

任意に配置された異なる柱径をもつ多柱基礎に 働く地震時動水圧の解析法

A METHOD OF ANALYSIS OF DYNAMIC WATER PRESSURE DURING
EARTHQUAKES ON MULTI-PILES FOUNDATION WITH DIFFERENT
DIAMETERS AND ARBITRARY POSITION OF PILES

小坪 清真*・高西 照彦**

By Seima KOTSUBO and Teruhiko TAKANISHI

1. ま え が き

著者らは前論^{1),2)}において、多柱基礎に対する地震時動水圧の2次元論的および3次元論的考察を行い、著者らが導いた理論解と2次元模型による実験結果とがよく一致することを示した。さらに、単柱に対する深さ方向の動水圧分布を表わす近似式を用いて、多柱基礎の3次元動水圧を容易に求める方法を提案し、その方法に従って、実際規模の多柱基礎について数値計算を行った結果、それは理論解とよく一致することを確かめた。

前論における理論解は、多柱基礎に対する地震時動水圧を求めるのに、緩和法的な考え方に従って逐次近似的に正解を得ようとするものであった。この方法では、多柱基礎を構成する柱の本数が増えると、各柱に対する動水圧の理論式を導く手数が加速度的に増大し、その計算式は煩雑となり、数値計算に多くの時間が必要となる。また、直径が各柱でまちまちであったり、あるいは各柱の配置が不規則であるような場合については、その煩雑さはさらに一段と増大する。

本論では、前論におけるような煩雑な数値計算を必要としないで、しかも見通しのよいすっきりした形の動水圧の理論的解析法を新たに提案し、本方法によって求めた多柱基礎の各柱に対する2次元および3次元動水圧(剛振動および弾性自由振動)の数値計算結果の一例を示した。さらに、直径の異なる円柱から構成された円柱群に対する2次元模型実験を行って、その結果を理論解と比較した。

本解析法は以下に述べるように、多柱基礎が水中で振動しているとき、その動水圧を表わす表示式中に未定係数を導入して、この未定係数を境界条件を満足するように定めようとするものである。本方法によれば、単に柱

の本数の2倍の元数をもつ連立一次方程式を解くだけで、多柱基礎が水中で振動しているときの動水圧式を得ることができる。このとき、柱の本数の多少、柱径の不均一性、柱配置の不規則性のいかんにかかわらず上記の多元連立一次方程式の各要素は、一定の規則に従って、簡単な手続きでこれを求めることができるので、前論におけるような煩雑な数値計算を行うことなく、任意の多柱基礎に対する動水圧の理論解が得られる。ただ、多柱基礎の弾性自由振動に対する動水圧を求めるためには、水中における多柱基礎の固有振動周期および各柱の振動型がそれぞれ一定値に収束するまでくり返し計算を行う必要があるが、それは単柱の弾性自由振動に対する動水圧を求める場合と本質的にはまったく同様な操作である。

多柱基礎あるいは一般に任意断面を有する柱群に対する地震時動水圧に関する研究は、従来から十分多く行われているとはいえない。

Yamamoto, T.³⁾ は一様流中で運動する任意の直径および配置を有する円柱群に対する2次元動水圧の厳密解を Milne-Thomson の円定理を利用して求めた。しかし、この解析法も円柱の数が多くなると、その数値計算の煩雑さが加速度的に増大する。しかも、この解析法を3次元の場合にそのまま拡張することは困難である。

富田ら⁴⁾、笠井ら⁵⁾は、原子炉の炉心部において、流体中に存在する燃料棒群の連成振動の問題を取扱っている。両者はいずれも問題を2次元的にしか処理しておらず、また、燃料棒の断面が長方形である場合に対する解析のみを行っており、この解析法の考え方をそのまま円柱群の場合に適用することは困難である。

本論の解析法の基本的な考え方は、ただ単に本論で取扱った多柱基礎ばかりではなく、パイプ要素から構成される海洋構造物に対する動水圧の問題にも適用可能である。

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 九州工業大学助教授 開発土木工学科

2. 2次元動水圧理論

軸方向に無限の長さを有する不規則に配置された異なる柱径をもつ円柱群が、水中で長さ方向に一樣に軸直角水平振動をする場合を考えて、このとき円柱群を構成する各円柱に対する動水圧を求める理論について述べる。

図-1 に示すように、 i 柱、 j 柱、の N 本から構成された円柱群が、水中で x および y 方向に正弦的に単位加速度で振動しているとき、水中の任意点 Q の速度ポテンシャルは、単円柱の場合に対するそれを参照すれば、

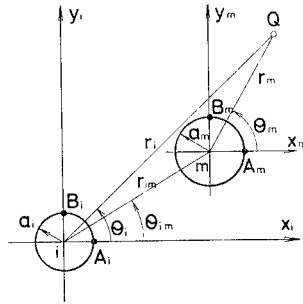


図-1 円柱群と座標系

$$\phi_Q = \sum_{m=i,j,\dots}^N \phi_m = - \sum_{m=i,j,\dots}^N \frac{a_m^2}{\omega} \{ D_m^x \cos \theta_m + D_m^y \sin \theta_m \} \frac{1}{r_m} \cos \omega t \dots\dots\dots (1)$$

と表わすことができる。ここに、 ω は水中における円柱群の円振動数、 a_m は m 柱の半径、 D_m^x, D_m^y はそれぞれ m 柱の x, y 方向の振動に対する速度ポテンシャル中の未定係数、 r_m, θ_m は図-1 に示すように m 局所座標系に関する点 Q の極座標表示である。

点 Q における動水圧は、 w_0 を水の単位体積重量とすれば、

$$p_Q = - \frac{w_0}{g} \frac{\partial \phi_Q}{\partial t} \dots\dots\dots (2)$$

によって与えられるから、たとえば i 柱に対するそれぞれ x, y 方向の単位深さ当りの全動水圧は、

$$P_i^x = - \int_{-\pi}^{\pi} p_Q r_i \cos \theta_i |_{r_i=a_i} d\theta_i \dots\dots\dots (3)$$

$$P_i^y = - \int_{-\pi}^{\pi} p_Q r_i \sin \theta_i |_{r_i=a_i} d\theta_i \dots\dots\dots (4)$$

によって求められる。付録 1 を参照すれば、上式は次のように表わせる。

$$P_i^x = \pi \frac{w_0}{g} a_i^2 D_i^x \sin \omega t - \pi \frac{w_0}{g} \sum_{m \neq i} a_m^2 \{ D_m^x \cos 2 \theta_{im} + D_m^y \sin 2 \theta_{im} \} \cdot \left(\frac{a_i}{r_{im}} \right)^2 \sin \omega t \dots (3)'$$

$$P_i^y = \pi \frac{w_0}{g} a_i^2 D_i^y \sin \omega t - \pi \frac{w_0}{g} \sum_{m \neq i} a_m^2 \{ D_m^x \sin 2 \theta_{im} - D_m^y \cos 2 \theta_{im} \} \cdot \left(\frac{a_i}{r_{im}} \right)^2 \sin \omega t \dots (4)'$$

$$- D_m^y \cos 2 \theta_{im} \} \cdot \left(\frac{a_i}{r_{im}} \right)^2 \sin \omega t \dots (4)'$$

ここに、 r_{im}, θ_{im} は図-1 に示すように、 i 柱に対する m 柱の位置を表わす極座標である。また、第 1 項は i 柱自身の振動による動水圧、第 2 項以下は i 柱以外の柱の振動による動水圧である。

さて、円柱群が水中で x 方向に単位加速度振幅の正弦振動を行っているときは、式 (1) から求められる円柱表面における水分子の r 方向の変位速度は、各柱について、

$$w_m^r = \frac{1}{\omega} \cos \theta_m \cos \omega t \quad (m=i, j, \dots) \dots (5)$$

を満足しなければならない。同様に y 方向振動に対しては、

$$w_m^r = \frac{1}{\omega} \sin \theta_m \cos \omega t \quad (m=i, j, \dots) \dots\dots (6)$$

である。一方、いま i 柱について考えると、 i 柱の表面における水分子の r 方向の変位速度は、式 (1) を用いて次のように表わされる。

$$w_i^r = \frac{\partial \phi_Q}{\partial r_i} \Big|_{r_i=a_i} \dots\dots\dots (7)$$

この場合、 m 柱の運動に基づく速度ポテンシャルを用いて、 i 柱の表面における水分子の r 方向の変位速度を厳密に求めることは非常に煩雑であり、しかも実用的とはいえないので、本論では i 柱の中心位置における変位速度を採用することによって、 m 柱の運動が i 柱に与える影響を近似的に評価した。

