

ライフラインの地震災害における復旧予測モデル

RESTORATION PROCESS OF SEISMIC DAMAGE IN LIFE LINE SYSTEMS

星 谷 勝*・小 池 精 一**

By Masaru HOSHIYA and Seiichi KOIKE

1. ま え が き

1971年のサンフェルナンド地震と1978年の宮城県沖地震では、道路・上下水道・ガス・電気・電話等のライフライン（都市供給施設）が多大の被害を受け、都市生活の基幹を構成するこれらのシステムの重要性が再認識された。構造を機能からみた場合、橋や建築物は単独でもその機能を考えることができるので単体構造系といえようが、ライフラインは単体構造を要素としていくつかが集まってシステムを構成し、その機能を発揮するものであるから地震時にシステム全体としていかに機能を保持させるかが都市防災上重要な課題となる。

さて、ライフラインの研究を振り返ってみると、まず震害報告書では、その性質上個々の構造物に関するものが多く、その内容も定性的で単なる被害例の列挙で終わっているものが大部分で、システム全体としての観点から調査は行われていない。また、地震後の復旧に関しては数えるほどしか報告されていない^{1),2)}。一方、地震時の予測問題では、地震発生時点までを対象として、統計または確率論的手法を用いた個々のライフラインの信頼性や被害予測が数多く行われ検討されている^{3)~5)}。しかし、その機能をいち早く回復しなければならない都市にとって重要である復旧・救援過程の研究はほとんど行われていない。ライフラインの重要性が指摘されているが、地震時の被害予測を行い適切な対策を事前に立てることが重要ではあるが、地震後のライフラインの復旧の予測まで含んで初めて事前の補強対策費用の算定等の合理的な対策が可能になると思われる。なぜならば、たとえば1つの要素である単体の橋を考えた場合、復旧が簡単ならばいっさい補強せず被害が生じたあとで補強する方が事前に強化するよりも得策かもしれない。そうでな

いならばいったいどの程度まで補強したら最良の策かということになる。この問題の解決には、システムの特性（種類・構成・機能等）を十分に表現する評価基準を用いて耐震性の評価がなされ^{6),7)}、それに基づいて地震直後から復旧までに失う総費用を予測し、事前投資額との得失の検討をする必要がある。そのためにも従来あまり取り組まれていなかった復旧過程の予測手法を確立することは意味があると思われる。

そこで本研究は、このような目的からライフラインの地震後の復旧に注目して、マルコフ過程を基礎として復旧過程の予測理論を誘導するものである。さらに、誘導された復旧予測モデルを用いて、事前投資、破壊による損失および復旧までの機能停止による損失を考えた総費用の最適化問題にふれ、最適事前補強費の算定の一方法について検討するものである。

2. 復旧過程の特性

ライフラインの復旧過程は、システムを構成する個々の要素の構造の被害量が復旧作業の開始によって変化していく過程としてとらえていく場合と、システムの機能の回復過程としてとらえていく場合とでは両者の間に本質的な相違がある。なぜならば、システムが構造的に100%復旧すれば機能的にみても100%回復したことになるが、その復旧途中を考えてみれば単に構造的にある程度復旧したからといって機能が回復しているとは限らないからである。たとえば、下水道・埋設管系が対象地域にわたって微小な破損を受けた場合を想定すれば、被害の総額はかなりの量となったとしても機能の低下は無視できる範囲であり、平常時の機能を維持できると判断されることもあろう。一般に、ライフラインはその種類、システムの構成、あるいは復旧計画の手順等によって機能回復の過程は強く影響されるものと思われる。したがって、システム全体の機能回復の復旧過程を $A(t)$

* 正会員 Ph.D 武蔵工業大学教授 土木工学科

** 学生会員 武蔵工業大学大学院修士課程（現在・茨城県）

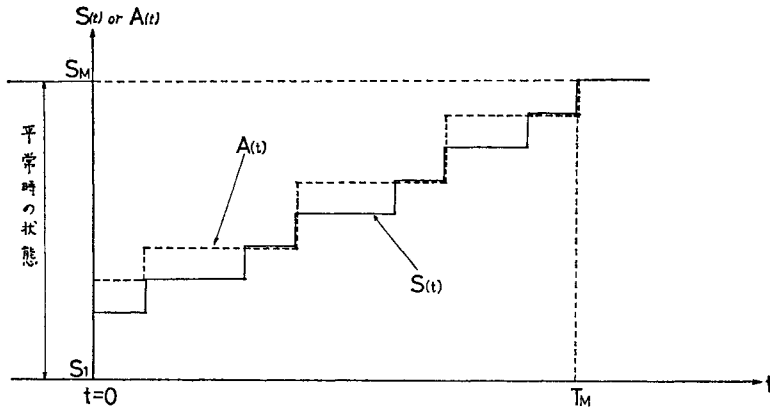


図-1 $S(t)$, $A(t)$ の復旧曲線

とし、純粋に構造被害からとらえた復旧過程を $S(t)$ とすれば、 $A(t)$ と $S(t)$ は一般には非線形の関数関係で結ばれて両者は等しくはならない。

いま、両者の関係を明確にするために図-1に $A(t)$ と $S(t)$ の1組のサンプルを示してみる。両者は地震発生時点の $t=0$ においても、また復旧の途中経過においても一般には一致しない。しかし、最終的に復旧が完了する時刻 T_M は、新しい長期復旧計画等の特別な計画が策定されない限りにおいては一致するはずである。1978年の宮城県沖地震では、仮設配管による給水対策を施し断水解消に努め機能的復旧は10日あまりで復旧したとされている。しかし、これには応急復旧も含まれており機能的にみた場合の恒久復旧とは本質的に異なると考えられ、構造的にみた場合の復旧完了時を機能的な恒久復旧と考える方が妥当であると思われる。この点に

関しては、さらに事例研究を通し検討を行うつもりである。

前にも述べたように、都市生活の大部分がライフラインに強く依存していることが認識された以上、地震災害時にライフラインの機能をいち早く復旧しなければならない。すなわち、今後われわれにとって必要なのは復旧完了時間 T_M に関する予測である。さらにその間に失われる損失額の推定と、これらを考慮して初めて可能となる事前の耐震強化対策であり、 $A(t)$ と $S(t)$ の復旧時刻

T_M が一致することから、本研究では構造被害の復旧に注目して $S(t)$ の予測理論を誘導することとする。

いま、 N 個の要素から構成されるライフラインを考えてみることにする。個々の要素の時刻 t における構造的にみた状態を $iS(t)$; $i=1, 2, \dots, N$ とし、その m 番目要素 $mS(t)$ に着目してみる。この状態は時間の関数で与えられるが、そのとり得る値は平常時の状態を維持しているときに S_M 、完全に破壊したときに S_1 とする。そして、その間を等分した合計 M 個の離散値 S_1, S_2, \dots, S_M をとるものとする。 S_j ; $j=1, 2, \dots, M$ に具体的な数値をあてはめるならば、たとえば平常時の S_M に100なる数値を与えて平常状態に対して100%の状態、すなわち、平常状態であると考えればよい。したがって、完全破壊の状態 S_1 は0なる数値が与えられる。中間状態には、それぞれに対応する数値が与えられ

