

# 数値濾波の計算法と地震記録の 非定常スペクトル解析への応用

COMPUTATIONAL METHODS OF FILTERING AND TIME-VARING  
POWER SPECTRA OF EARTHQUAKE ACCELEROGRAMS

吉田 裕\*・増田陳紀\*\*・澤 正\*\*\*・若菜弘之\*\*\*\*  
By Yutaka YOSHIDA, Nobutoshi MASUDA, Tadashi SAWA  
and Hiroyuki WAKANA

## 1. はじめに

構造物の耐震性を応答解析によって検討することが行われる。この場合、解析の対象として具体的な地震入力波形を設定することが必要となるが、地震動は発生機構、マグニチュード、震央距離、伝播経路など多くの因子の影響を受け、予測の困難な非再現性を有している。このため耐震設計の対象とすべき地震入力波形を、これまでに観測されている数多くの記録の中から選択、またはそれらの記録に基づいて人工的に構成する過程には数多くの困難な問題点が内在する。

地震動の解析に非定常パワースペクトルの概念<sup>1)~3)</sup>を導入し、実際の記録波形を対象とした解析やこれの計算法などに関する研究<sup>4)~13)</sup>を通じ、地震動の特性を把握する手段および地震動特性そのものが徐々に明らかにされてきている。しかし、地表近くで観測される地震動そのものを確率過程として捕えることは是非または限界、非定常パワースペクトルに関する種々の理論的定義に対する適用面からの妥当性の判断、実行可能な計算手段を通じて得られる解析結果と理論的定義そのものとの間に残る不明確さ、また何よりも耐震設計において要求される目的との相対での工学的判断に関連する課題、など基本的な段階においても数多くの本質的な問題点がさらに検討を要する事項として残されていることも事実である。

著者らは、加速度波形の積分とはりの静力学的解析とのアナロジーに着目し、弾性床上のはりの変位および部材力をマトリックス法によって求める計算のアルゴリズムを加速度波形の濾波および積分計算として用いることができることを説明し、地震加速度記録の基準線の補正

\* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 東京工業大学助手 工学部土木工学科

\*\*\* 正会員 工修 日本鋪道(株)

\*\*\*\* 学生会員 東京工業大学大学院修士課程(現日本鋼管)

および積分計算に適用した解析例を示した<sup>14)</sup>。本論文においては、濾波計算の基礎となる微分方程式をより一般化した形で与え、微分方程式の解析過程に有限要素技法を適用して得られる、いっそう汎用的な数値濾波および積分計算法を提案する。さらに、現状を打開するすべは信頼性の高い計算法を確立することにあるという考えに基づき、地震記録波形処理解析への応用として、観測された1つの確定地震波を念頭に置いた、確定時間関数の数値処理に、上述の濾波計算法を適用した過程および結果について報告する。すなわち、提案するデジタル・フィルターに基づいた非定常パワースペクトルの計算法を提示し、得られた非定常パワースペクトルに基づいて波形を再合成し、応答スペクトルおよびパワーの保存の点から原波形と再合成された波形とを比較検討する。

本研究の目的は、これまでに記録されたいくつかの波形に基づいて、設計の面から要求される特性を代表する(たとえば、基になるいくつかの波形の応答スペクトルの最大値の包絡線を応答スペクトルとして与えるような)、1つの波形を構成する過程を確立することにあるが、本論文の範囲内では、1つの確定地震波(1940年 Imperial Valley 地震の El Centro における記録波形(NS成分)<sup>15)</sup>)のみを対象として、波形の分析およびその結果に基づいて、原波形の周波数特性、時間方向の分布特性、パワーの保存などの基本的な諸特性を保持する新たな波形を構成する手法を提案することに限定して報告する。

## 2. 数値濾波の計算法†

### (1) 濾波計算の基礎となる微分方程式とフィルターとしての特性

濾波計算の基礎となる微分方程式として、次のような

† 日本鋼構造協会第9回大会研究集会マトリックス構造解析法発表論文集(昭50.6)に概要を発表。

2n 階の微分方程式を提案する。

$$(-1)^n \alpha \varphi^{(2n)} + \beta \varphi = \bar{f} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $\varphi(t)$ ：未知変数、 $\varphi^{(2n)} \equiv d^{2n}\varphi/dt^{2n}$ 、 $\alpha, \beta$ ：正の定数、 $\bar{f}(t)$ ：入力、 $\beta\varphi$ ：出力、である。

与えられた入力  $\bar{f}$  に対して、基礎方程式 (1) の解  $\varphi$  を求める過程が濾波計算の過程を構成することを以下に示す。

すなわち、式 (1) の補解  $\varphi_i$  は次式で与えられる。

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=1}^{2n} c_k \exp\{p(\cos \theta_k + i \sin \theta_k)t\} \dots\dots (2)$$

ここに、 $p^{2n} = \beta/\alpha$ 、 $\theta_k = (2k/2n)\pi$  ( $n$  が奇数のとき)、 $= (2(k-1)/2n)\pi$  ( $n$  が偶数のとき)、 $c_k$ ：積分定数、である。

また、特解  $\varphi_0$  は、入力  $\bar{f}(t)$  を

$$\bar{f}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{im\omega_0 t} \dots\dots\dots (3)$$

と展開するとき、次のように表わされる。

$$\varphi_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [1/(\alpha\omega^{2n} + \beta)] f_m e^{im\omega_0 t} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\omega = m\omega_0$  である。

式 (4) から、式 (1) の特解だけを考える場合には、式 (1) のシステムにおける出力  $\beta\varphi_0$  の、入力  $\bar{f}$  に対する周波数応答関数  $H(\omega; p)$  が次のように与えられることがわかる。

$$H(\omega; p) = p^{2n}/(\omega^{2n} + p^{2n}) \dots\dots\dots (5)$$

すなわち、式 (1) において、入力を  $\bar{f}$ 、出力を  $\beta\varphi_0$  とするとき、式 (1) で支配されるシステムは重み関数  $\phi_L(\omega; \lambda)$  が次のような関数で与えられる低域通過フィルターの機能を持つ。

$$\phi_L(\omega; \lambda) = \lambda/(\omega^{2n} + \lambda) \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\lambda = p^{2n} = \beta/\alpha$  である。周波数応答関数が実関数であるから、位相ひずみを生ずることがなく重み関数と等しくなっている。

式 (6) の重み関数を変数  $\lambda = p^{2n}$  および  $n$  に対して図示すると、図-1 のようになる。この図から明らかなように、式 (6) の重み関数に含まれるパラメータは  $p$  と  $n$  の2つであるが、変数  $p$  ( $p$  の値は入力の50%が濾波される円振動数を表わす) が濾波する周波数領域

