退差分関数である.

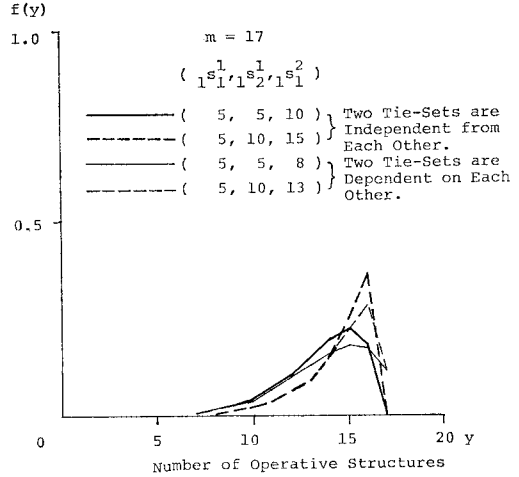


Fig. 2 Density Function Representing Redundancy due to System Configuration (in Case Supply and Demand Nodes are Connected to Each Other by Two Tie-Sets Composed of $1s_1^1$ and $1s_2^1$ Structures Respectively).

$$\bar{s}(y) = s(y) - s(y-1) \dots\dots\dots (46)$$

新しいシステムの構造物の総数を $(m+1)$ とおくと考慮すべき順列の個数は $(m+1)!$ である. この $(m+1)!$ 個の順列は新しく追加する構造物の順番 $t(=1, \dots, m+1)$ それぞれに対し, t を除く m 個の位置 $1, \dots, t-1, t+1, \dots, m+1$ に現在のシステムに対する $m!$ 個の順列を並べたものであると分けて考えることができる. 追加する構造物の番号が t の場合の上述の後退差分関数を $\bar{s}_t^*(y)$ とおくと, 追加する構造物がシステムの安全に寄与しないことから $m!$ 個の順列のうち $(t-1)$ 以前の y で安全となっている順列は, 新しいシステムの対応する順列でもちょうど y で安全となり, t 以降の $(y-1)$ で安全となっている順列はちょうど y で安全となるので,

$$\bar{s}_t^*(y) = \begin{cases} \bar{s}(y) & y \leq t-1 \\ 0 & y = t \\ \bar{s}(y-1) & y \geq t+1 \end{cases} \dots\dots\dots (47)$$

ところが, 新しいシステムに対する後退差分関数は

$$\bar{s}^*(y) = \sum_{t=1}^{m+1} \bar{s}_t^*(y) \dots\dots\dots (48)$$

で表わされる. 式 (48), (47) より, したがって,

$$\begin{aligned} \bar{s}^*(y) &= \sum_{t=1}^{y-1} \bar{s}_t^*(y) + \bar{s}_y^*(y) + \sum_{t=y+1}^{m+1} \bar{s}_t^*(y) \\ &= (y-1)\bar{s}(y-1) + (m-y+1)\bar{s}(y) \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

ところが, 式 (27), (33), (46) より,

$$\bar{s}(y) = m! f(y) \dots\dots\dots (50)$$

$$\bar{s}^*(y) = (m+1)! f^*(y) \dots\dots\dots (51)$$

が成立し, 結局, 新しいシステムの形状の確率密度関数は次式により求められる.

$$f^*(y) = \frac{y-1}{m+1} f(y-1) + \frac{m-y+1}{m+1} f(y) \dots\dots\dots(52)$$

⑤ 形状の確率密度関数 $f(y)$ が求められているシステムに、システムの安全をその1つの構造物のみでも達成させるような構造物を1つ追加して得られる新しいシステムに対する関数 $f^*(y)$ を算定する。

④ と同様に考えると、 $(t-1)$ 以前の y で安全となっている順列は新しいシステムでもちょうど y で安全となり、 t 以降で安全となっている順列はちょうど t で安全となることより、次式が成立する。

$$\bar{s}_t^*(y) = \begin{cases} \bar{s}(y) & y \leq t-1 \\ \sum_{y=y}^m \bar{s}(y) & y = t \\ 0 & y \geq t+1 \end{cases} \dots\dots\dots(53)$$

したがって、式 (48) より、

$$\begin{aligned} \bar{s}^*(y) &= \sum_{t=1}^{y-1} \bar{s}_t^*(y) + \bar{s}_y^*(y) + \sum_{t=y+1}^{m+1} \bar{s}_t^*(y) \\ &= \sum_{y=y}^m \bar{s}(y) + (m-y+1)\bar{s}(y) \dots\dots\dots(54) \end{aligned}$$