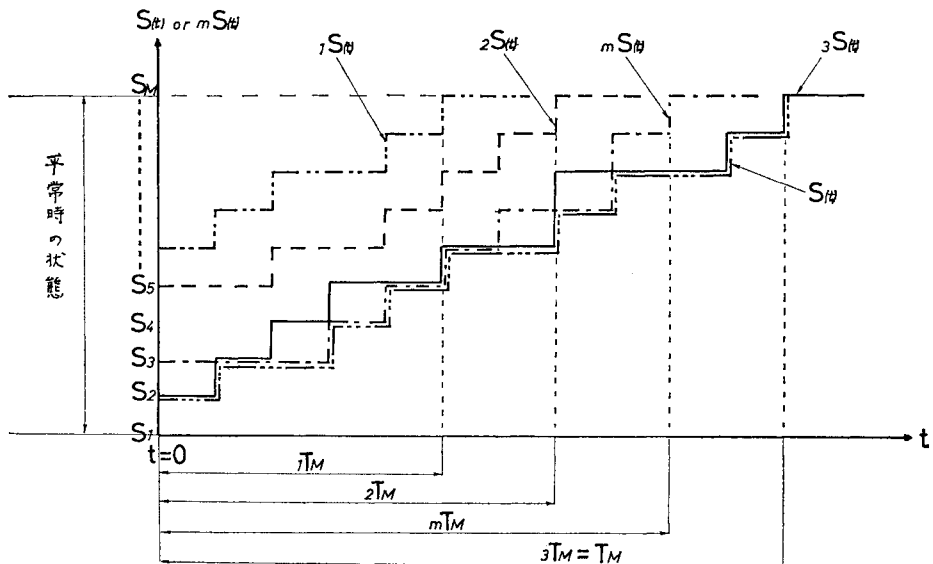


図-2 $S(t)$, $mS(t)$ の復旧曲線

る。

次に、実際に地震が発生し、この要素が破壊を受けたとき、その状態はどのような時間経過をたどって復旧するかを予想してみれば 図-2 に示す $mS(t)$ の曲線が得られる。これは平常時の状態にあったものが地震発生時 ($t=0$) の被害により S_0 の状態に低下し、以後、復旧活動の開始とともに上昇し、復旧完了時点 ($t=mT_M$) で地震前の状態 S_M に戻ったことを示すものである。システムは N 個の要素からなるので、同図には他の要素の状態の変化を示す曲線も同時に示してある。復旧活動は必ずしも各要素に対して同一歩調で行われないから、一般には異なる曲線となろう。実際には、 $t=0$ における初期状態は確率に支配されて決まるものであるから、この曲線で示される $iS(t)$; $i=1, 2, \dots, N$ は時間 t を独立変数とした確率過程群と考えられる。したがって、同図の曲線群は 1 組のサンプル関数を示したものである。また、時刻 t における状態 $iS(t)$ は、その直前の時間における状態に從属するが、それまでにどのような経過をたどったかには独立とみなすことができるので本質的にはマルコフ連鎖として表わすことができよう。

さて、システム全体を考えると、システム全体の構造的にみた復旧の状態をどうとらえたらよいかであるが、この研究では、後章で述べるがすべての要素が復旧したときにシステム全体としての状態が回復したものと考えることにする。そして、復旧途中におけるシステム全体の状態は、最も復旧が遅れている要素の状態で評価するものとする。したがって、システム全体の状態を $S(t)$ とすれば、

$$S(t) = \min\{_1S(t), _2S(t), _3S(t), \dots, _NS(t)\} \dots\dots\dots (1)$$

と定義することができる。図-2 には $S(t)$ のサンプル関数も同時に示しておく。

本研究では、個々の要素の状態 $mS(t)$ およびシステム全体の状態 $S(t)$ に関する確率法則を誘導し、システムの復旧過程を理論的に組み立てることにする。

3. 要素の復旧過程 $mS(t)$

この章では N 個の要素からなるシステムの m 番目要素に着目して、その復旧過程を連続時間および離散時間のそれぞれの場合について理論を誘導する。

(1) 連続時間の場合

復旧過程において時刻 t から時刻 $t+dt$ の微小な時間変化 dt では、状態 $mS(t)$ は変化したとしてもただか 1 ステップであると考えられる。そして最後には状態 S_M に吸収されるので

m 番目要素の状態の推移図は 図-3 のように表わされる。

次に 図-3 の推移図をマトリックスで表わしてみる。 m 番目要素が時刻 t で状態 $mS(t)=S_i$; $i=1, 2, \dots, M$ にあるときの単位時間当りの復旧率を $m\nu_i(t)$ 、時間間隔 $[t, t+dt]$ の間に状態 $mS(t)=S_j$ から $mS(t+dt)=S_k$ へ遷移する条件付確率を $mP_{jk}(dt)$ とすれば、時刻 t における条件付遷移確率行列 $mP_t(dt)$ は、

$$mP_t(dt) = \begin{bmatrix} mP_{11}(dt) & mP_{12}(dt) & \dots\dots\dots & mP_{1M}(dt) \\ mP_{21}(dt) & mP_{22}(dt) & \dots\dots\dots & mP_{2M}(dt) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ mP_{M1}(dt) & mP_{M2}(dt) & \dots\dots\dots & mP_{MM}(dt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-m\nu_1(t)dt & m\nu_1(t)dt & & & \\ & 1-m\nu_2(t)dt & m\nu_2(t)dt & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1-m\nu_{M-1}(t)dt & m\nu_{M-1}(t)dt \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

となる。

また、 $mS(t)=S_i$ となる確率を $mP_i(t)$ とすれば、時刻 t における状態確率分布 $m\pi(t)$ は、

$$m\pi(t) = [mP_1(t), mP_2(t), \dots, mP_M(t)] \dots (3)$$

と表わされる。ただし、 $\sum_{j=1}^M mP_j(t) = 1$ 。 $m\pi(t)$ は $(1 \times M)$ の行列であり、その要素は時刻 t における各状態の生起確率である。

さて式 (3) の要素 $mP_j(t)$ を次の手順で誘導することとする。まず地震発生時 ($t=0$) に m 番目要素が状態 $mS(0)=S_1$ にあり、それから $t+dt$ 後に $mS(t+dt)=S_1$ に遷移する条件付確率を $mP_{11}(t+dt)$ とすれば、

$$mP_{11}(t+dt) \cong mP_{11}(t) \cdot mP_{11}(dt) \cong mP_{11}(t) \cdot \{1-m\nu_1(t)dt\}$$

整理して、

$$\frac{mP_{11}(t+dt) - mP_{11}(t)}{dt} \cong -m\nu_1(t) \cdot mP_{11}(t)$$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{mP_{11}(t+dt) - mP_{11}(t)}{dt} = mP_{11}'(t) = -m\nu_1(t) \cdot mP_{11}(t)$$

となる。これを解けば、

$$mP_{11}(t) = c \exp\left\{-\int_0^t m\nu_1(t) dt\right\} \quad (c \text{ は積分定数})$$

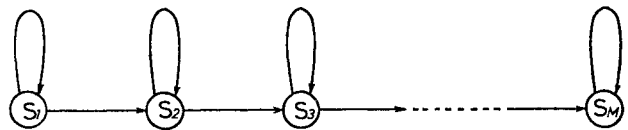


図-3 復旧状態の推移図

ところで、初期条件 $mP_{11}(0)=1$ から $c=1$ ゆえに、

$$mP_{11}(t) = \exp\left\{-\int_0^t m\nu_1(t) dt\right\} \dots\dots\dots (4)$$

次に $mP_{12}(t+dt)$ について同様に導いてみると、

$$\begin{aligned} mP_{12}(t+dt) &\cong mP_{11}(t) \cdot mP_{12}(dt) \\ &\quad + mP_{12}(t) \cdot mP_{22}(dt) \\ &\cong mP_{11}(t) \cdot m\nu_1(t) dt \\ &\quad + mP_{12}(t) \cdot \{1 - m\nu_2(t) dt\} \end{aligned}$$