ここで、式 (1) 自身も多柱基礎の速度ポテンシャルを厳密に表現した式とはいえない。厳密な速度ポテンシャルを表わすためには、式 (1) にさらに、 $\cos 2 \theta_m, \sin 2 \theta_m, \dots$ にそれぞれ未定係数を掛けた項を加えなければならないが、本論では煩雑さと実用性を考慮して、これらの項をいっさい省略した。

上述の近似的取扱いに対する誤差が各柱の動水圧に及ぼす影響は、後に示すように、いずれも柱と柱との間隔 l が円柱の直径 d に比べて少し大きくなれば ($l/d \geq 1.5$) ほとんど無視することができる。

このように考えてよいとすれば、各柱に対してその円柱表面上の代表的な 2 点における水分子の半径方向の変位速度が、円柱群の x および y 方向振動に応じてそれぞれ式 (5), (6) の境界条件を満足するように、式 (1) 中の未定係数 D_m^x, D_m^y を定めればよいことになる。いま、その 2 点として図-1 に示す点 $A_m (r_m=a_m, \theta_m=0)$ 、点 $B_m (r_m=a_m, \theta_m=\pi/2)$ を選べば、たとえば i 柱については点 A_i, B_i における半径方向の水分子の変位速度は、上述の近似理論を考慮して式 (7) を用いるとそれぞれ次式のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}
 w_i^r(A_i) &= \frac{\partial \phi_i}{\partial r_i} \Big|_{r_i=a_i} + \sum_{m \neq i} \frac{\partial \phi_m}{\partial r_i} \Big|_{r_i=0} \\
 &= \frac{1}{\omega} D_i^x \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \sum_{m \neq i} \left(\frac{a_m}{r_{im}} \right)^2 \\
 &\quad \cdot \{ D_m^x \cos 2 \theta_{im} + D_m^y \sin 2 \theta_{im} \} \cdot \cos \omega t \quad \dots \dots \dots (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_i^r(B_i) &= \frac{\partial \phi_i}{\partial r_i} \Big|_{r_i=a_i} - \sum_{m \neq i} \frac{\partial \phi_m}{\partial r_i} \Big|_{r_i=0} \\
 &= \frac{1}{\omega} D_i^y \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \sum_{m \neq i} \left(\frac{a_m}{r_{im}} \right)^2 \\
 &\quad \cdot \{ D_m^x \sin 2 \theta_{im} - D_m^y \cos 2 \theta_{im} \} \cdot \cos \omega t \quad \dots \dots \dots (9)
 \end{aligned}$$

他方、 i 柱の表面上の点 A_i, B_i における境界条件は、円柱群が x 方向に単位加速度振幅の正弦振動を行っているときは、式 (5) においてそれぞれ $\theta_i=0, \pi/2$ として、

$$w_i^r(A_i) = \frac{1}{\omega} \cos \omega t \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$w_i^r(B_i) = 0 \quad \dots \dots \dots (11)$$

y 方向については式 (6) においてそれぞれ $\theta_i=0, \pi/2$ として、

$$w_i^r(A_i) = 0 \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$w_i^r(B_i) = \frac{1}{\omega} \cos \omega t \quad \dots \dots \dots (13)$$

となる。したがって、これらより円柱群の x 方向振動に対しては、式 (8), (9) をそれぞれ式 (10), (11) に等置して、

$$\left. \begin{aligned}
 D_i^x + \sum_{m \neq i} \left(\frac{a_m}{r_{im}} \right)^2 \{ D_m^x \cos 2 \theta_{im} + D_m^y \sin 2 \theta_{im} \} &= 1 \\
 D_i^y + \sum_{m \neq i} \left(\frac{a_m}{r_{im}} \right)^2 \{ -D_m^y \cos 2 \theta_{im} + D_m^x \sin 2 \theta_{im} \} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

$(i=i, j, k, \dots)$

を得る。同様に、 y 方向振動に対しては式 (8), (9) をそれぞれ式 (12), (13) に等置すれば、式 (14) において、その右辺の定数 1 を 0 に、0 を 1 に置き変えた式が得られる。式 (14) を各円柱について立てれば、未定係数 D_m^x, D_m^y に関する多元連立一次方程式（その元数は柱本数の 2 倍となる）が得られる。したがって、これを解いて D_m^x, D_m^y を求めれば式 (1) より円柱群の水中振動に対する速度ポテンシャルが定まる。これより各柱に対する x および y 方向の水の付加質量係数は、式 (3)', (4)' を用いて、たとえば i 柱については次式によってこれを求めることができる。

$$\begin{aligned}
 F_i^x &= P_i^x / \{ \pi a_i^2 (\omega_0/g) \sin \omega t \} \\
 &= D_i^x - \sum_{m \neq i} \left(\frac{a_m}{r_{im}} \right)^2 \{ D_m^x \cos 2 \theta_{im} + D_m^y \sin 2 \theta_{im} \} \quad \dots \dots \dots (15) \\
 F_i^y &= P_i^y / \{ \pi a_i^2 (\omega_0/g) \sin \omega t \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= D_i^y - \sum_{m \neq i} \left(\frac{a_m}{r_{im}} \right)^2 \{ -D_m^y \cos 2 \theta_{im} + D_m^x \sin 2 \theta_{im} \} \quad \dots \dots \dots (16)
 \end{aligned}$$

さらに円柱群全体について、その x, y 方向振動に対する平均の水の付加質量係数は、

$$\left. \begin{aligned}
 F^x &= \sum_m a_m^2 F_m^x / \sum_m a_m^2 \\
 F^y &= \sum_m a_m^2 F_m^y / \sum_m a_m^2
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

以上を要するに、未定係数 D_m^x, D_m^y に関する連立一次方程式を作成して、これを解けば、円柱群の水中振動に対する動水圧および水の付加質量係数等のすべて必要な値を容易に求めることができる。

3. 2次元動水圧の数値計算結果と実験結果

直径 d がすべて等しい円柱を、その x および y 方向の中心点間距離が l になるように配置した円柱群について、式 (17) を用いてこの円柱群に対する水の付加質量係数を求めた。図-2 の実線に計算結果を示した。図中の縦軸 F_{mn} は行数 m 、列数 n の配置を有する $m \times n$ 本の円柱群が、行方向に振動したときの円柱群に対する水の付加質量係数の平均を示す。この結果は前論¹⁾の結果とまったく一致する。また、図-2 中の \circ, \triangle 印等は、前論¹⁾で行った円柱群の 2次元模型に対する実験結果を示す。

ここで、前論¹⁾で行った実験について簡単に述べる。多柱基礎模型用の円柱としては、直径 2.14 cm、長さ 20 cm、密度 1.41 g/cm³ の中実塩化ビニール製チューブを用いた。実験はそれぞれ 2, 4, 6, 9 本柱の場合について、各柱の中心点間距離をいろいろ変えて、各柱の両端を 20 cm × 20 cm × 0.3 cm (厚さ) のアルミ板で固定し、模型全体をコイルばねで水槽 (69.5 cm × 100 cm × 50 cm

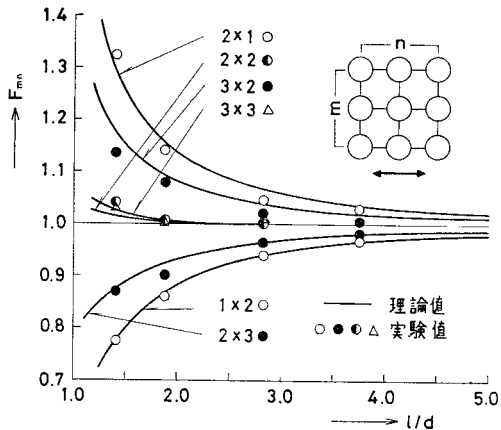


図-2 円柱群に対する水の付加質量係数の理論値と実験値 (2次元)

深さ) 中につるし、上下方向自由振動を行わせて、それぞれ水中および空気中における固有周期および減衰定数を測定した。多柱基礎模型に対する水の付加質量 W_a は次式によって求めた。

$$\frac{W_0 + W_a}{W_0} = \frac{T_w^2(1 - h_w^2)}{T_a^2(1 - h_a^2)}$$

ここに、 W_0 は空気中における振動質量、 T_a 、 T_w はそれぞれ空気中および水中における減衰自由振動周期、 h_a 、 h_w は空気中および水中における減衰定数である。実験は周期 0.43~0.72 秒、振幅 0.2~3 mm の範囲で行った。なお、上記の W_a に対しては、水の粘性による付加質量の補正を施した。補正理論については前論¹⁾ に詳論した。

図-3 は前述の各円柱群において、その円柱群を構成する各円柱に対する水の付加質量を、単円柱に対するそれを単位にとって、 $l/d=2.0$ の場合について示した。図から振動直角方向の動水圧は振動方向のそれに比較して非常に小さいことがわかる。