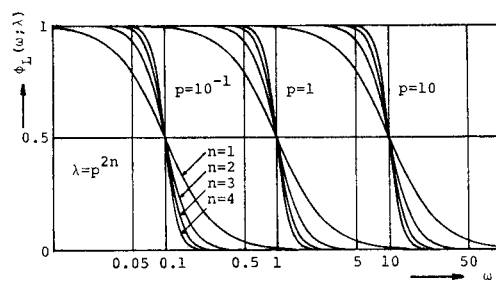


図-1 パラメータ  $n$  と  $p$  による重み関数の変化

を、変数  $n$  が重み関数の鋭さを支配することがわかる。

(2) 境界条件

入力  $\bar{f}$  のもとで式 (1) の解  $\varphi$  に対応する出力  $\beta\varphi$  に対して、重み関数が式 (6) に与えられたものと正確に一致するためには、基礎方程式 (1) の特解  $\varphi_0$  だけが残るようにする必要がある。数値処理の対象として与えられる入力データ  $\bar{f}$  は一般に有限の時間間隔内の記録データである。したがって、 $\bar{f}$  の与えられている時間間隔を含む有限の時間領域の両端  $t=t_0$  および  $t_0+T$  を境界として、式 (1) の微分方程式に特定の境界条件を設定することが可能である。

いま、式 (1) の特解だけが残るような境界条件として、次のような2つの場合が考えられる。

(I)  $\bar{f}$  を正弦級数で展開するとき、  
 $\varphi^{(2k)}|_{t=t_0, t_0+T} = 0; k=0, 1, 2, \dots, n-1 \dots\dots (7)$

(II)  $\bar{f}$  を余弦級数で展開するとき、  
 $\varphi^{(2k+1)}|_{t=t_0, t_0+T} = 0; k=0, 1, 2, \dots, n-1 \dots\dots (8)$

すなわち、式 (1) を境界条件 (I) のもとで解く場合、 $\bar{f}$  を

$$\bar{f} = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin(m\pi/T)t \dots\dots\dots (9)$$

$$f_m = (2/T) \int_0^T \bar{f} \sin(m\pi/T)t dt \dots\dots\dots (10)$$

のように展開したときの解

$$\beta\varphi_I = \sum_{m=1}^{\infty} [\lambda/(\omega^{2n} + \lambda)] f_m \sin \omega t \dots\dots\dots (11)$$

が得られることになる。ただし、 $\omega = m\pi/T$  である。また、式 (1) を境界条件 (II) のもとで解く場合、 $\bar{f}$  を

$$\bar{f} = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos(m\pi/T)t \dots\dots\dots (12)$$

$$f_m = (2/T) \int_0^T \bar{f} \cos(m\pi/T)t dt \dots\dots\dots (13)$$

のように展開したときの解

$$\beta\varphi_{II} = \sum_{m=1}^{\infty} [\lambda/(\omega^{2n} + \lambda)] f_m \cos \omega t \dots\dots\dots (14)$$

が得られることになる。ただし、 $\omega = m\pi/T$  である。

すなわち、式 (1) を式 (7) または式 (8) の境界条件のもとで解くとき、得られる解  $\varphi$  に  $\beta$  を掛けた  $\beta\varphi$  は、式 (6) の重み関数  $\phi_L(\omega; \lambda)$  で濾波された  $\bar{f}$  の低周波成分よりなるものである。

(3) 基礎方程式と等価な変分汎関数

有限要素技法に基づいて基礎方程式 (1) を数値的に解く過程を考える。有限要素技法を適用するにあたって、まず基礎方程式 (1) と等価な変分汎関数を与えることが必要であるが、式 (1) の基礎方程式を Euler 方程式として与える変分汎関数  $\Pi$  を次のように与えることができる。

$$\Pi = \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ \frac{1}{2} \alpha (\varphi^{(n)})^2 + \frac{1}{2} \beta \varphi^2 - \bar{f} \varphi \right] dt - [\bar{F}_{n-1} \varphi^{(n-1)} + \bar{F}_{n-2} \varphi^{(n-2)} + \dots + \bar{F}_0 \varphi]_{t_0}^{t_0+T} \quad (15)$$

ここに、 $\varphi$  は領域  $t_0 \leq t \leq t_0+T$  で定義された連続な関数であり、 $\varphi^{(n)}$  は  $\varphi$  の  $t$  による  $n$  階微分を意味する。また、 $\bar{F}_{n-i}$  は  $t=t_0$  および  $t_0+T$  において基本変数  $\varphi^{(n-i)}$  に対応して与えられる自然変数を意味している。式 (15) の汎関数  $\Pi$  の停留条件  $\delta\Pi=0$  から、次のような Euler 方程式が得られる。

$$\begin{aligned} (-1)^n \alpha \varphi^{(2n)} + \beta \varphi &= \bar{f} \\ &\text{in } t_0 < t < t_0+T \dots (16) \\ (-1)^k \alpha \varphi^{(n+k)} &= \bar{F}_{n-1-k}; \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1 \\ &\text{on } t=t_0, t_0+T \dots (17) \end{aligned}$$

式 (17) は式 (15) の汎関数の変分問題に対応する自然境界条件であるが、図-2 は基本変数  $\varphi$  と自然変数  $\bar{F}$  との対応を示したものである。

なお、ここに提案するフィルターのシステムにおいて、入力  $\bar{f}$  に対して出力を  $\beta\varphi$  ではなく

$$\bar{f} - \beta\varphi = (-1)^n \alpha \varphi^{(2n)}$$

とする場合には、重み関数

$$\phi_H(\omega; \lambda) = 1 - \phi_L(\omega; \lambda) = \omega^{2n} / (\omega^{2n} + \lambda)$$

を持つ低周波遮断フィルターとなる。また、式 (17) から明らかなように自然変数は  $(-1)^n \alpha \varphi^{(2n)}$  の  $n$  階までの

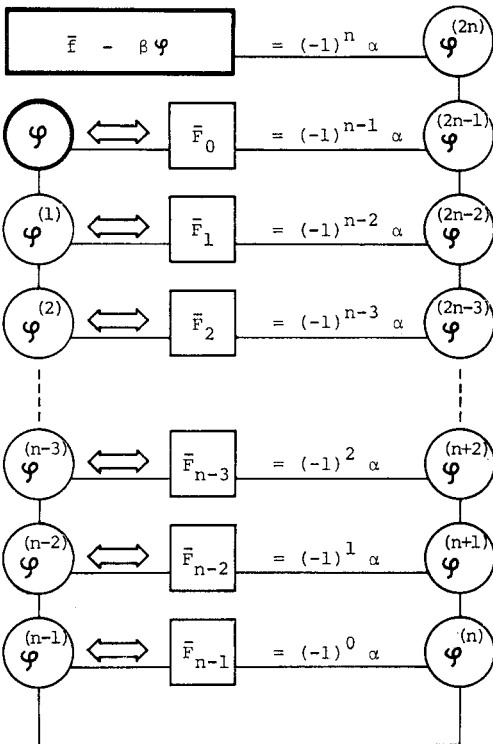


図-2 基本変数と自然変数との関係

積分に対応している。したがって、各時刻での自然変数を求めることにより、入力  $\bar{f}$  から低周波成分  $\beta\varphi$  を除いた出力の積分計算を濾波計算と同時に行うことができる。

(4) 有限要素技法による定式化

a) 要素マトリックス

対象時間領域  $t_0 \leq t \leq t_0+T$  を部分時間領域  $t_m$  の集合として表現し、式 (15) の変分問題が構成されるためには、関数  $\varphi$  は部分領域内で  $2n$  階の微分まで存在し連続であることが必要であり、隣接する部分領域間においては  $n-1$  階の微分まで連続であることが必要である。