整理して、

$$\begin{aligned} \frac{mP_{12}(t+dt) - mP_{12}(t)}{dt} &= -mP_{12}(t) \cdot m\nu_2(t) \\ &\quad + mP_{11}(t) \cdot m\nu_1(t) \\ \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{mP_{12}(t+dt) - mP_{12}(t)}{dt} &= mP_{12}'(t) \\ &= -m\nu_2(t) \cdot mP_{12}(t) + mP_{11}(t) \cdot m\nu_1(t) \end{aligned}$$

式 (4) を用いて、これを初期条件 $mP_{12}(0)=0$ で解くと、

$$\begin{aligned} mP_{12}(t) &= \exp\left\{-\int_0^t m\nu_2(t) dt\right\} \\ &\quad \cdot \left[\int_0^t m\nu_1(t_1) \exp\left\{\int_0^{t_1} (m\nu_2(t) - m\nu_1(t)) dt\right\} dt_1\right] \end{aligned}$$

同様に $mP_{1,M-1}(t)$ を求めると、

$$\begin{aligned} mP_{1,M-1}(t) &= \exp\left\{-\int_0^t m\nu_{M-1}(t) dt\right\} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{M-2}} \\ &\quad \cdot m\nu_{M-2}(t_{M-2}) \cdot m\nu_{M-3}(t_{M-3}) \dots m\nu_1(t_1) \\ &\quad \cdot \exp\left[\int_0^{t_{M-2}} \{m\nu_{M-1}(t) - m\nu_{M-2}(t)\} dt\right] \\ &\quad \cdot \exp\left[\int_0^{t_{M-3}} \{m\nu_{M-2}(t) - m\nu_{M-3}(t)\} dt\right] \dots \\ &\quad \cdot \exp\left[\int_0^{t_1} \{m\nu_2(t) - m\nu_1(t)\} dt\right] dt_{M-2} \dots dt_2 dt_1 \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

最後に $mP_{1M}(t)$ は、

$$\begin{aligned} mP_{1M}(t+dt) &\cong mP_{1,M-1}(t) \cdot mP_{M-1,M}(dt) \\ &\quad + mP_{1M}(t) \cdot mP_{MM}(dt) \end{aligned}$$

ところで、状態が S_M に到達した後はこの状態に定着するから、 $mP_{MM}(dt)=1$ となり、上式は、

$$\begin{aligned} mP_{1M}(t+dt) &\cong mP_{1,M-1}(t) \cdot m\nu_{M-1}(t) dt \\ &\quad + mP_{1M}(t) \end{aligned}$$

整理して、

$$\begin{aligned} \frac{mP_{1M}(t+dt) - mP_{1M}(t)}{dt} &= m\nu_{M-1}(t) \cdot mP_{1,M-1}(t) \\ \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{mP_{1M}(t+dt) - mP_{1M}(t)}{dt} &= mP_{1M}'(t) \\ &= m\nu_{M-1}(t) \cdot mP_{1,M-1}(t) \end{aligned}$$

初期条件 $mP_{1M}(0)=0$ より、

$$mP_{1M}(t) = \int_0^t m\nu_{M-1}(t) mP_{1,M-1}(t) dt$$

式 (5) を用いて、

$$\begin{aligned} mP_{1M}(t) &= \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{M-1}} \\ &\quad \cdot m\nu_{M-1}(t_{M-1}) m\nu_{M-2}(t_{M-2}) \dots m\nu_2(t_2) m\nu_1(t_1) \\ &\quad \cdot \exp\left\{\int_0^{t_{M-1}} m\nu_{M-1}(t) dt\right\} \\ &\quad \cdot \exp\left[\int_0^{t_{M-2}} \{m\nu_{M-1}(t) - m\nu_{M-2}(t)\} dt\right] \dots \\ &\quad \cdot \exp\left[\int_0^{t_1} \{m\nu_2(t) - m\nu_1(t)\} dt\right] \\ &\quad \cdot dt_{M-1} dt_{M-2} \dots dt_2 dt_1 \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

式 (6) で示されるように $mP_{1M}(t)$ について一般解を求めたが、 $mP_{2M}(t)$, $mP_{3M}(t)$, ..., $mP_{M-1,M}(t)$ についても同様にして求めることができる。これをマトリックスで書き表わせれば次のようになる。

$$m\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} mP_{11}(t), & mP_{12}(t), & \dots, & mP_{1M}(t) \\ & mP_{22}(t), & \dots, & mP_{2M}(t) \\ & & \dots & \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 1 \\ & & & \dots \end{bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

以上から、連続時間の場合の時刻 t の状態確率分布 $m\boldsymbol{\pi}(t)$ は、初期分布 $m\boldsymbol{\pi}(0)$ が与えられれば式 (7) を用いて次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{\pi}(t) &= [mP_1(t), mP_2(t), \dots, mP_M(t)] \\ &= m\boldsymbol{\pi}(0) \cdot m\mathbf{P}(t) \\ &= [mP_1(0), mP_2(0), \dots, mP_M(0)] \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} mP_{11}(t), & mP_{12}(t), & \dots, & mP_{1M}(t) \\ & mP_{22}(t), & \dots, & mP_{2M}(t) \\ & & \dots & \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 1 \\ & & & \dots \end{bmatrix} \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

ただし、初期分布 $m\boldsymbol{\pi}(0)$ の推定は「ライフラインの耐震信頼性の解析」のテーマであり、現在多くの研究^{3)~7)}がなされている。本論では、これらが与えられたとして式の展開を行う。

式 (8) から一般には、

$$mP_j(t) = \sum_{k=1}^j mP_k(0) mP_{kj}(t) \dots\dots\dots (9)$$

となる。

式 (9) はシステムの m 番目要素において、地震発生後に時間 t 経過したときの復旧状態 $mS(t)$ が S_j となる確率である。図-4 は $mP_1(t)$, $mP_2(t)$, ..., $mP_M(t)$ の1サンプルを描いたものである。システムの m 番目要素の完全復旧時間 mT_M は確率変数であり、 mT_M がある値 t 以下になる確率は見方をかえれば図-4 より、 t において $mS(t)=S_M$ となる確率と同値になる。ゆえに $\text{Prob}(mT_M \leq t) = mP_M(t)$ を得る。したがって $mP_M(t)$ は mT_M の確率分布関数と等しいから連続時間の場

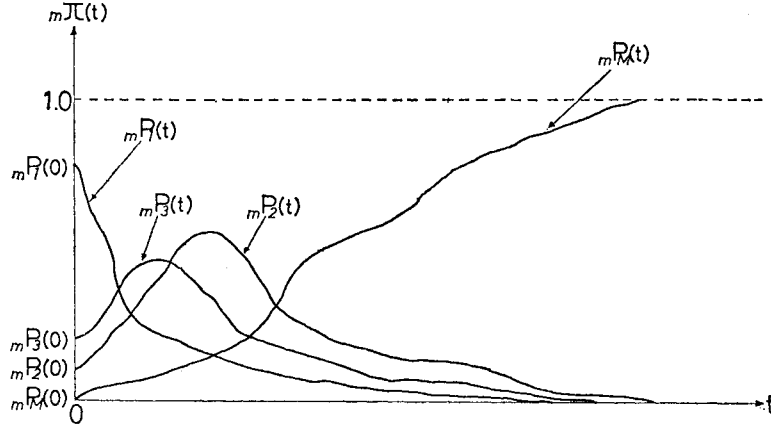


図-4 状態確率分布曲線

合の mT_M の確率密度関数 $f_{mT_M}(t)$ は,

$$f_{mT_M}(t) = \frac{d mP_M(t)}{dt} \quad \dots\dots\dots (10)$$

として与えられる. 同様にして 図-4 の内容を理解すれば次の重要な確率が求められる.