次に、直径の異なる円柱から構成された円柱群について、改めて前論¹⁾ と同様な実験装置を用いて水の付加質量を求める実験を行った。円柱の材料は中実の塩化ビニールチューブで、小さい方の円柱の直径は $d_0=2.14$

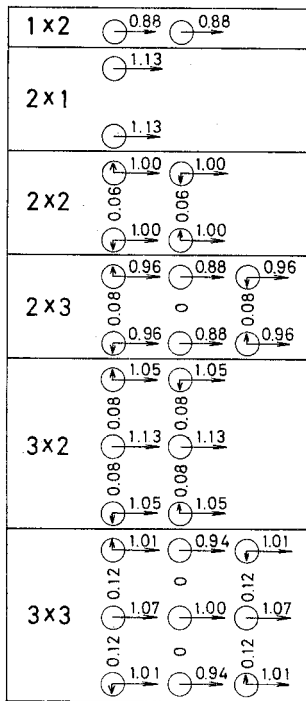


図-3 円柱群の各円柱に対する水の付加質量係数、 $l/d=2.0$ の場合 (2 次元)

cm、大きい方は $d_l=5.24$ cm である。得られた実験値に対しては、前論¹⁾ に詳論した方法で水の粘性に対する補正を行った。2 本柱および 5 本柱に対する実験結果 (○印) を理論値 (実線) とともに、図-4 および 5 に示した。両図はいずれも、その横軸に各円柱の x, y 方向中心点間距離 l と小円柱の直径との比 l/d_0 をとり、この l/d_0 をいろいろ変えたときに円柱群全体が排除する水の質量に対する水の付加質量係数の値をプロットしたものである。2 本柱については l/d_0 の最小値は

$$(d_0 + d_l)/2 d_0 = 1.725$$

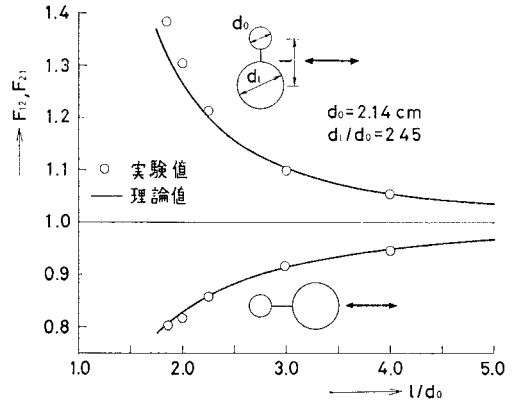


図-4 直径の異なる 2 本柱に対する水の付加質量係数の実験値と理論値 (2 次元)

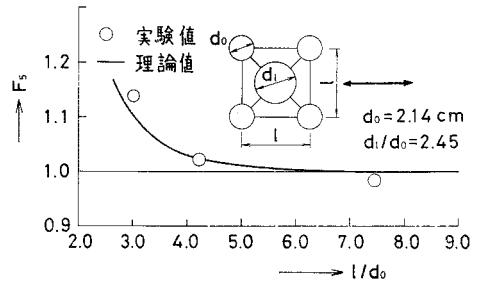


図-5 直径の異なる 5 本柱に対する水の付加質量係数の実験値と理論値 (2 次元)

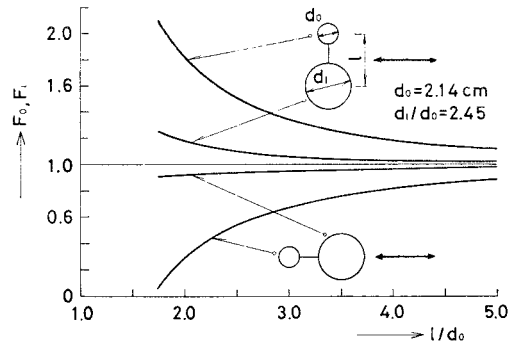


図-6 直径の異なる 2 本柱の各柱に対する水の付加質量係数 (2 次元)

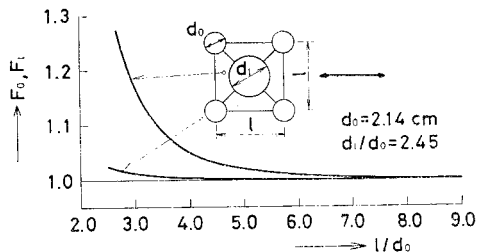


図-7 直径の異なる 5 本柱の各柱に対する水の付加質量係数 (2 次元)

5本柱では

$$(d_0 + d_1) / \sqrt{2} d_0 = 2.44$$

となる。直径の異なる円柱群についても前論¹⁾の場合と同様に、実験値と理論値は非常によく一致しているといえよう。

図-6, 7は直径の異なる2本柱および5本柱について、その各円柱に対する水の付加質量係数を l/d_0 に対してプロットしたものである。これは大円柱と小円柱に働く動水圧の分担割合を示すものである。2本柱においては大円柱の係数 F_1 は小円柱の係数 F_0 に比べてその変化は少ないが、5本柱においてはそれが逆転していることがわかる。

4. 3次元剛振動の動水圧理論

多柱基礎が水中で正弦的に剛振動する場合に、この多柱基礎に対する動水圧の3次元解析を、前章で述べたと同様な考え方に従って行った。いまの場合には、深さ方向に動水圧の分布の型が変化するので、この点を考慮しなければならないが、したがって、前章の2次元解析に比べてその計算式が複雑になることは避けられないが、それでも前論²⁾の方法と比較すれば本論の解析法の方がはるかに簡明である。

図-8に示すように、 i 柱、 j 柱、…から構成された多柱基礎が、水中で x および y 方向に円振動数 ω で正弦的に単位の加速度振幅で剛振動しているとき、水中の任意点 Q の動水圧は、実体波のみを考えれば、単柱の場合に対するそれを参照して次式のように表わすことができる。

$$\sigma_Q = \sum_{m=i, j, \dots}^N \sigma_m = -2 \frac{\omega_0}{g} \sum_{m=i, j, \dots}^N \sum_{k=1}^{\infty} a_m G_{mk} \cdot \{D_{mk}^x \cos \theta_m + D_{mk}^y \sin \theta_m\}$$

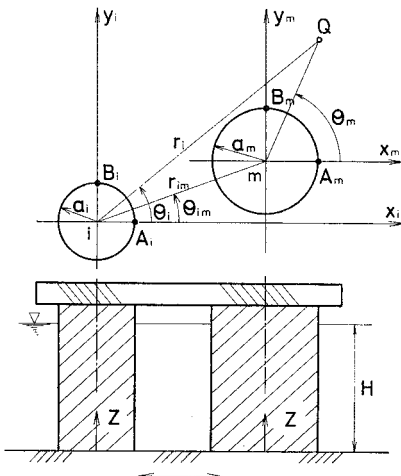


図-8 多柱基礎の水中剛振動

$$\cdot \cos \lambda_k z \cdot K_1(\eta_k' r_m) \sin \omega t \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \eta_k' &= \sqrt{\lambda_k^2 - C_0^2} \\ \lambda_k &: \cot \lambda_k H = -\delta \lambda_k H \text{ の解} \\ \delta &= gH/C^2 C_H^2 \\ C_0 &= \omega/C \\ C &= \sqrt{gE_v/\omega_0} \\ C_H &= C_0 H = \omega H/C \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$G_{mk} = \frac{4 \sin \lambda_k H}{\eta_k' a_m (\sin 2 \lambda_k H + 2 \lambda_k H)} * \dots\dots\dots (20)$$

$$* \{K_0(\eta_k' a_m) + K_2(\eta_k' a_m)\}$$

D_{mk}^x, D_{mk}^y は m 柱の x および y 方向振動に対する動水圧式中の未定係数、 $K_n(\eta_k' r_m)$ は第2種第 n 次の変形ベッセル関数、 H は水深、 E_v は水の体積弾性率、 g は重力の加速度である。

次に、各柱に対するそれぞれ x, y 方向の単位深さ当りの全動水圧は、たとえば i 柱については、

$$P_i^x = - \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_Q r_i \cos \theta_i \Big|_{r_i=a_i} d\theta_i \dots\dots\dots (21)$$

$$P_i^y = - \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_Q r_i \sin \theta_i \Big|_{r_i=a_i} d\theta_i \dots\dots\dots (22)$$