したがって、全対象時間領域を有限の数の部分時間領域 (時間要素) に分割し、各分割点 (時間節点) に節点変数  $u_i$  として  $n$  個の基本変数  $\varphi, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(n-1)}$  を導入し、節点を共有する隣接する部分領域に対して  $n-1$  階の微分まで連続させる。すなわち、

$$u_i^T = \langle \varphi \varphi^{(1)} \varphi^{(2)} \dots \varphi^{(n-1)} \rangle_i \dots (18)$$

また、各部分領域内では  $2n$  階の微分まで存在し、連続な関数として、 $2n-1$  次の多項式で次のように  $\varphi$  を補間する。

$$\varphi = \sum_{i=0}^{2n-1} a_i t^i = \phi^T q \dots (19)$$

ここに、

$$\phi^T = \langle 1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^{2n-1} \rangle \dots (20)$$

$$q^T = \langle a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{2n-1} \rangle \dots (21)$$

である。

いま、代表的な部分領域 (要素) として、節点  $i$  と  $j$  とで挟まれた要素  $m$  を考えると、式 (19) の補間関数の係数ベクトル  $q$  と要素の両端の節点に導入されている節点変数  $u_i$  および  $u_j$  との関係は次のように得られる。

$$u = Aq \dots (22)$$

ここに、

$$u^T = \langle u_i^T \ u_j^T \rangle \dots (23)$$

である。また、 $2n \times 2n$  の変換マトリックス  $A$  を  $n \times n$  の部分マトリックスに分割して、

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \dots (24)$$

のように表わすとき、マトリックス  $A$  の成分は次のように与えられる。

$A_{11}$  の要素:

$$A_{rs} = \begin{cases} (r-1)! & (r=s) \\ 0 & (r \neq s) \end{cases}$$

$A_{12}$  の要素:

$$A_{rs} = 0$$

$A_{21}$  の要素:

}

$$A_{rs} = \begin{cases} [(s-1)!/(s-r)!]t_m^{s-r} & (r \leq s) \\ 0 & (r > s) \end{cases}$$

$A_{22}$  の要素：

$$A_{rs} = [(n+s-1)!/(n+s-r)!]t_m^{n+s-r}$$

.....(25)

式 (19) と式 (22) から関数  $\varphi$  は節点変数ベクトル  $u$  により次のように表わされる。

$$\varphi = \phi^T B u \text{ .....(26)}$$

$$B = A^{-1} \text{ .....(27)}$$

これより、関数  $\varphi$  の  $n$  階微分は次式で与えられる。

$$\varphi^{(n)} = P^T q = P^T B u \text{ .....(28)}$$

ここに、 $2n \times 1$  のマトリックス  $P$  の成分は次のように与えられる。

$P$  の要素：

$$P_r = \begin{cases} 0 & (r \leq n) \\ [(r-1)!/(r-n-1)!]t^{r-n-1} & (r > n) \end{cases}$$

.....(29)

したがって、基本変数  $u$  と自然変数  $\bar{F}$  とを結ぶ要素マトリックス  $k$  が次のように得られる。

$$\bar{F} = k u - \bar{f}_{eq} \text{ .....(30)}$$

$$k = B^T \left[ \alpha \int_0^{t_m} P P^T dt + \beta \int_0^{t_m} \phi \phi^T dt \right] B = B^T G B$$

.....(31)

ここで、 $2n \times 2n$  のマトリックス  $G$  の成分は次式で与えられる。

$G$  の要素：

$$G_{rs} = \begin{cases} \beta \cdot \frac{1}{(r+s-1)} t_m^{r+s-1} & (r \leq n \cup s \leq n) \\ \alpha \cdot \left[ \frac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-2n-1)(r-n-1)!(s-n-1)!} \right] \\ \cdot t_m^{r+s-2n-1} + \beta \cdot \frac{1}{(r+s-1)} t_m^{r+s-1} & (r > n \cap s > n) \end{cases}$$

.....(32)

また、 $\bar{f}_{eq}$  は次項の等価節点入力である。

**b) 等価節点入力**

入力  $\bar{f}$  を節点間で線形に補間するものとすれば、式 (15) の汎関数における入力  $\bar{f}$  の積分に対応する項は、次のように与えられる。すなわち、 $c$  を係数ベクトルとして入力  $\bar{f}$  を次式で補間する。

$$\bar{f} = \psi^T c \text{ .....(33)}$$

ここに、

$$\psi^T = \langle 1 \ t \rangle \text{ .....(34)}$$

$$c^T = \langle c_0 \ c_1 \rangle \text{ .....(35)}$$

である。要素の両端の節点における  $\bar{f}$  の値を  $\bar{f}_i, \bar{f}_j$  とすれば、

$$\bar{F} = R c \text{ .....(36)}$$

ただし、

$$\bar{F}^T = \langle \bar{f}_i \ \bar{f}_j \rangle \text{ .....(37)}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & t_m \end{bmatrix} \text{ .....(38)}$$

これより、式 (33) は次のように表わすことができる。

$$\bar{f} = \psi^T S \bar{F} \text{ .....(39)}$$

ここに、

$$S = R^{-1} = \frac{1}{t_m} \begin{bmatrix} t_m & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ .....(40)}$$

したがって、等価節点入力は次式で与えられることになる。

$$\bar{f}_{eq} = E \bar{F} \text{ .....(41)}$$

ここに、

$$E = B^T H S \text{ .....(42)}$$

$$H = \int_0^{t_m} \phi \psi^T dt \text{ .....(43)}$$

であり、 $2n \times 2$  のマトリックス  $H$  の成分は次のようである。

$H$  の要素：

$$H_{rs} = [1/(r+s-1)]t_m^{r+s-1} \text{ .....(44)}$$

なお、式 (31) の  $k$  および式 (42) の  $E$  の具体的内容を付録に示す。

### 3. 強震加速度記録の濾波計算例

2. に提示した濾波計算法によって強震加速度記録の周波数分解を行った解析例を示す。対象とする記録は、1940年 Imperial Valley 地震の El Centro における記録波形の NS 成分であり、記録長さ 53.732 秒間の記録におけるピーク値を採ってデジタル記録化したものである (以下、El Centro 波形または原波形とよぶ)。

#### (1) 帯域フィルター

2. に述べた低域通過フィルターを、50% 遮断円振動数  $p$  を  $p = p_u$  および  $p = p_l$  として 2 度適用し、両者の差を求めることによって、帯域通過フィルターが得られることになる。この帯域通過フィルターの重み関数  $\phi_B(\omega; p_u, p_l)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_B(\omega; p_u, p_l) &= \frac{p_u^{2n}}{\omega^{2n} + p_u^{2n}} - \frac{p_l^{2n}}{\omega^{2n} + p_l^{2n}} \\ &= \frac{(\kappa^{2n} - 1)(\omega/p_l)^{2n}}{\{(\omega/p_l)^{2n} + \kappa^{2n}\} \{(\omega/p_l)^{2n} + 1\}} \end{aligned}$$

.....(45)