式 (50)、(51) を式 (54) に代入すると、結局、新しいシステムの形状の確率密度関数は次式により求められる。

$$f^*(y) = \frac{1}{m+1} \left\{ \sum_{y=y}^m f(y) \right\} + \frac{m+1-y}{m+1} f(y) \dots\dots\dots(55)$$

(6) システムの形状の確率密度関数の母数

上述したように、システムの形状の確率密度関数は、各構造物に作用する荷重外力の大きさにはよらず、システムの形状、およびシステムが安全であるために各構造物が満たすべき条件によって決定される、システムの冗長度を表わすシステムに固有な関数である。1種類の構造物から構成されているシステムに対して、この関数の性質を表わす値として、平均値 \bar{y} 、および分散 σ_y^2 を考える。

$$\bar{y} = \sum_{y=0}^m y f(y) \dots\dots\dots(56)$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{y=0}^m (y-\bar{y})^2 f(y) \dots\dots\dots(57)$$

ここで、 \bar{y} が構造物の総数 m に比較して小さいほど、冗長なシステムを表わしており、 σ_y^2 は冗長度の分布の大きさを示しているものと考えられる。なお、 \bar{y} は M. Tainiter¹¹⁾ により提案された連結グラフ G の“mean connectivity” $c(G)$ と

$$\bar{y} = m - c(G) \dots\dots\dots(58)$$

の関係がある。

複数種類の構造物から構成されるシステムに対して、同様に、システムの形状の確率密度関数の平均ベク

トル

$$\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \dots\dots\dots(59)$$

ただし、

$$\bar{y}_i = \sum_{y_i=0}^{m_i} \dots \sum_{y_n=0}^{m_n} y_i f(y_1, \dots, y_n) \dots\dots\dots(60)$$

および分散行列

$$\Sigma_y = (\sigma_{y_{ij}}) \dots\dots\dots(61)$$

ただし、

$$\sigma_{y_{ij}} = \sum_{y_i=0}^{m_i} \dots \sum_{y_n=0}^{m_n} (y_i - \bar{y}_i)(y_j - \bar{y}_j) f(y_1, \dots, y_n) \dots\dots\dots(62)$$

により、システムの冗長さの程度が表わされるものと考ええる。

5. システムの信頼性の算定

1種類の構造物からシステムが構成されている場合、システムの信頼性 sP は、式 (4)、(36) より構造物の強度の関数 $A_X(x)$ とシステムの形状の確率密度関数 $f(y)$ とを用いて次のように表わされる。

$$sP = \sum_{x=0}^m A_X(x) \sum_{y=0}^x f(y) \dots\dots\dots(63)$$

ところが、式 (33)、(34) より

$$f(y) = 0 \quad (y \leq -1) \dots\dots\dots(64)$$

であり、また定義より明らかに、

$$\begin{aligned} A_X(x) &= \text{prob}(A_x) = 0 \\ &(x \leq -1 \text{ または } x \geq m+1) \dots\dots\dots(65) \end{aligned}$$

であることから、この値は x が y 以上である確率を示していることになり、

$$sP = \text{prob}(x-y \geq 0) \dots\dots\dots(66)$$

ここで、式 (11)、(23)、(56) で表わされる x および y の平均値 \bar{x} 、 \bar{y} を用いてシステムの中央安全率 α を

$$\alpha = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \dots\dots\dots(67)$$

で定義する。式 (11) で $q = \bar{q}$ とおいた式または式 (23) を式 (67) に代入するとともに次式で表わされ、

$$\alpha = \frac{\bar{q}}{\bar{y}/m} \dots\dots\dots(68)$$

各構造物の信頼性が一定値 \bar{q} の場合にも、また平均値 \bar{q} のまわりに分布する場合にも、システムの中央安全率 α は同一であることがわかる。式 (68) の分母は、各構造物の破壊が独立である場合に、システムが安全であるために安全である必要がある構造物の数の下限の平均値 \bar{y} が、構造物の総数 m に対する割合を示しており、この割合に対する各構造物の信頼性の平均値 \bar{q} がシステムの中央安全率 α となっている。

構造物の強度の関数 $A_X(x)$ が式 (10) で、また、システムの形状の確率密度関数 $f(y)$ が次式

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}\right) \dots\dots\dots (69)$$

とともに正規分布と近似できる場合には、システムの信頼性 sP はより簡単に求めることができる。つまり、

$$z = x - y \dots\dots\dots (70)$$

とおくと、 z は平均値 \bar{z} 、分散 σ_z^2

$$\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} \dots\dots\dots (71)$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \dots\dots\dots (72)$$