状態 $mS(t)$ が少なくとも状態 S_j またはそれ以上の状態となるまでの時間 mT_j は 確率変数であり, $\text{Prob}(mT_j \leq t) = \sum_{i=j}^M mP_i(t)$ となる. これより mT_j の 確率密度関数 $f_{mT_j}(t)$ は,

$$f_{mT_j}(t) = \sum_{i=j}^M \frac{d mP_i(t)}{dt} \quad \dots\dots\dots (11)$$

として与えられる. 式 (10) は式 (11) で $j=M$ とした特別の場合と考えればよい. また式 (9), (10) を用いれば特性値として次の諸量が計算できる.

$$E[mT_M] = \int_0^\infty t f_{mT_M}(t) dt \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$E[mT_M^2] = \int_0^\infty t^2 f_{mT_M}(t) dt \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\sigma_{mT_M}^2 = E[mT_M^2] - E[mT_M]^2 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$E[mS(t)] = \sum_{k=1}^M S_k \cdot mP_k(t) \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$E[mS^2(t)] = \sum_{k=1}^M S_k^2 \cdot mP_k(t) \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\sigma_{mS(t)}^2 = E[mS^2(t)] - E[mS(t)]^2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

(2) 離散時間の場合

連続時間の場合と同じ記号を用いて時間を $t=idt$ として式を誘導する.

式 (2) に対応して,

$$mP_i(dt) = \begin{bmatrix} 1 - m\nu_1(idt)dt, & m\nu_1(idt)dt & & & & \\ & 1 - m\nu_2(idt)dt, & m\nu_2(idt)dt & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 - m\nu_{M-1}(idt)dt, & m\nu_{M-1}(idt)dt \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(i=0, 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる. これより時間 idt のときの状態確率分布 $m\pi(idt)$ は, 初期分布 $m\pi(0)$ が与えられれば,

$$m\pi(idt) = m\pi(0) mP_0(dt)$$

$$m\pi(2dt) = m\pi(dt) mP_1(dt) = m\pi(0) mP_0(dt) mP_1(dt)$$

のように順次計算でき, 一般に,

$$m\pi(idt) = [mP_1(idt), mP_2(idt), \dots, mP_M(idt)] \\ = m\pi(0) mP_0(dt) mP_1(dt) mP_2(dt), \dots, \\ mP_{i-1}(dt) \quad \dots\dots\dots (19)$$

で求められる. 式 (19) は離散時間 idt のときの各状態の生起確率である.

次に 図-4 を離散時間の場合について考えてみる. システムの m 番目要素の完全復旧時間 mT_M は確率変数であり $\text{Prob}(mT_M \leq kdt) = mP_M(kdt)$ となる. これは連続型の場合と同様に mT_M の 確率分布関数となるから, 離散時間の場合の mT_M の 確率関数は,

$$p_{mT_M}(mT_M = kdt) = \text{Prob}(mT_M \leq kdt) \\ - \text{Prob}(mT_M \leq (k-1)dt) \\ = mP_M(kdt) - mP_M((k-1)dt) \\ (k=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots (20)$$

として与えられる. そして, 状態 $mS(kdt)$ が少なくとも S_j 以上となるまでの時間 mT_j は,

$$\text{Prob}(mT_j \leq kdt) = \sum_{i=j}^M mP_i(kdt) \quad \dots\dots\dots (21)$$

で与えられる. mT_j の 確率関数は

$$p_{mT_j}(mT_j = kdt) = \sum_{i=j}^M mP_i(kdt) \\ - \sum_{i=j}^M mP_i((k-1)dt) \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる. 式 (21), (22) で $j=M$ とすれば完全復旧の場合となる. また特性値として次の諸量が計算できる.

$$E[mT_M] = \sum_{k=1}^\infty (kdt) p_{mT_M}(mT_M = kdt) \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$E[mT_M^2] = \sum_{k=1}^{\infty} (k\Delta t)^2 p_{mT_M}(mT_M = k\Delta t) \dots (24)$$

$$\sigma_{mT_M}^2 = E[mT_M^2] - E[mT_M]^2 \dots (25)$$

$$E[mS(k\Delta t)] = \sum_{i=1}^M S_i \cdot mP_i(k\Delta t) \dots (26)$$

$$E[mS^2(k\Delta t)] = \sum_{i=1}^M S_i^2 \cdot mP_i(k\Delta t) \dots (27)$$

$$\sigma_{mS(k\Delta t)}^2 = E[mS^2(k\Delta t)] - E[mS(k\Delta t)]^2 \dots (28)$$

4. システム全体の復旧過程 $S(t)$

3. では N 個の要素からなるシステムの1つの要素に着目して、その復旧過程について理論を誘導した。ここでは、システム全体の時刻 t における復旧過程の基本式を誘導する。

システム全体の時刻 t における復旧状態をどのように定義するかは十分に議論し検討すべき問題である。なぜならば、対象として取り上げたシステムの種類（道路系、ガス管系、電信電話系等）、機能上からの特性の相違、システムの構成が直列か並列か等によってもシステム全体の復旧状態をどのように判断すればよいかは異なるからである。ここでは、2. で述べたようにシステム全体の復旧過程 $S(t)$ を次式で定義することとする。

$$S(t) = \min\{{}_1S(t), {}_2S(t), {}_3S(t), \dots, {}_NS(t)\} \dots (1)$$

すなわち、 N 個の要素からなるシステム全体の復旧状態 $S(t)$ は、最も遅れている要素の復旧状態に等しいとして表わすこととする。いいかえれば、任意の時刻 t におけるシステム全体の復旧状態が $S(t) = S_i$ とすれば各要素の復旧状態は少なくとも S_i 以上に復旧されていることを意味する。前にも述べたように、図-2 に $S(t)$ の1サンプル関数を示してある。このように式(1)は最も復旧の遅れている要素でシステム全体の構造の回復状態を表現するから、安全側の予測を採用したことになる。このほかに考えられる式として、各要素の平常時の構造的価格 $a_i; i=1, 2, \dots, N$ を用いてシステム全体の価格が平常時の価格に対して何% になっているかで $S(t)$ を表現することもできよう。この場合には、

$$S(t) = \frac{\sum_{i=1}^N a_i \cdot iS(t)}{\sum_{i=1}^N a_i} \dots (1)'$$

となろう。

あるいは、各要素の状態を考慮してシステム全体の状態を表現するならば、

$$S(t) = \frac{\sum_{i=1}^N iS(t)}{NS_M} \cdot S_M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N iS(t) \dots (1)''$$

となる。式(1)' と(1)'' は、 $a_i = a = \text{一定}$ とおけるとき

には一致する。

さて、本論では式(1)を採用して以下においては式(1)の $S(t)$ の予測式を誘導するものである。

システム全体の復旧過程 $S(t)$ の確率分布関数を $F_{S(t)}(S_i)$ とすれば、

$$F_{S(t)}(S_i) = \text{Prob}\{S(t) \leq S_i\} \dots (29)$$

となる。

式(29)を式(1)を用いて表わすと、

$$F_{S(t)}(S_i) = \text{Prob}[\min\{{}_1S(t), {}_2S(t), \dots, {}_NS(t)\} \leq S_i] \dots (30)$$

で与えられる。そこで式(30)の右辺は付録a)の式(A・1)を適用すれば次のように変形される。

$$\begin{aligned} F_{S(t)}(S_i) &= \text{Prob}[\{{}_1S(t) \leq S_i\} \cup \{{}_2S(t) \leq S_i\} \cup \dots \\ &\quad \cup \{{}_NS(t) \leq S_i\}] \\ &= 1 - \text{Prob}[\overline{\{{}_1S(t) \leq S_i\}} \cup \overline{\{{}_2S(t) \leq S_i\}} \cup \dots \\ &\quad \cup \overline{\{{}_NS(t) \leq S_i\}}] \\ &= 1 - \text{Prob}[\overline{\{{}_1S(t) \leq S_i\}} \cap \overline{\{{}_2S(t) \leq S_i\}} \cap \dots \\ &\quad \cap \overline{\{{}_NS(t) \leq S_i\}}] \\ &= 1 - \text{Prob}[\{{}_1S(t) > S_i\} \cap \{{}_2S(t) > S_i\} \cap \dots \\ &\quad \cap \{{}_NS(t) > S_i\}] \dots (31) \end{aligned}$$