ただし、

$$\kappa = p_u/p_l \text{ .....(46)}$$

#### (2) 計算結果

計算結果を図-5 に示す。図-5 の左最上段に示した波形が解析の対象として取り上げた El Centro 波形 (絶対値最大加速度 345.5 gal: ここでは計算時間および記

憶容量の都合から、ピーク値を採ってデジタル記録化した原記録を測点間で線形補間し、0.01 秒間隔の等間隔データを作成し、これを原波形とした。そのものである。左上から 2 番目の BAND No. 1 から右下の BAND No. 26 までの波形が式 (45) に与えられる帯域フィルターの出力として得られた計算結果であり、対数軸上で等間隔にとった 24 の周波数領域 (図-3 における No. 2~25) および残された低周波領域 (No. 1), 高周波領域 (No. 26) に含まれる成分を図示したものである。ここでは約 0.1~20 Hz の領域を対象としているが表-1 に 図-3 に対応する各部分周波数領域の下限 ( $f_l$ ), 中心 ( $f_c$ ), 上限 ( $f_u$ ) の周波数 (Hz) を示す。ただし、 $f_l = p_l/2\pi, \dots$  などである。

本計算例および以下の計算例ではフィルターのパラメーター  $n$  を  $n=4$ , バンド幅に関するパラメーター  $\kappa$  を  $\kappa=2^{1/3}$  として計算を行っており、帯域フィルターの重み関数の形状は式 (45) から対数軸上で相似形で 図-4 のように与えられる。

また、境界条件としては、原記録の記録開始前および記録終了後におのおの 1 秒間 100 点の無負荷の時間節点を設け、その両端において次の条件を与えた。

$$\varphi^{(k)}|_{t_0, t_0+T} = 0; k = 2n-1, 2n-2, \dots, n \dots\dots\dots(47)$$

この条件は、式 (7) および式 (8) の条件を半分ずつ考慮するという意味で意図的に設定したものである。また、記録上の両端を境界条件で拘束することを避けるために、記録の前後に 1 秒間 100 点の無負荷の時間領域を設けたのであるが、これらは解析結果に有意な影響を与えないので、重要な意味をもつものではない。

(3) 計算結果の検討

ここに提案した帯域濾波計算の妥当性を検討するために、計算結果として得られた濾波された波形のフーリエスペクトル解析を行い、原波形のフーリエスペクトルとの比を求め式 (45) の重み関数と比較した結果を図-6 に示す。左から順に BAND No. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, すなわち、中心周波数で 0.125, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 4.0, 8.0, 16.0 Hz の部分周波数領域について示したものである。設定した境界条件の影響により、低周波領域において計算結果に乱れが生じているが、これらの領域における波形の絶対値そのものは非常に小さな値である。

もし、図-3 に示したような部分周波数領域の設定を行い、部分領域を意図的に重複させることがなければ、本計算法においては計算の過程から明らかなように、各部分周波数領域の波形 (図-5 の BAND No. 1~26) を加え合わせた再合成波形は完全に原波形と一致する。

すなわち、原波形を  $\bar{f}(t)$ , 部分周波数領域 No.  $k$  の波形を  $f(t; p_k)$  とするとき、

$$\bar{f}(t) = \sum_{k=1}^{26} f(t; p_k) \dots\dots\dots(48)$$

が成り立ち、本帯域フィルターで原波形を部分周波数分解したとき損失は零である。

4. 非定常パワースペクトル

ここでは、1 つの確定時間関数を対象とした非定常パワースペクトルの計算法を、具体的に計算例を示しながら提案する。

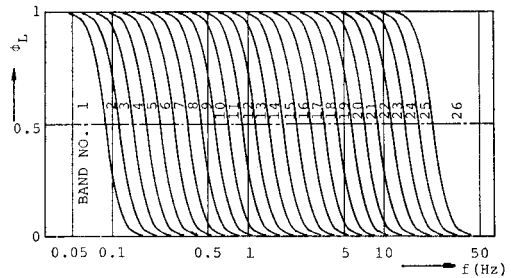


図-3 部分周波数領域と重み関数 ( $n=4, \kappa=2^{1/3}$ )

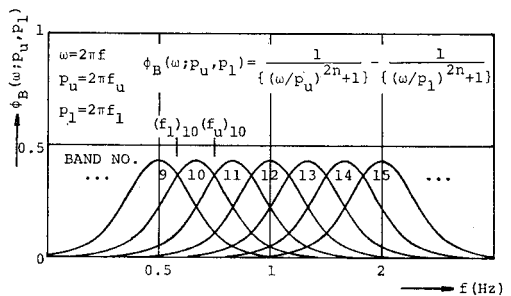


図-4 帯域フィルターの重み関数 ( $n=4, \kappa=2^{1/3}$ )

表-1 各部分周波数領域の下限 ( $f_l$ ), 中心 ( $f_c$ ), 上限 ( $f_u$ ) の周波数 (Hz)

BAND NO.	$f_l$ (Hz)	$f_c$ (Hz)	$f_u$ (Hz)
1	—	—	0.088
2	0.088	0.099	0.111
3	0.111	0.125	0.140
4	0.140	0.157	0.177
5	0.177	0.198	0.223
6	0.223	0.250	0.281
7	0.281	0.315	0.354
8	0.354	0.397	0.445
9	0.445	0.500	0.561
10	0.561	0.630	0.707
11	0.707	0.794	0.891
12	0.891	1.000	1.122
13	1.122	1.260	1.414
14	1.414	1.587	1.782
15	1.782	2.000	2.245
16	2.245	2.520	2.828
17	2.828	3.175	3.564
18	3.564	4.000	4.490
19	4.490	5.040	5.657
20	5.657	6.350	7.127
21	7.127	8.000	8.980
22	8.980	10.079	11.314
23	11.314	12.699	14.254
24	14.254	16.000	17.959
25	17.959	20.159	22.627
26	22.627	—	—