によって求められる。付録2を参照すれば、上式は次のように表わせる。

$$P_i^x = 2 \pi a_i^2 \frac{\omega_0}{g} \sum_{k=1}^{\infty} G_{ik} D_{ik}^x \cos \lambda_k z K_1(\eta_k' a_i) \sin \omega t$$

$$- 2 \pi \frac{\omega_0}{g} \sum_{m \neq i} a_m a_i \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk} I_1(\eta_k' a_i) \cdot [D_{mk}^x \{K_0(\eta_k' r_{im}) + K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2 \theta_{im}\} + D_{mk}^y K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2 \theta_{im}] \cos \lambda_k z \sin \omega t \dots\dots\dots (21)'$$

$$P_i^y = 2 \pi a_i^2 \frac{\omega_0}{g} \sum_{k=1}^{\infty} G_{ik} D_{ik}^y \cos \lambda_k z K_1(\eta_k' a_i) \sin \omega t$$

$$- 2 \pi \frac{\omega_0}{g} \sum_{m \neq i} a_m a_i \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk} I_1(\eta_k' a_i) \cdot [D_{mk}^x K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2 \theta_{im} + D_{mk}^y \{K_0(\eta_k' r_{im}) - K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2 \theta_{im}\}] \cos \lambda_k z \sin \omega t \dots\dots\dots (22)'$$

ここに、右辺第1項は i 柱自身の振動による動水圧、第2項以下は i 柱以外の柱の振動による i 柱への動水圧である。

さて、多柱基礎が水中で x 方向に単位加速度振幅の正弦振動を行っているときは、式(18)から求められる円柱表面における r 方向の動水圧勾配 α^r が、各円柱について次の境界条件

$$\alpha_m^r = \frac{\partial \sigma_Q}{\partial r_m} \Big|_{r_m=a_m} = \frac{\omega_0}{g} \cos \theta_m \sin \omega t \quad (m=i, j, \dots) \dots\dots\dots (23)$$

を満足しなければならない。同様にして y 方向振動に対

しては、

$$\alpha_m^r = \frac{\partial \sigma_Q}{\partial r_m} \Big|_{r_m=a_m} = \frac{w_0}{g} \sin \theta_m \sin \omega t \quad (m=i, j, \dots) \dots \dots (24)$$

である。ここで後の必要のために、式 (23), (24) の右辺を式 (19) から定められる固有値 λ_k を用いたフーリエ cosine 級数に展開すれば、上の境界条件式は次のように表わすことができる。

$$\alpha_m^r = \frac{\partial \sigma_Q}{\partial r_m} \Big|_{r_m=a_m} = \frac{w_0}{g} \cos \theta_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \sin \lambda_k H}{\sin 2 \lambda_k H + 2 \lambda_k H} \cos \lambda_k z \sin \omega t \quad \dots \dots \dots (23)'$$

$$\alpha_m^r = \frac{\partial \sigma_Q}{\partial r_m} \Big|_{r_m=a_m} = \frac{w_0}{g} \sin \theta_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \sin \lambda_k H}{\sin 2 \lambda_k H + 2 \lambda_k H} \cos \lambda_k z \sin \omega t \quad (m=i, j, \dots) \dots \dots (24)'$$

さて、式 (23)', (24)' の左辺の計算において、 m 柱の運動に基づく動水圧式を用いて、 i 柱表面における r 方向の動水圧勾配を厳密に求めることは非常に煩雑であり、実用的でないことは、前章の 2 次元の場合とまったく同様である。したがって、この場合も i 柱の中心位置における動水圧勾配を採用することによって、 m 柱の運動が i 柱に与える影響を近似的に評価した。また、式 (18) が多柱基礎の動水圧を厳密に表現するためには、さらに $\cos 2 \theta_m, \sin 2 \theta_m, \dots$ の項を加えなければならないこと、上述のような近似的な取扱いに対する誤差は l/d が大きくなればほとんど無視できることなどについても、2 次元の場合とまったく同様な議論が成り立つ。

次に、図-8 に示すように多柱基礎の各柱に対してその円柱表面上の 2 点 A_m, B_m において、半径方向の動水圧勾配がそれぞれ式 (23)', (24)' の境界条件を満足するように、式 (18) 中の未定係数 D_{mk}^x, D_{mk}^y を定めることにする。たとえば i 柱については、点 A_i, B_i における動水圧勾配は、上述の近似理論を考慮すればそれぞれ次式のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \alpha_i^r(A_i) &= \frac{\partial \sigma_i}{\partial r_i} \Big|_{r_i=a_i} + \sum_{m \neq i} \frac{\partial \sigma_m}{\partial r_i} \Big|_{r_i=0} \\ &= \frac{w_0}{g} \sum_{k=1}^{\infty} G_{ik} \eta_k' a_i D_{ik}^x \\ &\quad \cdot \{K_0(\eta_k' a_i) + K_2(\eta_k' a_i)\} \cos \lambda_k z \sin \omega t \\ &\quad + \frac{w_0}{g} \sum_{m \neq i} \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk} \eta_k' a_m \\ &\quad \cdot [D_{mk}^x \{K_0(\eta_k' r_{im}) \\ &\quad + K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2 \theta_{im}\} \\ &\quad + D_{mk}^y K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2 \theta_{im}] \\ &\quad \cdot \cos \lambda_k z \sin \omega t \dots \dots \dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i^r(B_i) &= \frac{\partial \sigma_i}{\partial r_i} \Big|_{r_i=a_i} + \sum_{m \neq i} \frac{\partial \sigma_m}{\partial r_i} \Big|_{r_i=0} \\ &= \frac{w_0}{g} \sum_{k=1}^{\infty} G_{ik} \eta_k' a_i D_{ik}^y \\ &\quad \cdot \{K_0(\eta_k' a_i) + K_2(\eta_k' a_i)\} \cos \lambda_k z \sin \omega t \\ &\quad + \frac{w_0}{g} \sum_{m \neq i} \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk} \eta_k' a_m \\ &\quad \cdot [D_{mk}^x K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2 \theta_{im} \\ &\quad + D_{mk}^y \{K_0(\eta_k' r_{im}) \\ &\quad - K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2 \theta_{im}\}] \cos \lambda_k z \sin \omega t \\ &\quad \dots \dots \dots (26) \end{aligned}$$

これより、多柱基礎が x 方向に水中で剛振動する場合には、たとえば i 柱については式 (23)' の右辺において、 $\theta_i=0$ および $\theta_i=\pi/2$ とした式をそれぞれ式 (25) および (26) に等置して、

$$\left. \begin{aligned} D_{ik}^x + \sum_{m \neq i} \frac{K_0(\eta_k' r_{im}) + K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2 \theta_{im}}{K_0(\eta_k' a_m) + K_2(\eta_k' a_m)} D_{mk}^x \\ + \sum_{m \neq i} \frac{K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2 \theta_{im}}{K_0(\eta_k' a_m) + K_2(\eta_k' a_m)} D_{mk}^y = 1 \\ D_{ik}^y + \sum_{m \neq i} \frac{K_0(\eta_k' r_{im}) - K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2 \theta_{im}}{K_0(\eta_k' a_m) + K_2(\eta_k' a_m)} D_{mk}^y \\ + \sum_{m \neq i} \frac{K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2 \theta_{im}}{K_0(\eta_k' a_m) + K_2(\eta_k' a_m)} D_{mk}^x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (k=1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (27)$$

を得る。また、 y 方向振動に対しても、同様にして式 (24)' と式 (25), (26) を用いれば、式 (27) の右辺の 1 を 0 に、0 を 1 にした式を得る。式 (27) を各円柱について求めれば、未定係数 D_{mk}^x, D_{mk}^y に関する多元連立一次方程式が得られる。この連立方程式（その元数は柱本数の 2 倍である）を $k=1, 2, \dots$ について解いて D_{mk}^x, D_{mk}^y を求めれば、式 (18) より多柱基礎の水中剛振動に対する動水圧が定まる。これより各柱に対する x および y 方向の水の付加質量係数の深さ方向の分布は、式 (21)', (22)' を用いて、 i 柱については次式によってこれを求めることができる。

$$\begin{aligned} F_i^x(z) &= P_i^x / \{\pi a_i^2 (w_0/g) \sin \omega t\} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} G_{ik} D_{ik}^x \cos \lambda_k z K_1(\eta_k' a_i) \\ &\quad - 2 \sum_{m \neq i} (a_m/a_i) \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk} I_1(\eta_k' a_i) \\ &\quad \cdot [D_{mk}^x \{K_0(\eta_k' r_{im}) + K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2 \theta_{im}\} \\ &\quad + D_{mk}^y K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2 \theta_{im}] \cos \lambda_k z \\ &\quad \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_i^y(z) &= P_i^y / \{\pi a_i^2 (w_0/g) \sin \omega t\} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} G_{ik} D_{ik}^y \cos \lambda_k z K_1(\eta_k' a_i) \\ &\quad - 2 \sum_{m \neq i} (a_m/a_i) \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk} I_1(\eta_k' a_i) \\ &\quad \cdot [D_{mk}^x K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2 \theta_{im} \end{aligned}$$

$$+D_{mk}^y \{K_0(\eta_k' r_{im}) - K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2\theta_{im}\} \cos \lambda_k z \dots \dots (29)$$