の正規分布をする。ところが、システムが安全な確率 sP は、式 (66), (70) より、 z の確率密度関数 $f_z(z)$ を $z \geq 0$ の領域で積分した値である。つまり、

$$\begin{aligned} sP &\doteq \sum_{z=0}^{\infty} f_z(z) \\ &\doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2}\right) dz \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{\bar{z}}{\sigma_z}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}\right) \dots\dots\dots (73) \end{aligned}$$

ただし、

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \dots\dots\dots (74)$$

である。ここで、安全性指標 α^* を

$$\alpha^* = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}} \dots\dots\dots (75)$$

と定義すると、

$$sP = 1 - \Phi(-\alpha^*) \dots\dots\dots (76)$$

が成立しており、安全性指標 α^* が大きいほど、システムは安全であることがわかる。以上に示した関係は、構造系の信頼性解析において、 x を構造物の強度、 y を構造物に生じる応力、 sP を構造物の信頼性、 α を構造物の中央安全率、 α^* を構造物の安全性指標と考えた場合に成立する式と類似している。

式 (75) に式 (23), (24) を代入することにより、各構造物の信頼性 q が分布している場合のシステムの安全性指標が次式のように表わされる。

$$\alpha^* = \frac{m\bar{q} - \bar{y}}{\sqrt{m\bar{q}(1-\bar{q}) + m(m-1)\sigma_q^2 + \sigma_y^2}} \dots\dots\dots (77)$$

また、各構造物の信頼性が一定値の場合には、式 (77) で $\sigma_q^2 = 0$ の場合となっている。この式より、各構造物の破壊が独立である場合に、システムが安全であるために安全である必要がある構造物の個数の下限の平均値 \bar{y} に比較し、荷重外力により破壊しない構造物の期待数 $m\bar{q}$ が大きいほど、システムの信頼性が大きいことがわかる。この結果は式 (68) のシステムの中央安全率が意味する結果と同じである。また、次の場合、

$$m\bar{q} = \bar{y} \dots\dots\dots (78)$$

つまり、式 (68) よりシステムの中央安全率 $\alpha = 1$ の場合におけるシステムの信頼性 sP は式 (77), (76) より

0.5 であり、この場合を境に以下の2つの領域に分けて次のように考察できる。

$$m\bar{q} > \bar{y} \dots\dots\dots (79)$$

の範囲、つまり

$$sP > 0.5 \dots\dots\dots (80)$$

の範囲では、各構造物の信頼性の分散 σ_q^2 、または各構造物の破壊が独立である場合に、システムが安全であるために安全である必要がある構造物の個数の下限の分散 σ_y^2 が小さいほど、システムの信頼性は大きくなることがわかる。一方、

$$m\bar{q} < \bar{y} \dots\dots\dots (81)$$

つまり、

$$sP < 0.5 \dots\dots\dots (82)$$

の範囲では、 σ_q^2 、 σ_y^2 が大きいほど、システムの信頼性は大きくなることがわかる。

複数種類の構造物からシステムが構成されている場合、システムの信頼性は式 (8), (40) より次のように表わされる。

$$\begin{aligned} sP &= \sum_{x_1=0}^{m_1} \dots \sum_{x_n=0}^{m_n} A_{x_1 \dots x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad \cdot \sum_{y_1=0}^{x_1} \dots \sum_{y_n=0}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n) \dots\dots\dots (83) \end{aligned}$$

ところが、この値は式 (66) の場合と同様に、

$$sP = \text{prob}\left(\bigcap_{i=1}^n x_i - y_i \geq 0\right) \dots\dots\dots (84)$$

である。ここで、構造物の強度の関数が式 (15) で、システムの形状の確率密度関数 $f(y_1, \dots, y_n)$ が次式で、ともに多次元正規分布と近似できると仮定する。

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_n) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma_y|}} \\ &\quad \cdot \exp\left[-(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}}) \Sigma_y^{-1} (\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})^T / 2\right] \dots\dots\dots (85) \end{aligned}$$

ただし、

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \dots\dots\dots (86)$$

であり、 $\bar{\mathbf{y}}$ 、 Σ_y はそれぞれ式 (59), (61) で表わされるものとする。多次元正規分布の平均および分散の再生性より、

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \dots\dots\dots (87)$$

の確率密度関数は多次元正規分布、

$$\begin{aligned} f_z(z_1, \dots, z_n) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma_z|}} \exp\left[-(z-\bar{z}) \right. \\ &\quad \left. \cdot \Sigma_z^{-1} (z-\bar{z})^T / 2\right] \dots\dots\dots (88) \end{aligned}$$