式(31)において各要素 $jS(t)$ の同時確率関数が与えられるならば $S(t)$ の確率分布関数は計算することができる。しかし、各要素間の相関を組み込んだ同時確率関数を与えることは非常に難しい。そこで、式(31)について次の特別な場合の理論式を誘導することにする。

(1) $iS(t); i=1, 2, \dots, N$ が互いに独立の場合

$iS(t)$ が互いに独立ということは、システムの各要素の復旧状態が他の要素に影響されないという意味である。この場合式(31)は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} F_{S(t)}(S_i) &= 1 - \text{Prob}\{{}_1S(t) > S_i\} \\ &\quad \cdot \text{Prob}\{{}_2S(t) > S_i\} \cdot \dots \cdot \text{Prob}\{{}_NS(t) > S_i\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^N \text{Prob}\{iS(t) > S_i\} \dots (32) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^N [1 - \text{Prob}\{iS(t) \leq S_i\}] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^N \left\{ 1 - \sum_{k=1}^i P_k(t) \right\} \dots (33) \end{aligned}$$

ただし、 $iP_k(t)$ は 3. で定義したように $iP_k(t) = \text{Prob}\{iS(t) = S_k\}$ である。したがって、システム全体の復旧状態 $S(t)$ が S_i になる確率 $P_i(t)$ は、

$$\begin{aligned} P_i(t) &= \text{Prob}\{S(t) = S_i\} \\ &= F_{S(t)}(S_i) - F_{S(t)}(S_{i-1}) \end{aligned}$$

これを式(33)を用いて表わせば、

$$P_i(t) = \prod_{i=1}^N \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{i-1} iP_k(t) \right\}$$

$$-\prod_{i=1}^N \left\{ 1 - \sum_{k=1}^l i P_k(t) \right\} \dots\dots\dots (34)$$

となる。

もし、各要素の時刻 t における復旧状態の確率関数が同じであるならば、

$${}_1P_k(t) = {}_2P_k(t) = {}_3P_k(t) = \dots = {}_N P_k(t) = P_k^*(t) \dots\dots\dots (35)$$

とおけるから、式 (34) は次のように表わせる。

$$P_l(t) = \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{l-1} P_k^*(t) \right\}^N - \left\{ 1 - \sum_{k=1}^l P_k^*(t) \right\}^N \dots\dots\dots (36)$$

(2) $iS(t)$; $i=1, 2, \dots, N$ が互いに完全に相関している場合

$iS(t)$ が互いに完全に相関している場合には、システムの各要素の復旧状態が他の要素の確定的な線形関数で与えられることを意味する。この場合、式 (31) は付録 c) の式 (C-1) を適用すれば次のように変形される。

$$\begin{aligned} F_{S(t)}(S_l) &= 1 - \min[\text{Prob}\{S(t) > S_l\}, \\ &\quad \text{Prob}\{{}_2S(t) > S_l\}, \dots, \text{Prob}\{{}_N S(t) > S_l\}] \\ &= 1 - \min \left[1 - \sum_{k=1}^l {}_1P_k(t), \right. \\ &\quad \left. 1 - \sum_{k=1}^l {}_2P_k(t), \dots, 1 - \sum_{k=1}^l {}_N P_k(t) \right] \\ &= 1 - \left[1 - \max \left\{ \sum_{k=1}^l {}_1P_k(t), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{k=1}^l {}_2P_k(t), \dots, \sum_{k=1}^l {}_N P_k(t) \right\} \right] \\ &= \max \left\{ \sum_{k=1}^l {}_1P_k(t), \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^l {}_2P_k(t), \dots, \sum_{k=1}^l {}_N P_k(t) \right\} \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

ゆえに、システム全体の復旧状態 $S(t)$ が S_l になる確率 $P_l(t)$ は、

$$\begin{aligned} P_l(t) &= \text{Prob}\{S(t) = S_l\} \\ &= F_{S(t)}(S_l) - F_{S(t)}(S_{l-1}) \end{aligned}$$

これを式 (37) を用いて表わせば、

$$\begin{aligned} P_l(t) &= \max \left\{ \sum_{k=1}^l {}_1P_k(t), \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^l {}_2P_k(t), \dots, \sum_{k=1}^l {}_N P_k(t) \right\} \\ &\quad - \max \left\{ \sum_{k=1}^{l-1} {}_1P_k(t), \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^{l-1} {}_2P_k(t), \dots, \sum_{k=1}^{l-1} {}_N P_k(t) \right\} \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

もし、各要素の時刻 t における復旧状態の確率関数が同一であるならば式 (35) の関係を用いて式 (38) は次のように整理される。

$$\begin{aligned} P_l(t) &= \sum_{k=1}^l P_k^*(t) - \sum_{k=1}^{l-1} P_k^*(t) \\ &= P_l^*(t) \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

以上、4.(1)、4.(2) ではシステム全体の復旧過程 $S(t)$ の 2 つの特別な場合について式を誘導した。しかし、実際の $S(t)$ の確率関数は式 (34) と式 (38) の中間をとると考えられる。なぜならば、システム全体の機能上の特性の相連などを考慮すれば、たとえばある部分が重点的に早めに復旧されることも考えられ、このようなときにはその内部での要素の状態間での相関は大きくなる。一方、他の要素との関係は独立に近いと考えられる。また全体を同一歩調で復旧していく政策をとるときには、ほぼ全要素間で相関が高くなっていると考えられるからである。

確率関数 $P_l(t)$ が計算されるならば、特性値として次の諸量が計算できる。

$$E[S(t)] = \sum_{l=1}^M S_l P_l(t) \dots\dots\dots (40)$$

$$E[S^2(t)] = \sum_{l=1}^M S_l^2 P_l(t) \dots\dots\dots (41)$$

$$\sigma_{S(t)}^2 = E[S^2(t)] - E[S(t)]^2 \dots\dots\dots (42)$$

また、システム全体の完全復旧時間 T_M は確率変数であり、 T_M がある値 t 以下になる確率は t において $S(t) = S_M$ となる確率と同値である。

ゆえに、

$$\text{Prob}(T_M \leq t) = \text{Prob}\{S(t) = S_M\} = P_M(t)$$

である。これより T_M の確率密度関数 $f_{T_M}(t)$ は、

$$f_{T_M}(t) = \frac{dP_M(t)}{dt} \dots\dots\dots (43)$$

となる。式 (43) を用いれば特性値として次の諸量が計算できる。

$$E[T_M] = \int_0^\infty t f_{T_M}(t) dt \dots\dots\dots (44)$$

$$E[T_M^2] = \int_0^\infty t^2 f_{T_M}(t) dt \dots\dots\dots (45)$$

$$\sigma_{T_M}^2 = E[T_M^2] - E[T_M]^2 \dots\dots\dots (46)$$

また離散時間とした場合には以下ようになる。

$$\begin{aligned} \text{Prob}(T_M \leq k\Delta t) &= \text{Prob}\{S(k\Delta t) = S_M\} \\ &= P_M(k\Delta t) \end{aligned}$$