さらに多柱基礎全体について、その x, y 方向振動に対する水の付加質量係数の水平方向の平均値の深さ方向分布は、

$$\left. \begin{aligned} F^x(z) &= \frac{\sum_m a_m^2 F_m^x(z)}{\sum_m a_m^2} \\ F^y(z) &= \frac{\sum_m a_m^2 F_m^y(z)}{\sum_m a_m^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (30)$$

また、多柱基礎に対する水の付加質量係数の全平均値は、

$$\left. \begin{aligned} F^x &= \sum_m \int_0^H a_m^2 F_m^x(z) dz / \sum_m a_m^2 H \\ F^y &= \sum_m \int_0^H a_m^2 F_m^y(z) dz / \sum_m a_m^2 H \end{aligned} \right\} \dots \dots (31)$$

と表わされる。

したがって、結局、未定係数 D_{mk}^x, D_{mk}^y に関する連立一次方程式を作成して（これは式 (27) によってその各係数はただちに求めることができる）、これを $k=1, 2, \dots$ について解いて、適当な個数の k までを採用すれば、多柱基礎の水中剛振動に対する動水圧および水の付加質量係数等のすべて必要な値を容易に求めることができる。

5. 3次元剛振動に対する動水圧の計算結果

直径 d がすべて等しい円柱を、その x および y 方向の中心点間距離が l になるように配置した多柱基礎が、水中でそれぞれ x, y 方向に剛振動しているとき、この多柱基礎に対する水の付加質量係数の水平方向の平均値の z 方向分布を、それぞれ 2, 4, 6, 9 本柱の場合について式 (30) を用いて求めた。計算結果の一例を図-9 に示した。

また、多柱基礎に対する水の付加質量係数の全平均値を、 l/d をいろいろ変えてそれぞれ 2, 4, 6, 9 本柱の場合について、式 (31) によって求めた。結果の一例を図-10 に示す。4, 9 本柱の係数が2次元の場合の4, 9

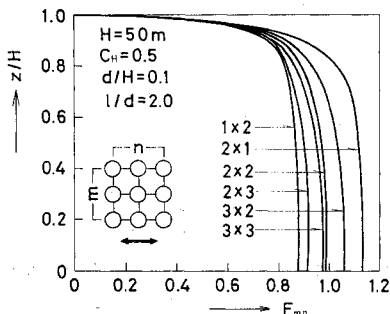


図-9 多柱基礎に対する水の付加質量係数の水平方向平均値の深さ方向分布 (3次元剛振動)

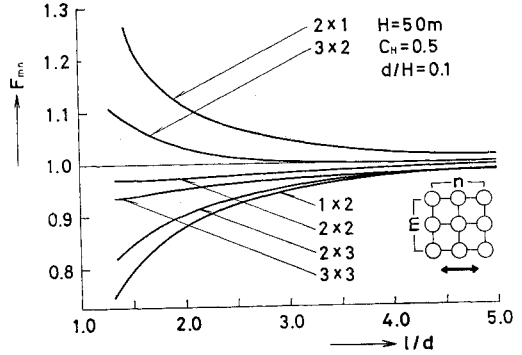


図-10 多柱基礎の水中剛振動に対する水の付加質量係数の全平均値

本柱のそれと違って、1より小さくなっている。図-9, 10において、2本柱の場合についてはすでに前論²⁾において計算済みであるが、それは本論の場合と一致した結果を示している。

図-11は一例として、図-10に示した結果の中から、 $l/d=2.0$ の場合について、多柱基礎を構成する各柱それぞれに対する水の付加質量と各柱が排除する水の質量との比を示したものである。2次元の場合と同様に、振動直角方向の動水圧は振動方向のそれに比べて非常に小さいことがわかる。

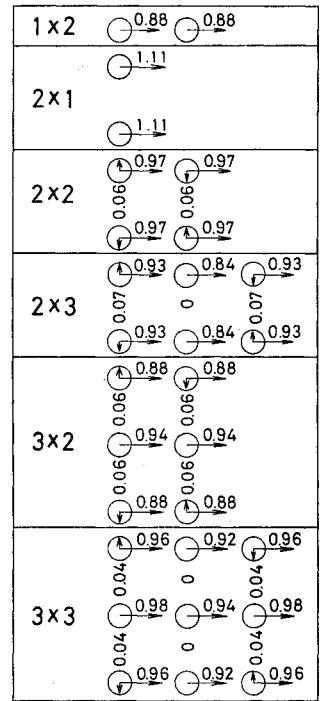


図-11 多柱基礎の各柱に対する水の付加質量係数, $H=50\text{ m}$, $C_H=0.5$, $d/H=0.1$, $l/d=2.0$ の場合 (3次元剛振動)

6. 弾性自由振動の動水圧理論

図-12に示すように、多柱基礎が水中で弾性自由振動を行っているとき、たとえば i 柱については、その弾性変形曲線 $\eta_i(z, t)$ は、 i 柱に対する単位長さ当たりの動水圧を $P_i(z, t)$ 、 i 柱のたわみの影響関数を $\zeta_i(z, \xi)$ とすれば次式によって与えられる。

$$\eta_i(z, t) = - \int_0^H \zeta_i(z, \xi) P_i(\xi, t) d\xi$$

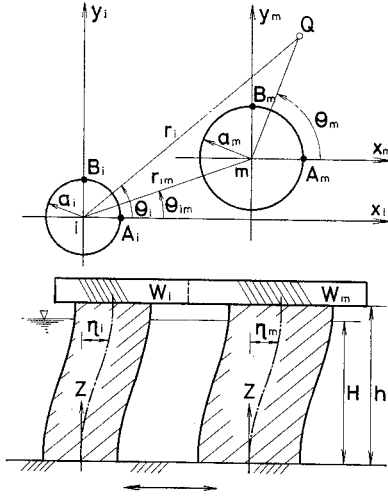


図-12 多柱基礎の水中弾性自由振動

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^h \zeta_i(z, \xi) \frac{w_i A_i}{g} \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \eta_i(\xi, t) \} d\xi \\
 & - \frac{W_i}{g} \zeta_i(z, h) \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \eta_i(h, t) \} \\
 & \dots\dots\dots(32)
 \end{aligned}$$

ここに、 $w_i A_i$ は i 柱の単位長さ当りの重量、 W_i は i 柱が負担する多柱基礎の天端重量、 H は水深、 h は柱の長さである。

さて、多柱基礎が水中で正弦的な弾性自由振動

$$\left. \begin{aligned}
 \eta_m^x(z, t) &= Y_m^x(z) \sin \omega t \\
 \eta_m^y(z, t) &= Y_m^y(z) \sin \omega t \quad (m=i, j, \dots)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

を行っているとき、水中の任意点 Q の動水圧は、実体波のみを考えれば単柱の場合を参照して次式のように表わすことができる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_Q &= \sum_{m=i, j, \dots} \sigma_m = -2 \frac{w_0}{g} \omega^2 \sum_{m=i, j, \dots} \sum_{k=1}^{\infty} a_m G_{mk}' \\
 & \cdot \left\{ D_{mk}^x \frac{1}{H} \int_0^H Y_m^x(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi \cdot \cos \theta_m \right. \\
 & \left. + D_{mk}^y \frac{1}{H} \int_0^H Y_m^y(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi \cdot \sin \theta_m \right\} \\
 & \cdot K_1(\eta_k' r_m) \cos \lambda_k z \sin \omega t \dots\dots\dots(34)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 G_{mk}' &= \frac{4 \lambda_k H}{\eta_k' a_m (\sin 2 \lambda_k H + 2 \lambda_k H)} * \\
 & * \{ K_0(\eta_k' a_m) + K_2(\eta_k' a_m) \} \dots\dots\dots(35)
 \end{aligned}$$