ただし、

$$\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} \dots\dots\dots (89)$$

$$\Sigma_z = \Sigma_x \cdot \Sigma_y \dots\dots\dots (90)$$

で表わされ、したがって、システムの信頼性は、

$$\begin{aligned} sP &= \sum_{z_1=0}^{m_1} \dots \sum_{z_n=0}^{m_n} f_z(z_1, \dots, z_n) \\ &\doteq \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma_z|}} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \exp\left[-(z-\bar{z}) \right. \end{aligned}$$

$$\cdot \sum z^{-1}(z-\bar{z})^T / 2] dz_1 \cdots dz_n \cdots \cdots (91)$$

で求められる。

6. 数値計算例

前章まで、少数種類の構造物から構成されるシステムの解析方法を展開した。本章では、この方法を簡単なモデルに例として適用し、具体的に数値計算を行い、得られた結果について考察を加えた。

ネットワークシステムのモデルとして、節点とリンクの2種類の構造物から構成されている Fig. 3 に示す2つのシステム A, B を考える。システム A はトリー状であり、システム B はループを形成している。また、節点の総数は両システムともに 12 個であり、リンクの総数はそれぞれ 11 個および 17 個である。

システムは安全または破壊の必ずいずれか一方の状態にあると仮定し、システムが安全であるための必要十分条件として以下に示す3つの基準を考える。

① すべての節点が安全なリンクを介して連結しており、かつ、節点構造物がすべて安全である。

② 節点ペアの総数のうち一定割合以上の節点ペアが安全なリンク、および節点を介して連結している。本例では 66 個の全節点ペアのうち、約 80% に相当する 53 個以上の節点ペアが連結している場合にシステムは安全であるという基準を設けた。

③ システム内に含まれる2つの節点（供給節点と需要節点）が安全なリンクおよび節点を介して連結している。本例では節点 a と b (Fig. 3 参照) をそれぞれ供給節点および需要節点とした。

まず、節点構造物の信頼性は1である、つまり、1種類の破壊するリンク構造物からシステムが構成されていると考えた。リンク構造物の信頼性を一定値 (0.5, 0.9, 0.99) と仮定して、構造物の強度の関数を式 (9) を用いて計算し、その結果をシステム A, B それぞれに対し Fig. 4, 5 に示した。また、これらの分布の平均値および分散を式 (11), (12) を用いて計算した。一方、システムの形状の確率密度関数 $f(y)$ をシステム A, B それぞれに対し求めた結果を Fig. 6, 7 に、システムが安全であるための基準 ①, ②, ③ それぞれに対し、実線、一点鎖線、破線を用いて示してある。ただし、システム A の基準 ① と ② に対しては、すべての順列組合せを考慮して求めた厳密解を示し、基準 ③ に対しては、厳密解と 100 回のシミュレーションによる近似解との両方を示してある。一方、システム B の基準 ①, ②, ③ に対しては、100 回のシミュレーションによる近似解を示してある。Fig. 6, 7 より、システムの形状の確率密度関数は、トリー状のシステム A では単調増加関数

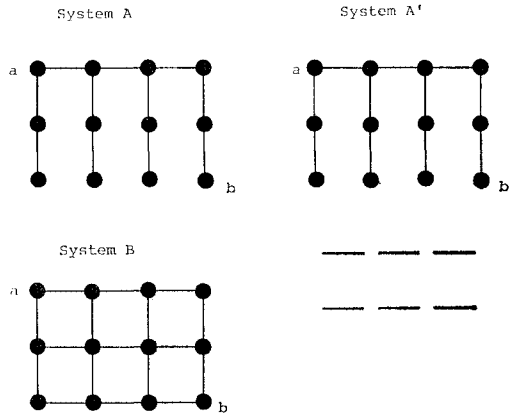


Fig. 3 Network Systems.

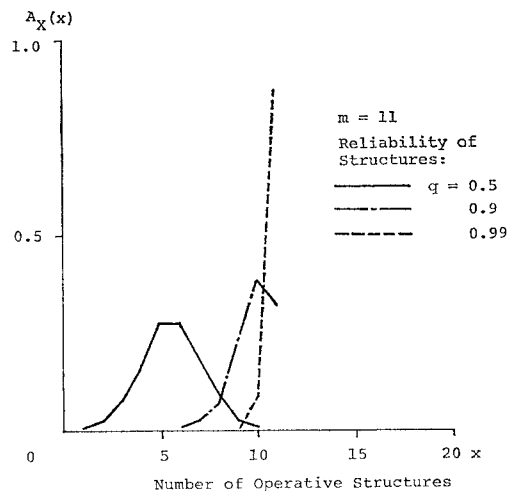


Fig. 4 Density Function Representing Structural Strength.