であるから、 T_M の確率関数 $p_{T_M}(k\Delta t)$ は、

$$\begin{aligned} p_{T_M}(k\Delta t) &= \text{Prob}(T_M = k\Delta t) \\ &= \text{Prob}(T_M \leq k\Delta t) \\ &\quad - \text{Prob}(T_M \leq (k-1)\Delta t) \\ &= P_M(k\Delta t) - P_M((k-1)\Delta t) \dots\dots (47) \end{aligned}$$

式 (47) から次の特性値の諸量が計算できる。

$$E[T_M] = \sum_{k=1}^\infty (k\Delta t) p_{T_M}(k\Delta t) \dots\dots\dots (48)$$

$$E[T_M^2] = \sum_{k=1}^\infty (k\Delta t)^2 p_{T_M}(k\Delta t) \dots\dots\dots (49)$$

$$\sigma_{T_M}^2 = E[T_M^2] - E[T_M]^2 \dots\dots\dots (50)$$

5. シミュレーション

前章までにシステムの任意の要素とシステム全体に着目した場合の復旧過程の予測モデルを誘導した。したがって、復旧過程の理論解が計算できるのであるが、ここではシミュレーション解を求める場合をまとめてみる。

(1) 要素の復旧過程 $mS(t)$

はじめに一様乱数と $m\pi(0)=[mP_1(0), mP_2(0), \dots, mP_M(0)]$ とを用いて初期状態 $mS(0)=S_i$ を抽出する(ステップ1)。次に式(2)の条件付遷移確率行列 $mP_t(dt)$ の要素である $1-m\nu_i(0)dt, m\nu_i(0)dt$ を用いて状態の推移を決定する。すなわち、 $mS(dt)$ は S_i にとどまるかまたは、 S_{i+1} の状態が抽出される(ステップ2)。以下同様にステップ2を繰り返す行い、状態 $mS(t)=S_M$ になるまで行う。以上で $mS(t)$ の1つのサンプル関数が抽出される。

(2) システム全体の復旧過程 $S(t)$

復旧が要素間で独立のときには、各要素ごとに独立の乱数を用いて上記の操作を行う。 $S(t)$ の1つのサンプル関数は、 $S(kdt)=\min\{S_1(kdt), S_2(kdt), \dots, S_N(kdt)\}$; $k=1, 2, 3, \dots$ とすればよい。完全相関の場合には、共通の乱数を用いて各要素の復旧過程 $mS(t)$; $m=1, 2, \dots, N$ を抽出すればよい。

6. 最適化問題

まえがきにも述べたように、地震時においてライフラインの機能低下による直接、または間接的な被害は非常に甚大であり、人々の生活に大きな混乱を与える。これを事前に防ぐためには、ライフラインの耐震性を高めることが重要な課題である。しかし、それには膨大な費用投資が必要とされ、経済性から考えても問題がある。そこで本章では、すでに誘導された地震後の復旧予測モデルを用いて最適な事前投資の算定方法を検討する。

システムが地震発生から完全復旧までに要した費用は、事前の補強対策費用まで含めると次の(i)~(iii)と考えられる(一般には貨幣単位で表わすことができる)。

- (i) 事前の補強対策費用 C
- (ii) 地震の破壊による損失 f
- (iii) 復旧までの機能停止による損失 g

ここで、(ii), (iii) は確率に支配される量であり、1つの最適な政策としては(i)から(iii)までの総和の期待値を最小にする C を決定することである。すなわち、総和を総費用 TC とすれば、

$$E[TC]=C+E[f]+E[g] \dots \dots \dots (51)$$

となり、 $\min E[TC]$ とするような C を決定すればよい。

そこで、次に式(51)の $C, E[f], E[g]$ について式を誘導する。

事前の補強対策費用 C について考えてみる。図-2に $S(t)=\min\{S_1(t), S_2(t), \dots, S_N(t)\}$ の1つのサンプル関数を示したが、地震発生前 ($t < 0$) においては事前の補強対策費用 C は増大しても $S(t)$ は変化しない。すなわち、システムは平常状態を保ちながら耐震的にはより強化されることになる。逆に、 C を減らせば地震に対してより弱体化したシステムとなる。いま、システム全体が N 個の要素からなっているとき、 k 番目要素に対する事前の補強対策費用を C_k とすれば、

$$C = \sum_{k=1}^N C_k \dots \dots \dots (52)$$

と表わせる。

地震による破壊損失 f は、 C が増大つまり、補強対策を強化すれば減少し、逆に C が減少すれば増大する。すなわち、 f は各要素の初期状態 $iS(0)$ に従属し、その $iS(0)$ は $i\pi(0) = \{iP_1(0), iP_2(0), \dots, iP_M(0)\}$; $i=1, 2, \dots, N$ に支配される確率変数である。そして、これらの $iP_l(0)$; $l=1, 2, \dots, M$ は C によって変化するのである。そこで、このことを明確にするために $iP_l(0) = iP_l(0, C_i)$ とし、各要素の破壊損失を f_i とすれば、

$$f = \sum_{i=1}^N f_i iS(0)$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} E[f] &= \sum_{i=1}^N E[f_i iS(0)] \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^M f_i(S_i) iP_l(0, C_i) \dots \dots \dots (53) \end{aligned}$$

となる。

復旧までの機能停止による損失 g は、システム全体の完全復旧までの時間 T_M の関数で与えられるので $g = g(T_M)$ と表わされ、

$$E[g] = E[g(T_M)] \dots \dots \dots (54)$$

となる。 T_M は図-2をみてもわかるように、

$$T_M = \max\{T_{1M}, T_{2M}, \dots, T_{NM}\}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{T_M \leq t\} &= \text{Prob}[\max\{T_{1M}, T_{2M}, \dots, T_{NM}\} \leq t] \\ &\dots \dots \dots (55) \end{aligned}$$

として与えられる。そこで、式(55)の右辺は付録(B)の式(B-1)を適用すれば次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{T_M \leq t\} &= \text{Prob}[\{T_{1M} \leq t\} \cap \{T_{2M} \leq t\} \\ &\quad \cap \dots \cap \{T_{NM} \leq t\}] \dots \dots (56) \end{aligned}$$

式 (56) については次の両者の場合が考えられる。

$iS(t); i=1, 2, \dots, N$ が互いに独立の場合には式 (56)

は、

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{T_M \leq t\} &= \text{Prob}\{ {}_1T_M \leq t\} \text{Prob}\{ {}_2T_M \leq t\} \dots \\ &\quad \text{Prob}\{ {}_N T_M \leq t\} \\ &= \prod_{i=1}^N \text{Prob}\{ {}_i T_M \leq t\} \\ &= \prod_{i=1}^N {}_i P_M(t) \end{aligned}$$

したがって、 T_M の確率密度関数 $f_{T_M}(t)$ は、

$$\begin{aligned} f_{T_M}(t) &= \frac{d}{dt} \prod_{i=1}^N {}_i P_M(t) \\ &= \frac{d}{dt} \prod_{i=1}^N \sum_{k=1}^M {}_i P_k(0, C_i) {}_i P_{kM}(t) \\ &\dots\dots\dots (57) \end{aligned}$$

式 (57) を用いると式 (54) は、

$$\begin{aligned} E[g] &= \int_0^\infty g(t) f_{T_M}(t) dt \\ &= \int_0^\infty g(t) \left\{ \frac{d}{dt} \prod_{i=1}^N \sum_{k=1}^M {}_i P_k(0, C_i) {}_i P_{kM}(t) \right\} dt \\ &\dots\dots\dots (58) \end{aligned}$$

となる。

$iS(t); i=1, 2, \dots, N$ が互いに完全に相関している場合には式 (56) は付録 c) の式 (C・1) から次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{T_M \leq t\} &= \min\{\text{Prob}\{ {}_1T_M \leq t\}, \text{Prob}\{ {}_2T_M \leq t\}, \dots, \\ &\quad \text{Prob}\{ {}_N T_M \leq t\}\} \end{aligned}$$