また、 D_{mk}^x 、 D_{mk}^y は m 柱の x および y 方向振動に対する動水圧式中の未定係数、 $Y_m^x(z)$ 、 $Y_m^y(z)$ は m 柱の弾性変位振幅である。式 (34) より各柱に対するそれぞれ x 、 y 方向の単位深さ当りの全動水圧は、 i 柱については次式のように得られる。

$$P_i^x = - \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_Q r_i \cos \theta_i \Big|_{r_i=a_i} d\theta_i$$

$$\begin{aligned}
 & = 2 \pi a_i^2 \frac{w_0}{g} \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} G_{ik}' D_{ik}^x \\
 & \cdot \frac{1}{H} \int_0^H Y_i^x(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi \cdot K_1(\eta_k' a_i) \cos \lambda_k z \sin \omega t \\
 & - 2 \pi \frac{w_0}{g} \omega^2 \sum_{m \neq i} a_m a_i \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk}' I_1(\eta_k' a_i) \\
 & \cdot \left[D_{mk}^x \{ K_0(\eta_k' r_{im}) + K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2 \theta_{im} \} \right. \\
 & \cdot \frac{1}{H} \int_0^H Y_m^x(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi \\
 & \left. + D_{mk}^y K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2 \theta_{im} \right. \\
 & \left. \cdot \frac{1}{H} \int_0^H Y_m^y(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi \right] \cdot \cos \lambda_k z \sin \omega t \\
 & \dots\dots\dots(36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_i^y &= - \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_Q r_i \sin \theta_i \Big|_{r_i=a_i} d\theta_i \\
 & = 2 \pi a_i^2 \frac{w_0}{g} \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} G_{ik}' D_{ik}^y \\
 & \cdot \frac{1}{H} \int_0^H Y_i^y(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi \cdot K_1(\eta_k' a_i) \cos \lambda_k z \sin \omega t \\
 & - 2 \pi \frac{w_0}{g} \omega^2 \sum_{m \neq i} a_m a_i \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk}' I_1(\eta_k' a_i) \\
 & \cdot \left[D_{mk}^x K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2 \theta_{im} \right. \\
 & \cdot \frac{1}{H} \int_0^H Y_m^x(\xi) \cdot \cos \lambda_k \xi d\xi \\
 & \left. + D_{mk}^y \{ K_0(\eta_k' r_{im}) - K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2 \theta_{im} \} \right. \\
 & \left. \cdot \frac{1}{H} \int_0^H Y_m^y(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi \right] \cdot \cos \lambda_k z \sin \omega t \\
 & \dots\dots\dots(37)
 \end{aligned}$$

多柱基礎が水中で x 方向に正弦振動を行っているときは、式 (34) から求められる円柱表面における r 方向の動水圧勾配 α^r が、各円柱について次の境界条件

$$\begin{aligned}
 \alpha_m^r &= \frac{\partial \sigma_Q}{\partial r_m} \Big|_{r_m=a_m} = - \frac{w_0}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \eta_m^x(z, t) \} \cos \theta_m \\
 & = \frac{w_0}{g} \omega^2 Y_m^x(z) \cos \theta_m \sin \omega t \quad (m=i, j, \dots) \\
 & \dots\dots\dots(38)
 \end{aligned}$$

を満足していなければならない。同様に y 方向振動に対しては、

$$\begin{aligned}
 \alpha_m^r &= \frac{\partial \sigma_Q}{\partial r_m} \Big|_{r_m=a_m} = - \frac{w_0}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{ \eta_m^y(z, t) \} \sin \theta_m \\
 & = \frac{w_0}{g} \omega^2 Y_m^y(z) \sin \theta_m \sin \omega t \quad (m=i, j, \dots) \\
 & \dots\dots\dots(39)
 \end{aligned}$$

いま、 $h=H$ すなわち柱の長さが水深に等しい場合を取扱うことにして、式 (33) の右辺の $Y_m^x(z)$ 、 $Y_m^y(z)$ を固有値 λ_k を用いたフーリエ cosine 級数に展開して表わせば、

$$Y_m^x(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk}^x \cos \lambda_k z$$

$$Y_m^y(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk}^y \cos a_k z \quad \dots\dots\dots (40)$$

ここに、 B_{mk}^x, B_{mk}^y は $Y_m^x(z), Y_m^y(z)$ が与えられれば定まるフーリエ係数である。

式 (40) を式 (38), (39) の右辺に代入すれば次式を得る。

$$\alpha_m^r = \frac{\omega_0}{g} \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk}^x \cos \theta_m \cos \lambda_k z \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (38)'$$

$$\alpha_m^r = \frac{\omega_0}{g} \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk}^y \sin \theta_m \cos \lambda_k z \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (39)'$$

さて、弾性自由振動の場合も前章の場合とまったく同様に考えて、たとえば i 柱についてはその中心位置における動水圧勾配を採用することによって、 m 柱の運動が i 柱に与える影響を近似的に評価することにすれば、図-12 において点 A_i, B_i の動水圧勾配は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} \alpha_i^r(A_i) &= \frac{\partial \sigma_i}{\partial r_i} \Big|_{r_i=a_i} + \sum_{m \neq i} \frac{\partial \sigma_m}{\partial r_i} \Big|_{r_i=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{g} \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} R_k G_{ik}' \eta_k' a_i B_{ik}^x D_{ik}^x \\ &\quad \cdot \{K_0(\eta_k' a_i) + K_2(\eta_k' a_i)\} \cos \lambda_k z \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} D_{ik}^x + \sum_{m \neq i} \left[\frac{B_{mk}^x}{B_{ik}^x} \frac{K_0(\eta_k' r_{im}) + K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2\theta_{im}}{K_0(\eta_k' a_i) + K_2(\eta_k' a_i)} D_{mk}^x + \frac{B_{mk}^y}{B_{ik}^x} \frac{K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2\theta_{im}}{K_0(\eta_k' a_i) + K_2(\eta_k' a_i)} D_{mk}^y \right] &= 1 \\ D_{ik}^y + \sum_{m \neq i} \left[\frac{B_{mk}^x}{B_{ik}^y} \frac{K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2\theta_{im}}{K_0(\eta_k' a_i) + K_2(\eta_k' a_i)} D_{mk}^x + \frac{B_{mk}^y}{B_{ik}^y} \frac{K_0(\eta_k' r_{im}) - K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2\theta_{im}}{K_0(\eta_k' a_i) + K_2(\eta_k' a_i)} D_{mk}^y \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (44)$$

を得る。また、 y 方向振動に対しても同様に式 (39)' と式 (41), (42) とを用いれば、式 (44) の右辺の 1 を 0 に、0 を 1 にした式を得る。式 (44) を各円柱について求めれば、未定係数 D_{mk}^x, D_{mk}^y に関する多元連立一次方程式が得られる。この連立方程式（その元数は柱の本数の 2 倍である）を $k=1, 2, \dots$ について解いて D_{mk}^x, D_{mk}^y を求めれば、式 (36), (37) より多柱基礎の水中弾性自由振動に対する動水圧が定まる。

さて、以上で動水圧の表示式が得られたので、改めて多柱基礎の水中弾性振動の運動方程式について考える。前述の D_{mk}^x, D_{mk}^y を用いれば、式 (36), (37) より i 柱の x および y 方向の動水圧 P_i^x, P_i^y を求めることができるが、いまこれを

$$\left. \begin{aligned} P_i^x &= \pi a_i^2 \frac{\omega_0}{g} \omega^2 \bar{P}_{ix}(z) \sin \omega t \\ P_i^y &= \pi a_i^2 \frac{\omega_0}{g} \omega^2 \bar{P}_{iy}(z) \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (45)$$

と書けば、式 (32) より多柱基礎の x および y 方向の振動に対しては、たとえば i 柱について次式が成立する。

$$\frac{Y_i^x(z)}{\omega^2} = \frac{\pi a_i^2 \omega_0}{g} \int_0^H \zeta_i(z, \xi) \bar{P}_i^x(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{g} \omega^2 \sum_{m \neq i} \sum_{k=1}^{\infty} R_k G_{mk}' \eta_k' a_m \\ &\cdot [B_{mk}^x D_{mk}^x \{K_0(\eta_k' r_{im}) \\ &+ K_2(\eta_k' r_{im}) \cdot \cos 2\theta_{im}\} \\ &+ B_{mk}^y D_{mk}^y K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2\theta_{im}] \\ &\cdot \cos \lambda_k z \sin \omega t \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i^r(B_i) &= \frac{\partial \sigma_i}{\partial r_i} \Big|_{r_i=a_i} + \sum_{m \neq i} \frac{\partial \sigma_m}{\partial r_i} \Big|_{r_i=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{g} \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} R_k G_{ik}' \eta_k' a_i B_{ik}^y D_{ik}^y \\ &\quad \cdot \{K_0(\eta_k' a_i) + K_2(\eta_k' a_i)\} \cos \lambda_k z \sin \omega t \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{g} \omega^2 \sum_{m \neq i} \sum_{k=1}^{\infty} R_k G_{mk}' \eta_k' a_m \\ &\quad \cdot [B_{mk}^x D_{mk}^x K_2(\eta_k' r_{im}) \sin 2\theta_{im} \\ &+ B_{mk}^y D_{mk}^y \{K_0(\eta_k' r_{im}) \\ &- K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2\theta_{im}\}] \cos \lambda_k z \sin \omega t \\ &\quad \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

ここに、

$$R_k = (\sin 2\lambda_k H + 2\lambda_k H) / (2\lambda_k H) \quad \dots\dots\dots (43)$$