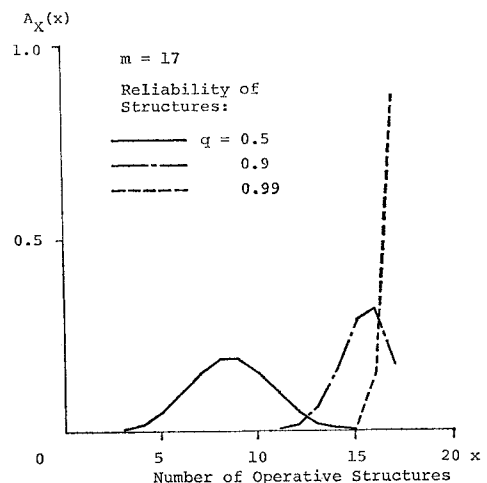


Fig. 5 Density Function Representing Structural Strength.

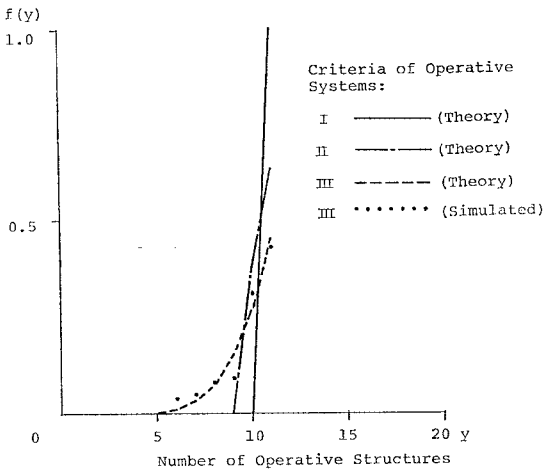


Fig. 6 Density Function Representing Redundancy due to Configuration of System A.

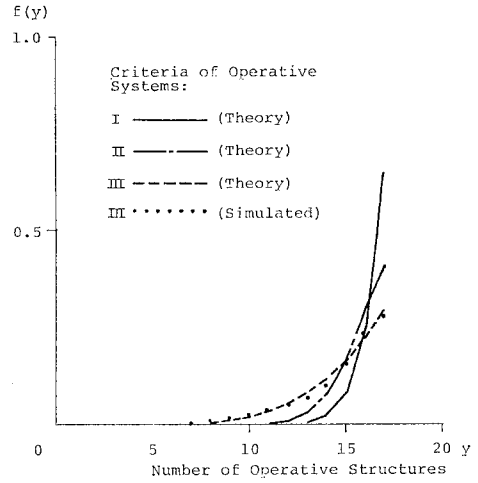


Fig. 8 Density Function Representing Redundancy due to Configuration of System A'.

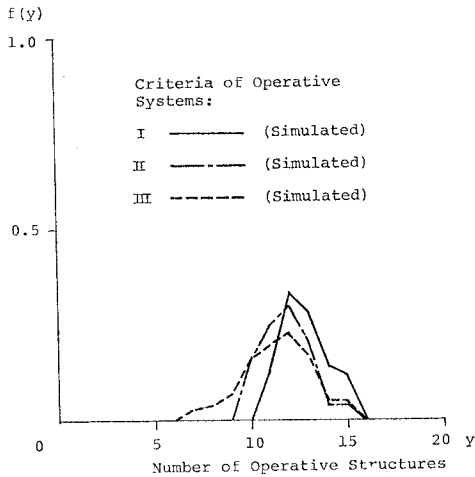


Fig. 7 Density Function Representing Redundancy due to Configuration of System B.

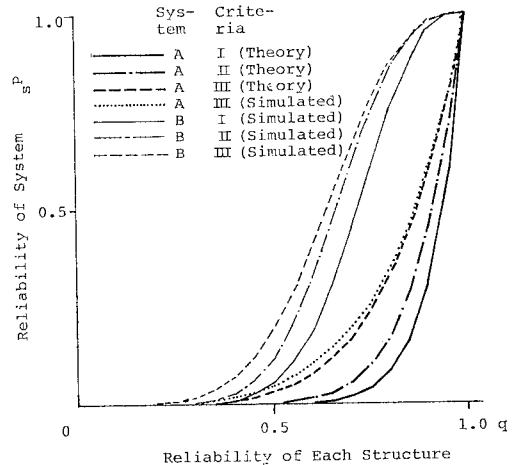


Fig. 9 Relationship between Reliability of System and That of Each Structure.