したがって T_M の確率密度関数 $f_{T_M}(t)$ は、

$$\begin{aligned} f_{T_M}(t) &= \frac{d}{dt} [\min\{\text{Prob}\{ {}_1T_M \leq t\}, \\ &\quad \text{Prob}\{ {}_2T_M \leq t\}, \dots, \text{Prob}\{ {}_N T_M \leq t\}\}] \\ &= \frac{d}{dt} [\min\{ {}_1P_M(t), {}_2P_M(t), \dots, {}_N P_M(t)\}] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\min \left\{ \sum_{k=1}^M {}_1P_k(0, C_1) {}_1P_{kM}(t), \right. \right. \\ &\quad \sum_{k=1}^M {}_2P_k(0, C_2) {}_2P_{kM}(t), \dots, \\ &\quad \left. \left. \sum_{k=1}^M {}_N P_k(0, C_N) {}_N P_{kM}(t) \right\} \right] \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

式 (59) を用いると式 (54) は、

$$\begin{aligned} E[g] &= \int_0^\infty g(t) f_{T_M}(t) dt \\ &= \int_0^\infty g(t) \frac{d}{dt} \left[\min \left\{ \sum_{k=1}^M {}_1P_k(0, C_1) {}_1P_{kM}(t), \right. \right. \\ &\quad \sum_{k=1}^M {}_2P_k(0, C_2) {}_2P_{kM}(t), \dots, \\ &\quad \left. \left. \sum_{k=1}^M {}_N P_k(0, C_N) {}_N P_{kM}(t) \right\} \right] dt \dots\dots\dots (60) \end{aligned}$$

以上からシステム全体が完全独立の場合は、式 (52)、(53)、(58) を式 (51) に代入して、

$$\begin{aligned} E[TC] &= \sum_{k=1}^N C_k + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^M f_i(S_i) {}_i P_l(0, C_i) \\ &\quad + \int_0^\infty g(t) \left\{ \frac{d}{dt} \prod_{i=1}^N \sum_{k=1}^M {}_i P_k(0, C_i) {}_i P_{kM}(t) \right\} \\ &\quad \cdot dt \dots\dots\dots (61) \end{aligned}$$

システム全体が完全相関の場合は、式 (52)、(53)、(60) を式 (51) に代入して、

$$\begin{aligned} E[TC] &= \sum_{k=1}^N C_k + \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^M f_i(S_i) {}_i P_l(0, C_i) \\ &\quad + \int_0^\infty g(t) \frac{d}{dt} \left[\min \left\{ \sum_{k=1}^M {}_1P_k(0, C_1), \right. \right. \\ &\quad \sum_{k=1}^M {}_2P_k(0, C_2) {}_2P_{kM}(t), \dots, \\ &\quad \left. \left. \sum_{k=1}^M {}_N P_k(0, C_N) {}_N P_{kM}(t) \right\} \right] dt \dots\dots\dots (62) \end{aligned}$$

となる。

最適解 C_i は、式 (61) または式 (62) の最小値を求めることにより得られるから、

$$\left. \frac{\partial E[TC]}{\partial C_i} \right|_{i=1,2,\dots,N} = 0 \dots\dots\dots (63)$$

を解くことに帰着する。

7. 結 論

本研究は、地震被害を受けたライフラインの復旧予測モデルを提案し、それより構造が完全復旧に至るまでの時間 T_M と時刻 t における復旧状態 $S(t)$ の理論式を誘導したものである。本研究での復旧状態 $S(t)$ とは、地震後の時刻 t においてシステム全体の構造の被害量がどの程度のレベルにあるかを表わすものであり、それが復旧作業の開始から地震前の状態に戻るまでの経時変化を確率過程としてモデル化したものである。

理論の誘導は、まず任意の m 番目要素の状態 $mS(t)$ をマルコフ過程の吸収非定常発生過程としてモデル化し、システム全体の状態 $S(t)$ は要素中で最も復旧の遅れている要素の状態に等しいという評価基準によった。したがって、ここでの $S(t)$ は構造の復旧状態に着目した予測でありライフラインの種類、特性、構成等の影響因子を考慮してなされる耐震信頼性に基づく機能上からとらえた状態として導いたものではない。しかしながら、完全復旧までの時間 T_M は構造的にみたときでも変わらないので、本論で誘導した諸関係式は実際の問題に適用することができると考える。

次に誘導された復旧の予測モデルから、地震に伴う損失を算定することが可能となる。ここでは、事前補強対策費、地震による損失および機能停止に伴う損失を考慮した期待総費用を最小とする最適化問題に関しても基礎的な検討を行った。

復旧予測モデルで今後十分に検討すべき項目は、

- (1) 初期状態の確率分布 $m\pi(0)$ の合理的な算定方法.
- (2) 復旧率 $m\nu_j(t)$ は時刻 t とそのときの状態レベル S_t の関数であるが、これをどのように推定し理論式に組み込むかの検討.
- (3) システム全体の状態 $S(t)$ をどのようにとらえたらよいかの検討. これに関連して要素間の状態 $mS(t); m=1, 2, \dots, N$ の相互相関性の問題.
- (4) システム全体の復旧を構造的にみた場合の復旧状態 $S(t)$ とシステムの特性等を含んだ機能の復旧状態 $A(t)$ との関連性.

等である.

目下、上記の事項の検討と事例研究の適用を行っている.

付 録

a) N 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_N に対して、

$$\begin{aligned} & \text{Prob}\{\min(X_1, X_2, \dots, X_N) \leq x\} \\ &= \text{Prob}[\{X_1 \leq x\} \cup \{X_2 \leq x\} \cup \dots \\ & \quad \cup \{X_N \leq x\}] \dots\dots\dots (A \cdot 1) \end{aligned}$$

が成立する.

(証明)

最初に 2 変数 X_1, X_2 の場合を考えると、 $\min(X_1, X_2) \leq x$ は次式と等価である.

$$\left. \begin{aligned} & \text{もし、} X_1 \geq X_2 \text{ ならば } X_2 \leq x \\ & \text{もし、} X_1 < X_2 \text{ ならば } X_1 \leq x \end{aligned} \right\} \dots\dots (A \cdot 2)$$

式 (A・2) を X_1 - X_2 平面上に図示すれば 図-5 のようになる. これより、

$$\begin{aligned} & \{\min(X_1, X_2) \leq x\} \\ &= (X_1 \leq x) + (X_2 \leq x) - (X_1 \leq x \cap X_2 \leq x) \\ &= (X_1 \leq x) \cup (X_2 \leq x) \dots\dots\dots (A \cdot 3) \end{aligned}$$

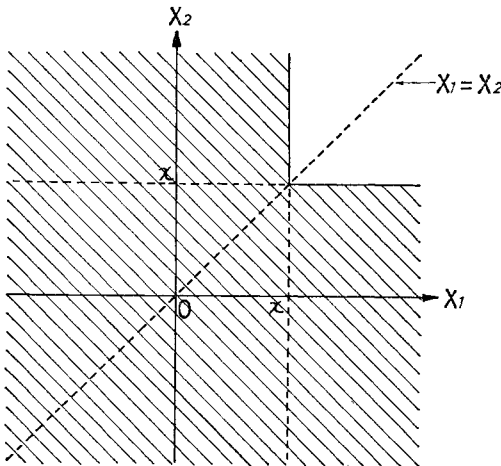


図-5

ゆえに、

$$\begin{aligned} & \text{Prob}\{\min(X_1, X_2) \leq x\} \\ &= \text{Prob}\{X_1 \leq x \cup X_2 \leq x\} \dots\dots\dots (A \cdot 4) \end{aligned}$$