これより多柱基礎が x 方向に水中で弾性自由振動する場合には、たとえば i 柱については式 (38)' の右辺において、 $\theta_i=0$ および $\theta_i=\pi/2$ とした式をそれぞれ式 (41), (42) に等置して、

$$\begin{aligned} &+ \frac{w_i A_i}{g} \int_0^H \zeta_i(z, \xi) Y_i^x(\xi) d\xi \\ &+ \frac{W_i}{g} \zeta_i(z, H) Y_i^x(H) \quad \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Y_i^y(z)}{\omega^2} &= \frac{\pi a_i^2 \omega_0}{g} \int_0^H \zeta_i(z, \xi) \bar{P}_i^y(\xi) d\xi \\ &+ \frac{w_i A_i}{g} \int_0^H \zeta_i(z, \xi) Y_i^y(\xi) d\xi \\ &+ \frac{W_i}{g} \zeta_i(z, H) Y_i^y(H) \quad \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

まず、 x 方向の振動を考える。式 (46), (47) 中の動水圧式 $\bar{P}_i^x(z), \bar{P}_i^y(z)$ は各円柱の円振動数 ω および弾性変位振幅 $Y_m^x(z), Y_m^y(z)$ が与えられなければこれを計算することができない。したがって、いま、多柱基礎の水中弾性自由振動の円振動数と各柱の弾性変位振幅とを適当に仮定して、

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_{(1)} \quad \dots\dots\dots (48) \\ Y_m^x(z) &= Y_{m(1)}^x(z) \\ Y_m^y(z) &= Y_{m(1)}^y(z) \quad (m=i, j, \dots) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (49)$$

とする。これらの値を用いて各柱に対して式 (46), (47) の右辺を計算し、いまそれを $U_{m(1)}^x(z), U_{m(1)}^y(z)$ ($m=$

i, j, \dots とおく。ここで多柱基礎がその天端の x 方向の変位振幅が 1 になるような振動をしていると仮定すれば、各柱は、

$$Y_m^x(H) = 1, \quad Y_m^y(H) = 0 \quad (m = i, j, \dots) \quad \dots\dots\dots(50)$$

で与えられる境界条件を満足することが必要である。したがって、これより、多柱基礎の水中弾性自由振動の第 2 次近似値

$$\omega_{(2)} = \sqrt{Y_i^x(H)/U_{i(1)}^x(H)} \quad \dots\dots\dots(51)$$

を得る。さらに、この値を式 (46), (47) に代入すれば、各円柱の弾性変位振幅の第 2 次近似解

$$\left. \begin{aligned} Y_{m(2)}^x(z) &= \omega_{(2)}^2 U_{m(1)}^x(z) \\ Y_{m(2)}^y(z) &= \omega_{(2)}^2 U_{m(1)}^y(z) \quad (m = i, j, \dots) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(52)$$

を得る。いま、 $\omega_{(2)}$, $Y_{m(2)}^x(z)$, $Y_{m(2)}^y(z)$ と $\omega_{(1)}$, $Y_{m(1)}^x(z)$, $Y_{m(1)}^y(z)$ とが、ある適当な小さな正数 ϵ , ϵ_m に対して次に示すような収束条件

$$|(\omega_{(2)}^2 - \omega_{(1)}^2)/\omega_{(2)}^2| < \epsilon \quad \dots\dots\dots(53)$$

$$\int_0^H \left\{ \frac{Y_{m(2)}^x(z)}{Y_{m(2)}^x(H)} - \frac{Y_{m(1)}^x(z)}{Y_{m(1)}^x(H)} \right\}^2 dz < \epsilon_m \quad (m = i, j, \dots) \quad \dots\dots\dots(54)$$

を満足すれば、この第 2 次近似値をもって解とする。もし上の収束条件が満たされない場合には、改めてこの第 2 次近似値を初期値として用いて上述の計算手順をくり返す。これらの計算手順は、上述のくり返し計算の各段階で、式 (44) に示す連立方程式を解かねばならぬことを除けば、本質的には単柱の場合のそれと同様である。

また、多柱基礎の y 方向振動に対しても x 方向振動の場合と同様に考えればよい。

各柱に対する水の付加質量係数の深さ方向の分布は、式 (36), (37) を用いて、

$$\left. \begin{aligned} F_i^x(z) &= P_i^x \left\{ \pi a_i^2 \frac{w_0}{g} \omega^2 Y_i^x(z) \sin \omega t \right\} \\ F_i^y(z) &= P_i^y \left\{ \pi a_i^2 \frac{w_0}{g} \omega^2 Y_i^y(z) \sin \omega t \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(55)$$

で与えられる。さらに、多柱基礎に対する水の付加質量係数の水平方向の平均値および多柱基礎に対する水の付加質量係数の全平均値については、剛振動の場合の式 (30), (31) とほとんど同様な式によって表わされる。

7. 弾性自由振動に対する動水圧の計算結果

多柱基礎の水中弾性自由振動に対する動水圧を計算するためには、影響関数 $\zeta_i(z, \xi)$ を必要とする。いま、その下端が完全固定され、上端が回転拘束されている多柱基礎を考えれば、求める影響関数を計算することがで

きて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_i(z, \xi) &= \frac{H^3}{12 E_i I_i} \left(\frac{z}{H} \right)^2 \left\{ -2 \left(\frac{z}{H} \right) + 6 \left(\frac{\xi}{H} \right) - 3 \left(\frac{\xi}{H} \right)^2 \right\} \quad (0 \leq z \leq \xi) \\ \zeta_i(z, \xi) &= \frac{H^3}{12 E_i I_i} \left(\frac{\xi}{H} \right)^2 \left\{ -3 \left(\frac{z}{H} \right)^2 + 6 \left(\frac{z}{H} \right) - 2 \left(\frac{\xi}{H} \right) \right\} \quad (\xi \leq z \leq H) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(56)$$

ここに、 $E_i I_i$ は各柱の曲げ剛性である。

また、多柱基礎の x 方向 1 次型水中弾性振動に対する動水圧を求めるのに、円振動数 ω , 各柱の x および y 方向の弾性変位振幅 $Y_m^x(z)$, $Y_m^y(z)$ の出発値としては、 $\omega = \omega_{(1)}$ (多柱基礎の空気中における第 1 次固有円振動数)、 $Y_m^x(z) = \phi_1(z)$ (同じく第 1 次の振動形)、 $Y_m^y(z) = 0$ を採用した。同様に、 y 方向振動に対しては、 $\omega = \omega_{(1)}$, $Y_m^x(z) = 0$, $Y_m^y(z) = \phi_1(z)$ を用いればよい。

本論では、等しい直径をもつ円柱から構成された 2 本柱の x および y 方向の水中弾性振動の第 1 次型自由振動に対する動水圧および水の付加質量係数を $h = H, d/h, l/d, W/wAh, \pi a^2 w_0/wA$ の値をいろいろ変えた場合について計算した。得られた結果の一例のみを 図-13 に示した。同図には多柱基礎の空気中の第 1 次振動形 $\phi_1(z)$, x および y 方向に対する動水圧の分布型 $Y_i(z) \cdot F_{mn}$, 水の付加質量係数 F_{mn} が示されている。これら 2 本柱の場合の数値計算結果は前論²⁾のそれと同一であった。

なお、数値計算で採用した固有値 λ_k の数は 150 個である。また、空気中の振動型と水中のそれとは、あまり大きな差がないので、収束のための数値計算のくり返し回数は少なく、いずれの場合についても 3 回で、 $\omega_{(3)}$ と $\omega_{(2)}$ との相対誤差は 1/10 000 の程度であった。

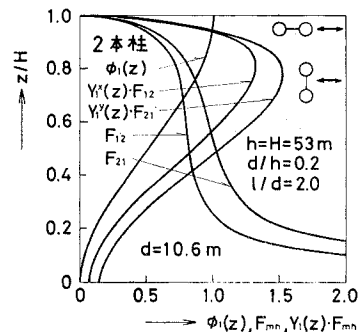


図-13 多柱基礎に対する水の付加質量係数の全平均値、動水圧、空気中振動形、 $W/wAh = 1.0, \pi a^2 w_0/wA = 0.5$ の場合 (一次形弾性自由振動)