であるが、ループを形成するシステムBでは極大値を有する関数であることがわかり、この結果は、Fig. 1, 2の Tie-set が1つまたは複数個存在する場合の結果と類似している。これらの関数を比較することにより、荷重外力の大きさに関係なくシステムの信頼性を直接比較することが可能である。Fig. 6, 7 いずれにおいても、基準 ㉑, ㉒, ㉓ の順序に分布が左に寄っていることから、同一システム内においては、㉑ よりも ㉒, そしてさらに ㉓ の基準に対する信頼性が大きいことがわかる。さらに、システムAとBとの信頼性を直接比較するため、システムAにシステムの信頼性に無関係な構造物を6個追加したシステム A' (Fig. 3 参照)を想定し、システムAの形状の確率密度関数に式 (52)を漸化式として順次適用し、システム A' に対する関数を求め、これを Fig. 8 に示してある。Fig. 7, 8 を比較すると、シ

テムAの最も大きな信頼性を与える基準 ㉓ よりも、システムBの最も小さな信頼性を与える基準 ㉑ に対する関数の方が、左に寄って分布しており、後者の基準に対する信頼性が大きいことが認められる。実際、システムの信頼性は構造物の強度の関数 (Fig. 4, 5) とシステムの形状の確率密度関数 (Fig. 6~8) とを用いて、式 (63) により、見通しよく算定できる。得られた結果を Fig. 9 に、横軸には構造物の信頼性 q をとり、縦軸にはシステムの信頼性 P_s をとって、システムの種類および安全性の基準をパラメーターとして示してある。前述した結果と同じく、システムの信頼性はシステムBの ㉓, ㉒, ㉑ 続いてシステムAの ㉓, ㉒, ㉑ の順序に高いことが認められる。さらに計算を簡略化するため、式 (11), (12) により求められる構造物の強度の関数の平均値および分散と、Fig. 10 上方に示したシステムの

形状の確率密度関数の平均値 \bar{y} および分散 σ_y^2 とを、式 (75) に代入してシステムの安全性指標を求め、さらに、式 (76) によりシステムの信頼性を算定した。この値を縦軸にとり、横軸に構造物の信頼性 q をとって、システムの種類、および安全性の基準をパラメータとして、Fig. 10 にこれらの関係を示してある。Fig. 10 の結果は Fig. 9 の結果をよく近似しているものと考えられる。

次に、システム A, B の節点、リンクともに破壊し得る、つまり、2種類の構造物からシステムが構成されていると仮定して解析を行った。構造物の強度の関数を式 (14) を用いて求め、その一例を Table 1 に示してある。ここでは、システム B を対象とし、節点およびリンク構造物の信頼性をそれぞれ一定値 (0.9, 0.8) と仮定して計算を行った結果を示してある。一方、システムの

	Sys-tem	Crite-ri- on	Techni- que	Mean Value \bar{y}	Cova- riance σ_y^2
—————	A	I	Theory	11.00	0.00
—————	A	II	Theory	10.64	0.23
—————	A	III	Theory	10.00	1.42
-----	A	III	Simulated	9.87	1.91
-----	B	I	Simulated	12.79	1.43
-----	B	II	Simulated	11.84	1.60
-----	B	III	Simulated	11.38	3.29

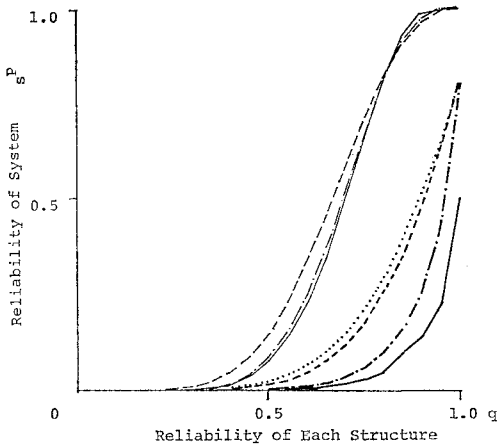


Fig. 10 Relationship between Reliability of Each Structure and That of System Calculated by Use of Safety Factor.

Table 1 Density Function Representing Structural Strength.