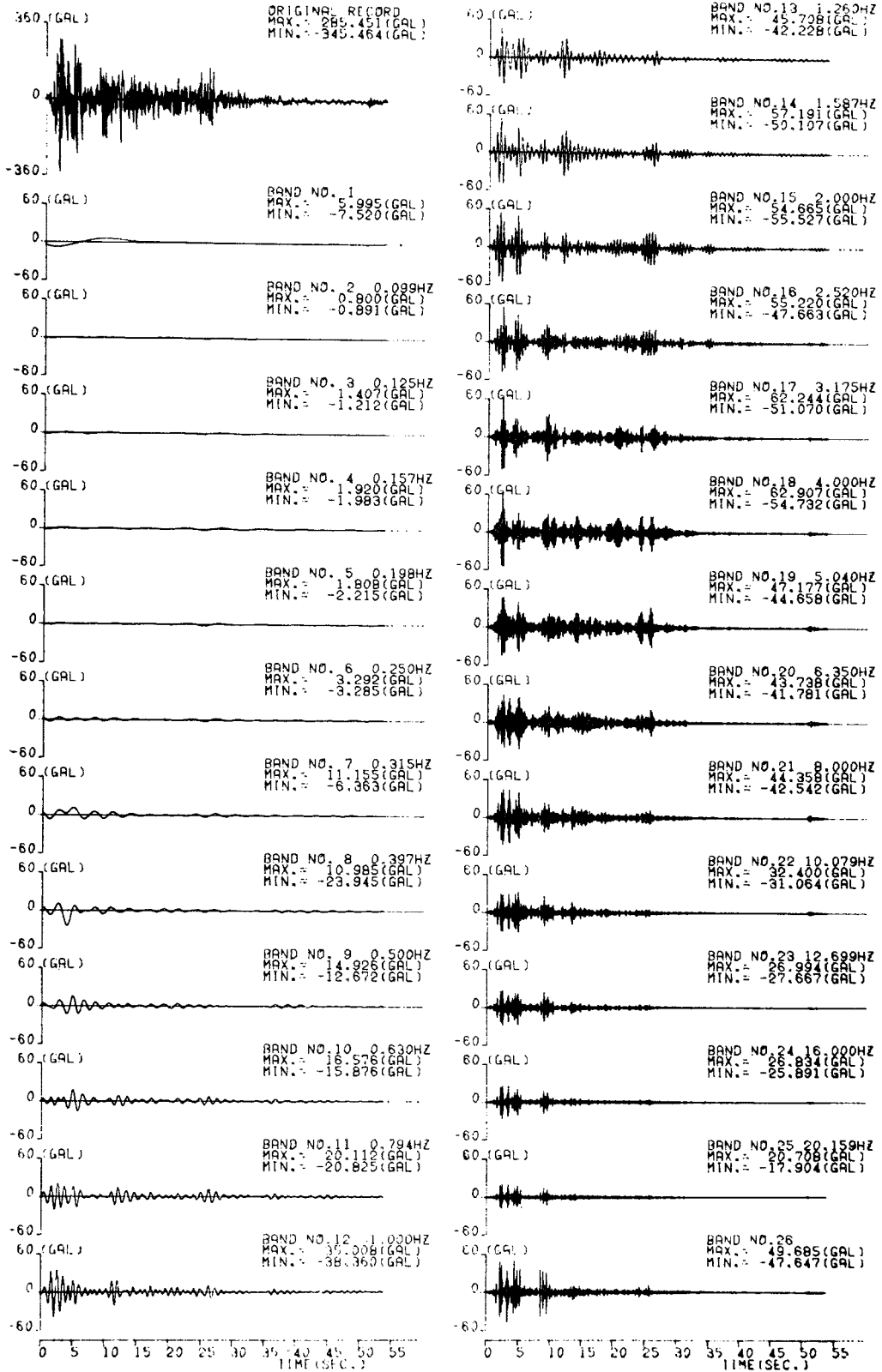


図-5 原波形および部分周波数領域へ分解された波形

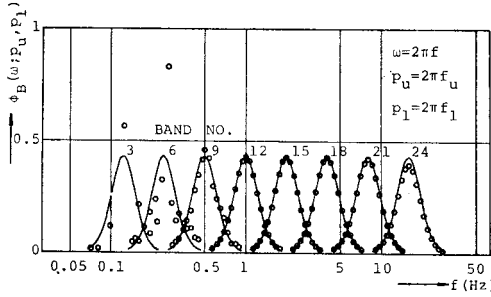


図-6 原波形と濾波された波形のフーリエスペクトルの比と重み関数との比較 (境界条件: 式 (47))

(1) 本論文における非定常パワースペクトルの定義

a) 原波形の濾波計算と各部分周波数成分の自乗波形  
 原波形  $\bar{x}(t)$  を着目円振動数  $p_k$  を中心とした式 (45) の重み関数 (これを  $\phi_B(\omega; p_k)$  とおく, ただし  $\kappa^{1/2} = p_u/p_k = p_k/p_l$ ) で与えられる帯域フィルターを通し, 各部分周波数成分  $x(t; p_k)$  に分解する. ここで,  $\bar{x}(t)$  を El Centro 波形とし, 部分周波数領域を 3. と同様に表-1 に定めるように与えれば,  $x(t; p_k)$  は 3. の 図-5 における BAND No.  $k$  で示される濾波された波形である.

次に各部分周波数成分  $x(t; p_k)$  の自乗波形  $X_k(t)$  を求める. すなわち,

$$X_k(t) = x^2(t; p_k) \dots\dots\dots (49)$$

b) 非定常パワースペクトル

非定常パワースペクトル  $G_k(\omega, t)$  を単位周波数あたりのパワーの時間的変化を表す曲線として次式のように定義する.

$$G_k(\omega, t) = \tilde{X}_k(t) / (B_k \cdot \Delta\omega_k); k=2, 3, 4, \dots, 25 \dots\dots\dots (50)$$

ここに,  $\tilde{X}_k(t)$  は, 図-7 (c) に具体的に図示したように,  $X_k(t)$  の中心線を表すものであり,  $X_k$  から  $\tilde{X}_k$  を求める過程でも 2. の低域通過フィルターを用いることができる. 定数  $B_k$  はフィルターの特性より定まる補正係数であり, 次式によって与えられる. すなわち,

$$B_k = \int_0^\infty H^2(\omega; p_k) d\omega / \Delta\omega_k \dots\dots\dots (51)$$

ここに,  $H(\omega; p_k)$  は帯域フィルターの周波数応答関数であり, 3. の式 (45) で与えられる帯域フィルターの重み関数  $\phi_B(\omega; p_u, p_l)$  により, 次のように表わされる.

$$H(\omega; p_k) = \frac{(\kappa^{2n} - 1)(\omega/p_k)^{2n}}{\{(\omega/p_k)^{2n} + \kappa^{2n}\} \{(\omega/p_k)^{2n} \kappa^{2n} + 1\}} \dots\dots\dots (52)$$

また,

$$\begin{aligned} \Delta\omega_k &= (p_u - p_l)_k = 2\pi(f_u - f_l)_k \\ &= (\kappa^{1/2} - \kappa^{-1/2}) p_k \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

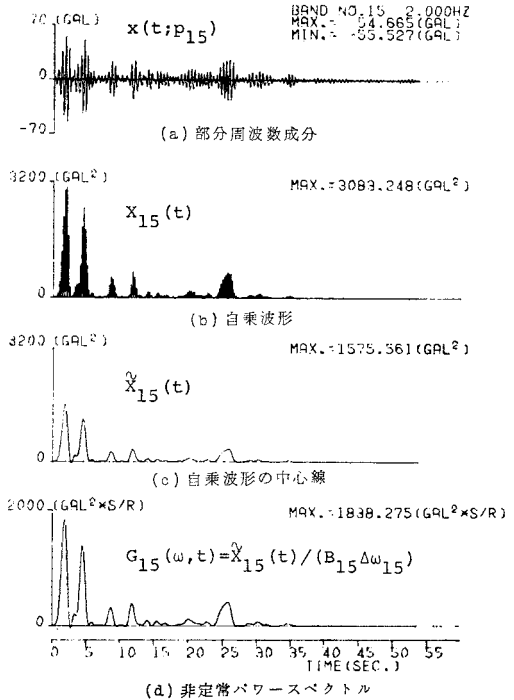


図-7 部分周波数成分とその自乗波形, 自乗波形の中心線, および非定常パワースペクトル (部分周波数領域 No. 15, 中心周波数 2.0 Hz)

は部分周波数領域 No.  $k$  の円振動数幅である.