次に式 (A・3)、(A・4) を適用すれば、3 変数の場合にも

$$\begin{aligned} & \text{Prob}\{\min(X_1, X_2, X_3) \leq x\} \\ &= \text{Prob}[\min\{\min(X_1, X_2), X_3\} \leq x] \\ &= \text{Prob}\{\min(X_1, X_2) \leq x \cup X_3 \leq x\} \\ &= \text{Prob}\{X_1 \leq x \cup X_2 \leq x \cup X_3 \leq x\} \dots\dots (A \cdot 5) \end{aligned}$$

以下同様に行えば、一般に次式を得る.

$$\begin{aligned} & \text{Prob}\{\min(X_1, X_2, \dots, X_N) \leq x\} \\ &= \text{Prob}\{X_1 \leq x \cup X_2 \leq x \cup \dots \cup X_N \leq x\} \\ & \dots\dots\dots (A \cdot 6) \end{aligned}$$

証明終り

b) N 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_N に対して、

$$\begin{aligned} & \text{Prob}\{\max(X_1, X_2, \dots, X_N) \leq x\} \\ &= \text{Prob}[\{X_1 \leq x\} \cap \{X_2 \leq x\} \cap \dots \\ & \quad \cap \{X_N \leq x\}] \dots\dots\dots (B \cdot 1) \end{aligned}$$

が成立する.

(証明)

最初に 2 変数 X_1, X_2 の場合を考えると、 $\max(X_1, X_2) \leq x$ は次式と等価である.

$$\left. \begin{aligned} & \text{もし、} X_1 \geq X_2 \text{ ならば } X_1 \leq x \\ & \text{もし、} X_1 < X_2 \text{ ならば } X_2 \leq x \end{aligned} \right\} \dots\dots (B \cdot 2)$$

式 (B・2) を X_1 - X_2 平面上に図示すれば 図-6 のようになる. これより、

$$\begin{aligned} & \{\max(X_1, X_2) \leq x\} = (X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \\ & \dots\dots\dots (B \cdot 3) \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} & \text{Prob}\{\max(X_1, X_2) \leq x\} \\ &= \text{Prob}\{X_1 \leq x \cap X_2 \leq x\} \dots\dots\dots (B \cdot 4) \end{aligned}$$

付録 b) と同様に行えば、一般に次式が成り立つ.

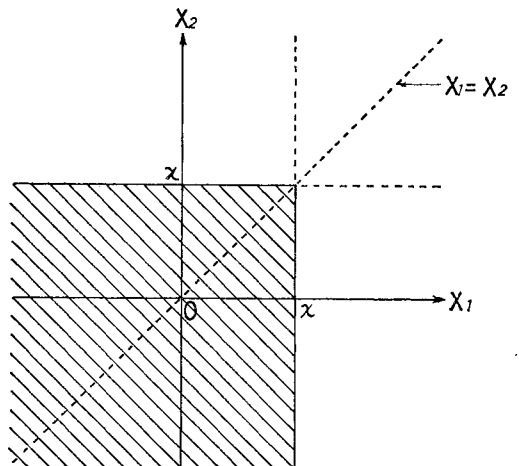


図-6

$$\begin{aligned} & \text{Prob}\{\max(X_1, X_2, \dots, X_N) \leq x\} \\ & = \text{Prob}[\{X_1 \leq x\} \cap \{X_2 \leq x\} \cap \dots \\ & \quad \cap \{X_N \leq x\}] \end{aligned}$$

証明終り

c) N 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_N が互いに完全相関にあるとき

$$\begin{aligned} & \text{Prob}[\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\} \cap \dots \cap \{X_N > x\}] \\ & = \min\{\text{Prob}(X_1 > x), \text{Prob}(X_2 > x), \dots, \\ & \quad \text{Prob}(X_N > x)\} \dots\dots\dots (C \cdot 1) \end{aligned}$$

が成立する。

(証明)

最初に 2 変数 X_1, X_2 の場合を考えると, X_1 と X_2 が完全相関にあるから, X_1 と X_2 は線形関係で結ばれている。

そこで, $X_1 = aX_2 + b$ とおけば,

$$\begin{aligned} & \text{Prob}[\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\}] \\ & = \text{Prob}\left[\{X_1 > x\} \cap \left\{\frac{X_1 - b}{a} > x\right\}\right] \\ & = \text{Prob}[\{X_1 > x\} \cap \{X_1 > ax + b\}] \dots (C \cdot 2) \end{aligned}$$

したがって,

もし, $x \geq ax + b$ ならば

$$\text{Prob}[\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\}] = \text{Prob}(X_1 > x) \dots\dots\dots (C \cdot 3)$$

もし, $x < ax + b$ ならば

$$\begin{aligned} & \text{Prob}[\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\}] \\ & = \text{Prob}(X_1 > ax + b) = \text{Prob}(X_2 > x) \\ & \dots\dots\dots (C \cdot 4) \end{aligned}$$

式 (C.3) は, $\text{Prob}(X_2 > x)$ よりも小さく, 式 (C.4) は $\text{Prob}(X_1 > x)$ よりも小さい。

以上, 式 (C.3), (C.4) より,

$$\begin{aligned} & \text{Prob}[\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\}] \\ & = \min\{\text{Prob}(X_1 > x), \text{Prob}(X_2 > x)\} \\ & \dots\dots\dots (C \cdot 5) \end{aligned}$$

次に, X_1, X_2, X_3 が互いに完全相関して線形関係にあれば,

$$\begin{aligned} & \text{Prob}[\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\} \cap \{X_3 > x\}] \\ & = \min\{\text{Prob}[\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\}], \\ & \quad \text{Prob}(X_3 > x)\} \\ & = \min\{\min\{\text{Prob}(X_1 > x), \text{Prob}(X_2 > x)\}, \\ & \quad \text{Prob}(X_3 > x)\} \\ & = \min\{\text{Prob}(X_1 > x), \text{Prob}(X_2 > x), \\ & \quad \text{Prob}(X_3 > x)\} \dots\dots\dots (C \cdot 6) \end{aligned}$$

以下同様に行えば, 一般に次式を得る。

$$\begin{aligned} & \text{Prob}[\{X_1 > x\} \cap \{X_2 > x\} \cap \dots \cap \{X_N > x\}] \\ & = \min\{\text{Prob}(X_1 > x), \text{Prob}(X_2 > x), \dots, \\ & \quad \text{Prob}(X_N > x)\} \dots\dots\dots (C \cdot 7) \end{aligned}$$

証明終り

参 考 文 献

- 1) 片山・増井・磯山：1978 年宮城県沖地震による都市供給施設の被害と復旧, 東京大学生産技術研究所, 1979.10.
- 2) 建設省土木研究所：1978 年宮城県沖地震災害調査報告, 土木研究所資料, 第 1437 号, 1979.8.
- 3) Whitman, R.V., C.A. Cornell and G. Taleb-Agha : Analysis of Earthquake Risk for Lifeline Systems, Proc. U.S. Natl. Conf. Earthquake Eng., 1975.
- 4) Taleb-Agha, G. : Seismic Risk Analysis of Lifeline Networks, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 67, No. 6, pp. 1625~1645, December 1977.
- 5) Shinozuka, M., S. Takada and H. Ishikawa : Some Aspects of Seismic Risk Analysis of Underground Lifeline Systems, Journal of Pressure Vessel Technology, ASME, No. 78-WA/PVP-6, 1979.
- 6) 田村・川上：ライフラインのネットワークシステムの耐震性の一評価方法について, 東京大学生産技術研究所報, 生産研究, Vol. 30, No. 7, 第 346 号.
- 7) 伯野・斎藤：ライフラインの耐震性に影響する因子, 第 15 回地震工学研究発表会, 1979.7.

(1980.2.19・受付)