8. おわりに

以上に詳論したように、本論の方法は本質的には連立一次方程式を作成してそれを解くだけで、円柱群の2次元振動、3次元剛振動および弾性自由振動のいずれの場合についても、それに働く動水圧を容易に計算できる一般的な方法であって、前論の方法におけるように、境界条件を満足するように逐次近似的に動水圧式を修正してゆく方法と比較すると、本論の方法に従えば、見通しよく、よりすっきりした手順によって問題の解を得ることができる。動水圧式中に導入された未定係数に関する連立方程式の各係数行列の要素は、すべての場合について非常に簡単な式によってこれを求めることができるので、前論の方法と比較して計算時間も1/2~1/3に短縮することができる。しかも本論の方法では、任意の柱径および配置を有する多柱基礎に働く地震時動水圧をも容易に計算することができる。本論において簡単化のために導入した仮定に起因する誤差すなわち l/d が小さいとき ($l/d < 1.5$) に生ずる誤差については、実規模の多柱基礎がほとんどすべて $l/d \geq 2 \sim 2.5$ であることを考えれば、本論の仮定は実用上許され得る仮定であるといえよう。

付録 1

式 (3), (4) の右辺の計算をするのに必要な積分

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r_i}{r_m} \cos \theta_m \cos \theta_i \Big|_{r_i=a_i} d\theta_i \dots\dots\dots (1.1)$$

等を求めるには、図-1 に示すように、各円柱の中心を原点とする局所座標系相互間に成立する次の関係式

$$\left. \begin{aligned} r_m^2 &= r_i^2 + r_{im}^2 - 2 r_i r_{im} \cos(\theta_i - \theta_{im}) \\ r_m \cos \theta_m &= r_i \cos \theta_i - r_{im} \cos \theta_{im} \\ r_m \sin \theta_m &= r_i \sin \theta_i - r_{im} \sin \theta_{im} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.2)$$

を用い、さらに $\theta = \theta_i - \theta_{im}$ の変数変換を行って、

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r_i r_m}{r_m^2} \cos \theta_m \cos \theta_i \Big|_{r_i=a_i} d\theta_i \\ &= \frac{1}{a_i^2 + r_{im}^2} \int_{-\pi + \theta_{im}}^{\pi + \theta_{im}} \frac{a_i^2 \cos^2(\theta + \theta_{im}) - a_i r_{im} \cos \theta_{im} \cos(\theta + \theta_{im})}{1 - 2 a_i r_{im} \cos \theta / \{a_i^2 + r_{im}^2\}} d\theta \end{aligned}$$

とし、 $0 < 2 a_i r_{im} / (a_i^2 + r_{im}^2) < 1$ に注意すれば、不定積分

$$\int \frac{d\theta}{1 - \varepsilon \cos \theta} = \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \tan^{-1} \frac{(1 + \varepsilon) \tan(\theta/2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (0 < \varepsilon < 1) \dots\dots\dots (1.3)$$

を利用して、結局、

$$I = -\pi \left(\frac{a_i}{r_{im}} \right)^2 \cos 2 \theta_{im} \dots\dots\dots (1.4)$$

を得る。他の積分についても同様である。

付録 2

式 (21), (22) の右辺の計算をするには、

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} K_1(\eta_k' r_m) \cos \theta_m \cos \theta_i \Big|_{r_i=a_i} d\theta_i \dots (2.1)$$

等の積分を実行しなければならない。いま、上式の積分範囲を次のように変えたらうえで少し変形すると、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\pi + \theta_{im}}^{\pi + \theta_{im}} K_1(\eta_k' r_m) \{ \cos(\theta_m - \theta_i) \\ &\quad + \cos(\theta_m + \theta_i) \} \Big|_{r_i=a_i} d\theta_i \dots\dots\dots (2.2) \end{aligned}$$

右辺第1項の積分を I_1 、第2項のそれを I_2 とおく。

図-1 において成立する次の関係式

$$\left. \begin{aligned} r_m \sin(\theta_m - \theta_{im}) &= r_i \sin(\theta_i - \theta_{im}) \\ r_m \cos(\theta_m - \theta_{im}) &= r_i \cos(\theta_i - \theta_{im}) - r_{im} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3)$$

を用いれば、

$$\begin{aligned} \cos(\theta_m - \theta_i) &= \cos\{(\theta_m - \theta_{im}) - (\theta_i - \theta_{im})\} \\ &= (r_i/r_m) \{1 - (r_{im}/r_i) \cos(\theta_i - \theta_{im})\} \end{aligned}$$

であるから、ここで $\theta = \theta_i - \theta_{im}$ の変数変換を行えば、

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi + \theta_{im}}^{\pi + \theta_{im}} K_1(\eta_k' r_m) \cos(\theta_m - \theta_i) \Big|_{r_i=a_i} d\theta_i \\ &= \frac{1}{2} \eta_k' a_i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K_1(\eta_k' r_m)}{\eta_k' r_m} \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{r_{im}}{a_i} \cos \theta\right) \Big|_{r_i=a_i} d\theta \dots\dots\dots (2.4) \end{aligned}$$

と表わせる。数学公式 III⁶⁾ より、

$$\begin{aligned} \frac{K_1(\eta_k' r_m)}{\eta_k' r_m} \Big|_{r_i=a_i} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_n^1(\cos \theta) \\ &\quad \cdot \frac{K_{n+1}(\eta_k' r_{im})}{\eta_k' r_{im}} \cdot \frac{I_{n+1}(\eta_k' a_i)}{\eta_k' a_i} \dots\dots\dots (2.5) \end{aligned}$$

ここに、 $I_n(\eta_k' a_i)$ は第1種第 n 次の変形ベッセル関数、 $C_n^1(\cos \theta)$ は Gegenbauer の多項式である。

式 (2.5) を式 (2.4) に代入すれば、

$$\begin{aligned} I_1 &= \eta_k' a_i \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{K_{n+1}(\eta_k' r_{im})}{\eta_k' r_{im}} \cdot \frac{I_{n+1}(\eta_k' a_i)}{\eta_k' a_i} \\ &\quad \cdot \int_{-\pi}^{\pi} C_n^1(\cos \theta) \left(1 - \frac{r_{im}}{a_i} \cos \theta\right) d\theta \dots (2.6) \end{aligned}$$

上式において、

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} C_n^1(\cos \theta) \left(1 - \frac{r_{im}}{a_i} \cos \theta\right) d\theta \\ &= \begin{cases} 2\pi & (n=2l) \\ -2\pi r_{im}/a_i & (n=2l+1) \end{cases} \quad (l=0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

であるから、式 (2.6) は、

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \pi \eta_k' a_i \sum_{l=0}^{\infty} \left[2(2l+1) \frac{K_{2l+1}(\eta_k' r_{im})}{\eta_k' r_{im}} \right. \\
 & \cdot \frac{I_{2l+1}(\eta_k' a_i)}{\eta_k' a_i} - 2(2l+2) \frac{K_{2l+2}(\eta_k' r_{im})}{\eta_k' r_{im}} \\
 & \left. \cdot \frac{I_{2l+2}(\eta_k' a_i)}{\eta_k' a_i} \frac{r_{im}}{a_i} \right] \\
 = & -\pi \sum_{l=0}^{\infty} [I_{2l+1}(\eta_k' a_i) K_{2l}(\eta_k' r_{im}) \\
 & - I_{2l+2}(\eta_k' a_i) K_{2l+2}(\eta_k' r_{im})] \dots \dots \dots (2.7)
 \end{aligned}$$

上式において、 $l \rightarrow \infty$ のとき $I_{2l+3}(\eta_k' a_i) K_{2l+2}(\eta_k' r_{im}) \rightarrow 0$ であるから、

$$I_1 = -\pi I_1(\eta_k' a_i) K_0(\eta_k' r_{im}) \dots \dots \dots (2.8)$$

を得る。同様にして、

$$I_2 = -\pi I_1(\eta_k' a_i) K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2\theta_{im} \dots \dots \dots (2.9)$$

したがって、

$$I = I_1 + I_2 = -\pi I_1(\eta_k' a_i) \{K_0(\eta_k' r_{im})$$

$$+ K_2(\eta_k' r_{im}) \cos 2\theta_{im}\} \dots \dots \dots (2.10)$$

である。他の積分についても同様である。

参 考 文 献

- 1) 小坪清真・高西照彦：多柱基礎への水の附加質量について，土木学会論文報告集，No. 248, 1976. 4.
- 2) 小坪清真・高西照彦：多柱基礎橋脚に対する水の附加質量の3次元解析，土木学会論文報告集，No. 259, 1977. 3.
- 3) Yamamoto T. : Hydrodynamic forces on multiple circular cylinders, Trans. A.S.C.E., Vol. 102, No. HY 9, 1976.9.
- 4) 富田久雄・佐々木陽一：水中における管群の振動（第1, 2報），日本機械学会講演論文集，No. 700-17, 1970.10.
- 5) 笠井洋昭・加賀不亀男：流体中における棒群の連成振動解析，日本機械学会講演論文集，No. 730-14, 1973.10.
- 6) 森口繁一・宇田川銈久・一松 信：数学公式 III，岩波全書，岩波書店，1975.12.

(1977.7.15・受付)