なお,  $n=4$  の場合の式 (51) の積分結果は  $\Gamma$  関数を用いて次のように示すことができる.

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{(\kappa^{1/2} - \kappa^{-1/2})} \left\{ (\kappa^{1/2} + \kappa^{-1/2}) \frac{\Gamma\left(\frac{15}{8}\right)\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{8\Gamma(2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\kappa^{1/2}(\kappa^7 - 1)}{(\kappa^8 - 1)} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)}{8\Gamma(1)} \right\} \dots\dots\dots (54) \end{aligned}$$

さらに,  $\kappa=2^{1/3}$  の場合には,  $B_k$  は次のようになる.

$$B_k \approx 0.2943 \dots\dots\dots (55)$$

図-7 は一例として, 部分周波数領域 No. 15 (中心周波数 2.0 Hz) について非定常パワースペクトル  $G_{15}(\omega, t)$  を, 対応する部分周波数成分  $x(t; p_{15})$ , その自乗波形  $X_{15}(t)$  および自乗波形の滑らかな中心線  $\tilde{X}_{15}(t)$  とともに示したものである.

(2) 他の定義または計算法による結果との比較

上述の計算法から得られた結果を Mark の定義<sup>3)</sup>に基づく結果および亀田の計算法<sup>9)</sup>に基づく結果と比較して 図-8 に示す. 図は周波数 2.0 Hz についての結果である. Mark の Physical Spectrum はウィンドウ関数の選び方によって異なる結果を与えるが, ここでは底辺を  $3T_k$  ( $T_k$  は対象とする波の周期) にとった三角形とした. また, 亀田の計算法に基づく場合には減衰定数の選

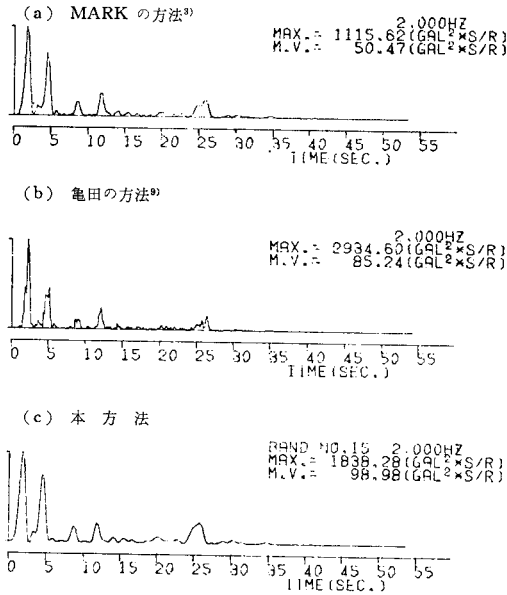


図-8 非定常パワースペクトルの比較

扱と平滑化の仕方によって異なるが、ここでは減衰定数は  $\eta=0.2$  とし移動平均はとっていない。

### 5. 強震加速度記録の非定常パワースペクトルの計算例と波形の再合成

ここでは、4. において提示した非定常パワースペクトルの計算法を前述の El Centro 波形に適用して解析した結果、および得られた非定常パワースペクトルに基づいて波形を再合成する過程を示す。

#### (1) El Centro 波形の非定常パワースペクトル分解

4. に示した計算法にしたがって、El Centro 波形の非定常パワースペクトルを計算した結果を図-9 に示す。ここに、各部分周波数領域は表-1 に定めたものを採用しており、自乗波形の中心線も低域通過フィルターによって求めている（ここでは、各部分波の中心周波数  $f_c$  (Hz) に対して、50% 遮断周波数  $f$  (Hz) を  $f=1/2 f_c$  に選び、 $f$  が 1 Hz を越える場合には  $f=1$  (Hz) としている）。なお、各図は各周波数成分の最大値で規準化している。また、部分周波数領域 No. 1 および 26 に対しては等価帯域幅が定まらないので、削除している。図の左最上段の図は原波形の自乗波形の中心線を求めたものであり、左上より 2 番目の図は BAND No. 2~25 に得られた結果を、等価帯域幅を考慮して、積分の意味で加え合わせた結果である。図-9 に示した図において、時間原点で値が零となっていないのは、非定常パワ

ースペクトルを部分波形の自乗波形の滑らかな中心線として定義した定義そのものと、滑らかな中心線の求め方に起因するものである。図化の際に最大値で規準化しているためにいっそうめだつ結果になっているが、絶対値そのものはごく小さな値の範囲にとどまっている。また、非定常パワースペクトル図の一部分に負の値を示している部分があるが、これも上述の滑らかな中心線を求める求め方に起因するもので本質的なものではない。

#### (2) 非定常パワースペクトルに基づく波形の再合成

パワーの保存だけに注目し位相については今後の検討事項とすることにして、ここでは、各周波数領域の非定常パワースペクトル  $G_k(\omega, t)$  から対応する周波数領域の再構成波形  $y_k(t)$  を次式により与える。

$$y_k(t) = \sqrt{2 G_k(\omega, t)} \Delta\omega_k \sin \omega_k t; k=2, 3, \dots, 25 \dots\dots\dots(56)$$

式 (56) に基づいて、各周波数成分に対応する再構成された波形を図示したものが図-10 である。図-10 の左最上段の図はこのようにして求めた再構成部分波形の総和、すなわち、

$$y(t) = \sum_{k=2}^{25} y_k(t) \dots\dots\dots(57)$$

を図示したものであり、これが 24 本の部分波形から再合成された波形である。図-11 に、ここに得られた再合成波形を原波形と比較して再掲する。

### 6. 原波形と合成波形との比較

数多くの記録波形を統一的に処理し、得られる数値データに基づいた具体的応用面を考えると、基礎となる数値データの数は目的を達成し得る範囲内で少ないことが望ましい。解析対象波形を部分周波数領域に分解するとき、いくつの部分領域に分解するか、また、各部分領域の周波数範囲をどのように選択するかという問題は数値処理過程の問題というより、工学的判断の問題となる。ここで示した具体的解析例においては、一応、各部分領域の周波数範囲を対数軸上で等間隔に、また、部分領域の数を表-1 に示したような 26 に選んでいる。さらに、有意なデータとして、No. 1 と No. 26 の部分周波数領域を除いた 24 本の非定常パワースペクトルに基づいて、式 (56) および (57) から単純に再合成波形を求めている。しかも、式 (56) から明らかなように、各部分波形の位相差を無視しているために図-11 に得られた再合成波形は確定的に得られるものである。