	Number of Operative Node Structures x_2	Number of Operative Node Structures x_2						
		6	7	8	9	10	11	12
Number of Operative Link Structures x_1	4						1	
	5				1	2	4	3
	6			1	3	9	15	11
	7			2	9	26	42	31
	8		1	5	19	51	83	63
	9		1	6	25	68	111	83
	10		1	5	20	54	89	67
	11			2	7	20	32	24

($\times 10^{-8}$)

形状の確率密度関数を、システム A, B それぞれと、安全性の基準 ①, ②, ③ それぞれとの組合せに対して求めた。安全性の基準が ① の場合には、すべての節点が安全である場合にのみ、システムが安全であり得るため、この関数は1種類の構造物からシステムが構成されている場合の結果 (Fig. 6, 7 の ①) と同一である。安全性の基準 ② に対するシステム A の形状の確率密度関数を Table 2 に、システム B の関数を Table 3 に示す。また、安全性の基準 ③ に対するシステム A の関数を Table 4 に、システム B の関数を Table 5 に示

Table 2 Density Function Representing Redundancy due to Configuration of System A and Criterion II.

	Number of Operative Node Structures y_2	Number of Operative Node Structures y_2						
		6	7	8	9	10	11	12
Number of Operative Link Structures y_1	4							
	5							
	6							
	7							
	8							
	9							
	10							
	11						30	334
							303	333

($\times 10^{-8}$)

Table 3 Density Function Representing Redundancy due to Configuration of System B and Criterion II.

	Number of Operative Node Structures y_2	Number of Operative Node Structures y_2						
		6	7	8	9	10	11	12
Number of Operative Link Structures y_1	7							
	8							
	9							
	10						2	12
	11						10	39
	12						18	- 1
	13						27	-10
	14						23	-21
	15						7	- 6
	16						9	- 9
	17						4	- 4

($\times 10^{-8}$)

Table 4 Density Function Representing Redundancy due to Configuration of System A and Criterion III.

	Number of Operative Node Structures y_2	Number of Operative Node Structures y_2						
		6	7	8	9	10	11	12
Number of Operative Link Structures y_1	4							
	5						1	1
	6					1	2	6
	7			1	2	4	10	15
	8		1	2	4	11	20	38
	9		1	3	10	20	41	77
	10		1	1	7	16	37	75
	11		1	1	7	16	37	75
			4	9	28	62	124	228

($\times 10^{-8}$)

す。ただし、システムAに関しては厳密解を、システムBに関しては100回のシミュレーションによる結果を示してある。Table 2より、システムAが基準⑩に対して安全であるためには、節点リンクとも1つまでの破壊が許されること、しかし、双方とも破壊した場合にはシステムの安全確率は小さい(3%)ことが認められる。これに対し、Table 3よりシステムBが同基準⑩に対して安全であるためには、節点は1つまで、リンクは7つまでの破壊が許されることがわかる。次に、Table 4より、システムAが基準⑩に対して安全であるためには、節点リンクともそれぞれ最高6個の破壊が許されること、しかし、ともにその上限近くまで破壊した場合には、システムは破壊していることがわかる。また、Table 5より、システムBが基準⑩に対して安全であるためには、100回のシミュレーションの結果では、節点で最高5個の破壊まで、リンクで最高10個の破壊までが許されることが示されている。しかし、この場合

も、ともに上限近くまで破壊した場合にはシステムは破壊していることがわかる。システムの信頼性は、前と同様に構造物の強度の関数とシステムの形状の確率密度関数とを用いて、式(83)により算定できる。Table 6にその結果の一例として、安全性の基準⑩に対するシステムBの信頼性を示してある。

7. 結 論

(1) ライフラインシステムの多くは少数個の種類 of 構造物が多数個集まり、システムを構成し機能していることに注目して、システムの信頼性を各種類の構造物の信頼性の影響を表わす関数と、システムの形状をネットワーク状にすることの影響を表わす関数との2つの関数で表わす方法を展開した。

(2) 前者の関数は荷重外力の確率密度関数と構造物の強度の確率密度関数とから求められる各種類の構造物の信頼性を用いて算定される関数である。この関数は、各種構造物の信頼性が一定値であるとみなせる場合には二項分布関数で表わされ、また、信頼性が平均値のまわりに分布する場合には、一定値である場合に比べ、平均値は等しいが分散が大きな関数で表わされる。

(3) 一方、後者のシステムの形状の影響を表わす関数は、荷重外力の大きさにはよらず、システムの形状と安全性の基準とのみによるシステムに固有な関数である。この関数の算定方法を、すべての順列組合せを考える方法、モンテカルロ法による方法、Tie-set または Cut-set を用いる方法の4つの方法について示した。さらに、簡単なシステムについてこの関数の性質を調べ、トリー状のシステムではこの確率密度関数は単調増加関数となること、また、ループ状のシステムでは極大値を

Table 5 Density Function Representing Redundancy due to Configuration of System B and Criterion III.