24 本という有限の数の非定常パワースペクトルに基づくものとする場合でも、隣接する非定常パワースペクトルの値を線形補間するなどして、任意の周波数に対応



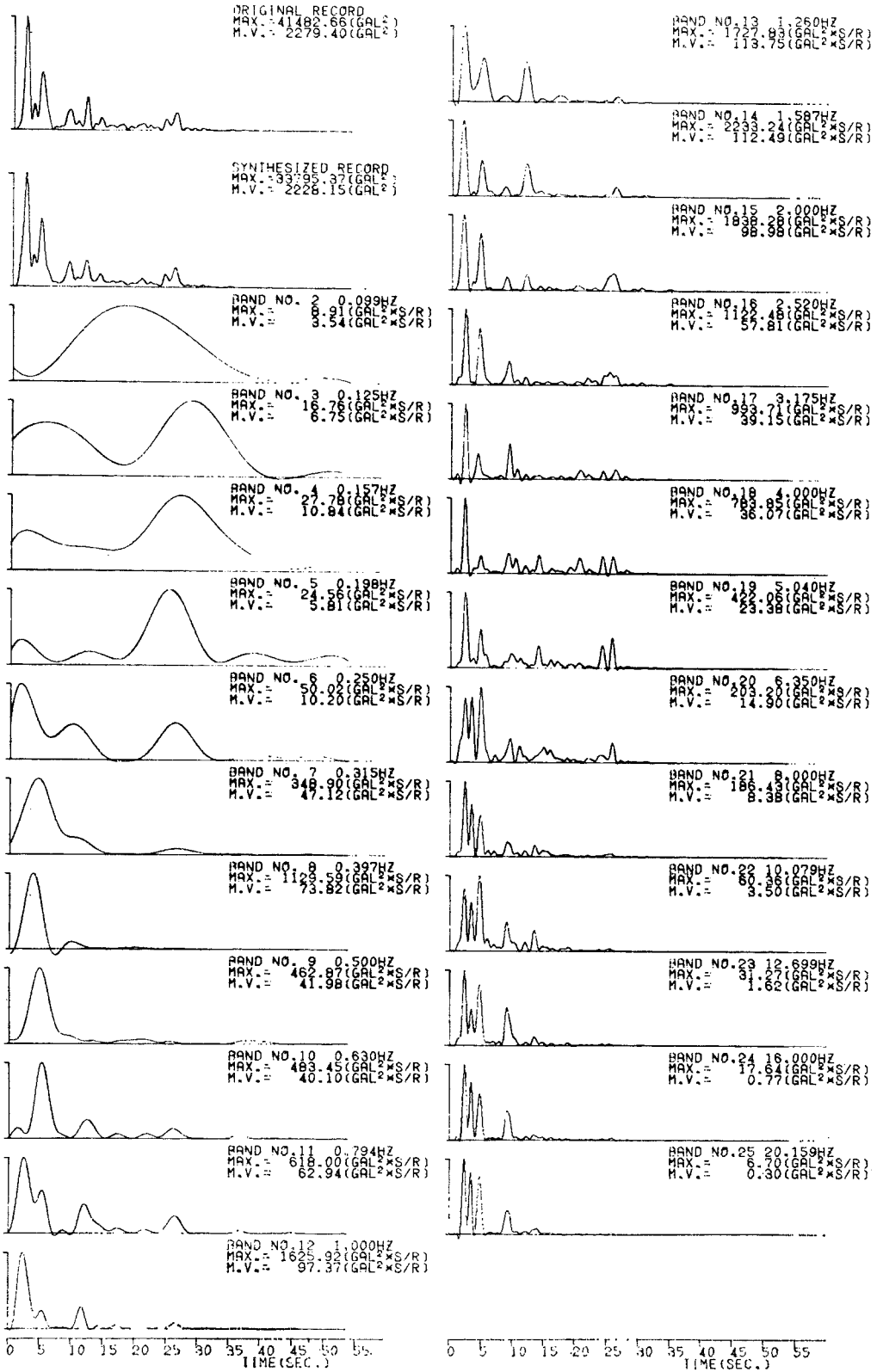


図-9 El Centro 波形の非定常パワースペクトル

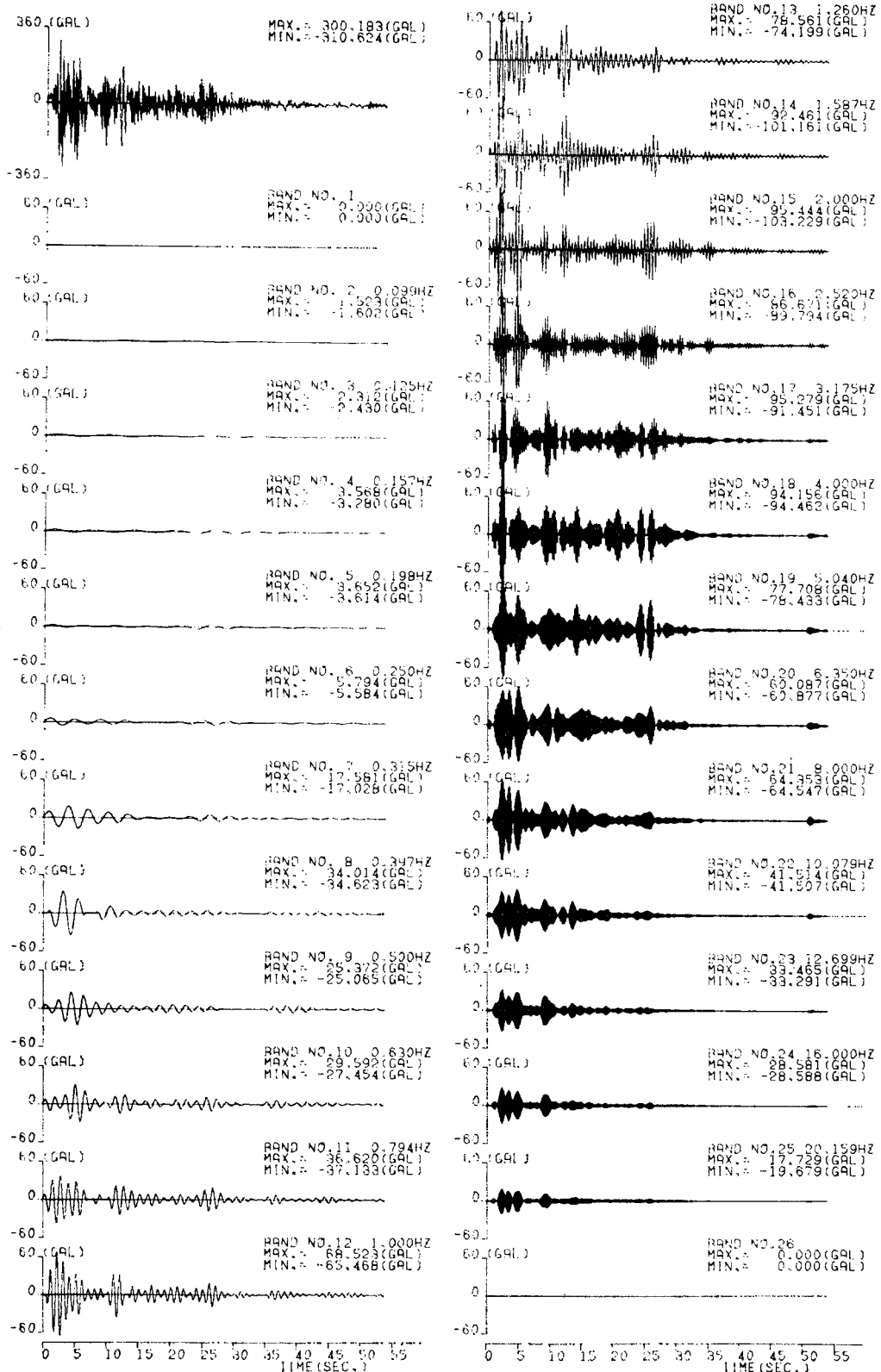
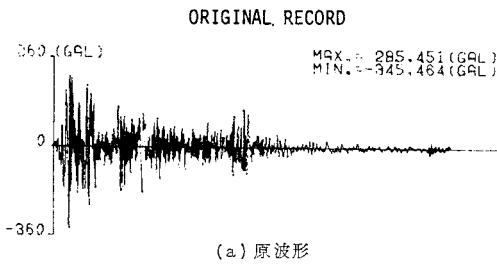
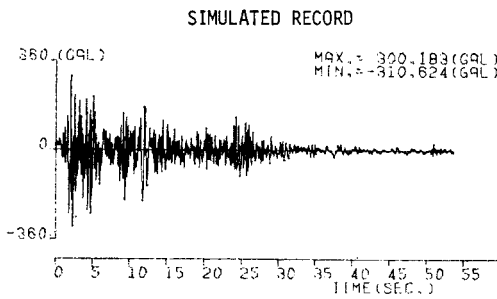