		Number of Operative Node Structures y_2						
		6	7	8	9	10	11	12
Number of Operative Link Structures y_1	7						2	
	8							1
	9				1		5	5
	10				2	4	4	9
	11				1	2	5	13
	12				2	2	7	1
	13		1	1	4	6	4	5
	14			1	-1	9	-2	2
	15			3	4	-4	3	3
	16			3	1	8	-5	-6
	17			2		8	-4	-6

($\times 10^{-8}$)

Table 6 Relationship between Reliability of Each Structure and That of System B for Criterion III.

		Reliability of Node Structures q_2																
		0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0								
Reliability of Link Structures q_1	0.2								1	1	1							
	0.3						1	1	2	3	5	7	10	13				
	0.4					1	1	2	4	6	10	16	23	34	48	63		
	0.5					1	2	4	7	12	20	31	48	71	101	140	187	
	0.6				1	1	3	6	11	19	31	49	74	108	154	212	282	
	0.7			1	1	3	7	13	24	40	64	99	147	210	291	393	517	
	0.8			1	2	5	10	19	33	54	86	131	191	270	370	493	640	
	0.9			1	2	4	9	18	33	56	91	139	204	289	395	525	677	854
	1.0			1	3	6	12	24	42	71	112	169	243	338	455	592	750	928
				1	3	8	16	30	52	86	134	199	283	386	509	649	805	974
			1	4	9	19	36	62	101	156	229	321	432	559	698	844	995	
			2	4	10	22	41	71	115	177	258	358	476	606	742	874	1000	

($\times 10^{-8}$)

有する関数となる場合があることを示した。

(4) 以上求めた2つの関数を用いてシステムの信頼性を簡単に見通しよく算定する方法を展開した。さらに、この2つの関数が正規分布関数であると仮定できる場合には、より簡単にシステムの信頼性が算定できることを示し、特に1種類の構造物からシステムが構成されている場合に対し、前記の2つの関数の平均値および分散を用いたシステムの安全性指標を提案した。さらに、簡単なシステムに対し実際に数値計算を行い、以上の方法が実用的であることを示した。システムの形状および各構造物の信頼性が決定された1つの場合についてシステムの耐震性を検討するためには、従来のシミュレーションを用いた方法が適していると考えられるのに対し、本方法は、システムの形状および各種構造物の信頼性をさまざまに変化させて設定した多くの場合について、システムの耐震性を簡単に見通しよく比較検討するために適した方法を与えるものとする。

参考文献

- 1) たとえば、岡本舜三：耐震工学，オーム社，1971。
- 2) 久保慶三郎：埋設管の地震時挙動，生産研究，25巻2号，1973。

- 3) Panoussis, G. : Seismic reliability of lifeline networks, Seismic Design Decision Analysis-Report No. 15, MIT, Dept. of Civil Eng. Res. Rep. R 74-57, 1974.
- 4) Taleb-Agha, G. : Seismic risk analysis of networks, Seismic Design Decision Analysis-Report No. 22, MIT, Dept. of Civil Eng. Res. Rep. R 75-49, 1975.
- 5) Shinozuka, M., S. Takada and H. Kawakami : Risk analysis of underground lifeline network systems, US-South East Asia Symposium on Engineering for Natural Hazards Protection, Manilla, Philippines, Sept., 1977.
- 6) 柴田 碧・土屋雅彦：ライフラインの耐震性に関するシステム工学的研究，東大機械工学研究報告，第13巻，1978。
- 7) 田村重四郎・川上英二：ライフラインのネットワークシステムの耐震性の一評価方法について，生産研究，30巻7号，1978。
- 8) 川上英二・田村重四郎：上水道管網システムの機能上の耐震性の評価方法について，土木学会第34回年次学術講演会講演概要集，1979。
- 9) 田村重四郎・川上英二：モンテカルロ法による地中埋設管システムの耐震性の評価方法，土木学会論文報告集，第311号，1981。
- 10) 伯野元彦・斉藤嘉則：ライフ・ラインの耐震性に影響する因子，第15回地震工学研究発表会講演概要，1979。
- 11) Tainiter, M. : A new deterministic network reliability measure, Networks, 6, 1976.

(1980.3.17・受付)