図-10 再構成波形  $y_k(t)$  ( $k=2, 3, \dots, 25$ ) および合成波形  $y(t) = \sum_{k=2}^{25} y_k(t)$

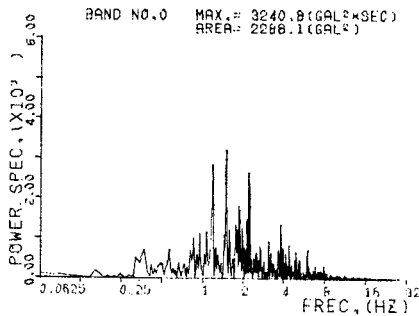


(a) 原波形

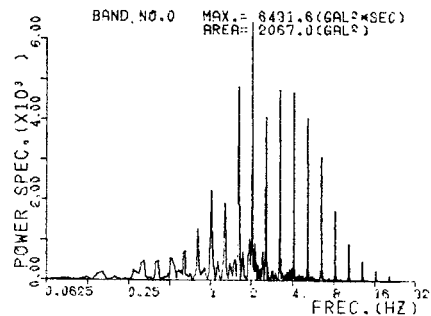


(b) 合成波形

図-11 原波形と再合成波形

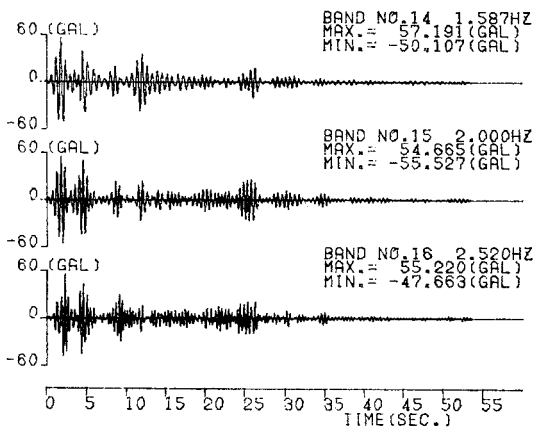


(a) 原波形

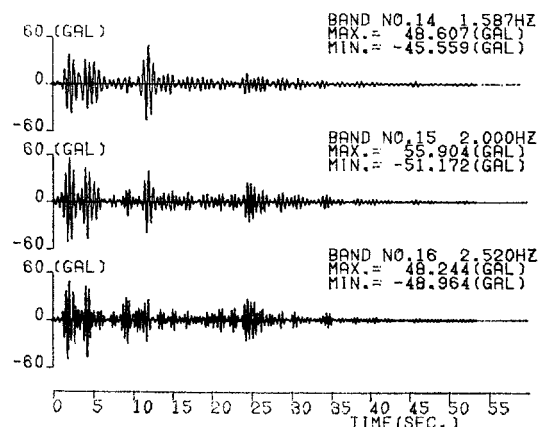


(b) 合成波形

図-12 原波形と合成波形のパワースペクトル



(a) 原波形



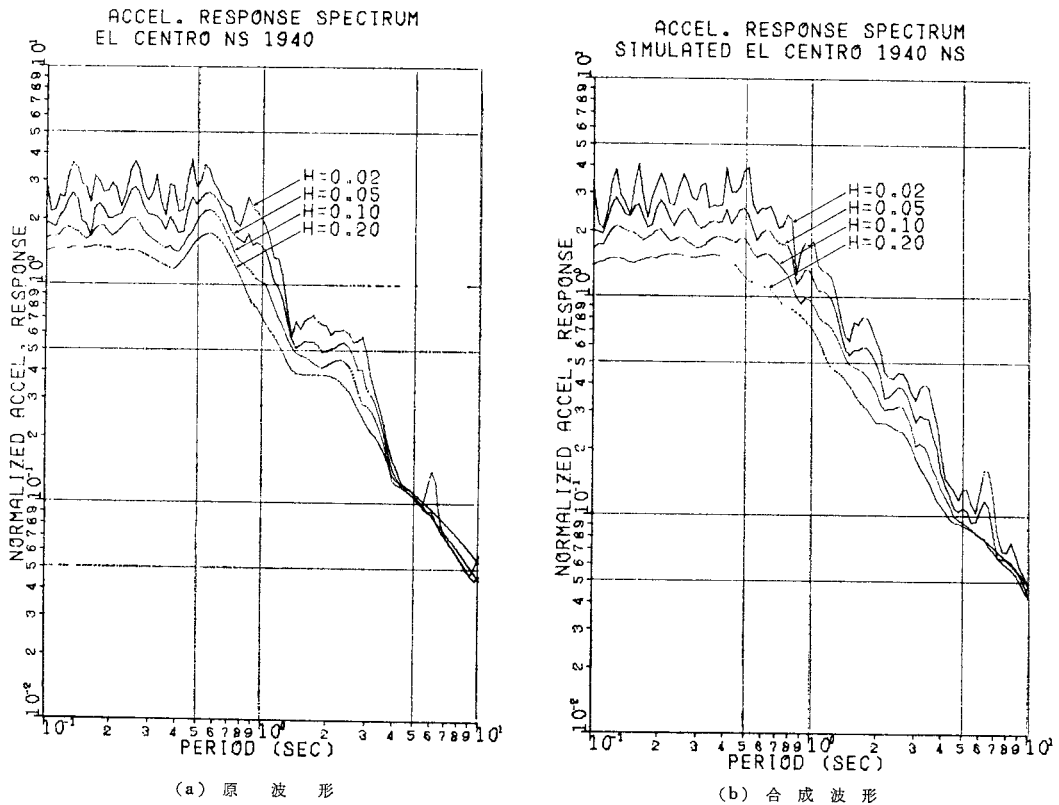
(b) 合成波形

図-13 原波形の部分波と合成波形の部分波 (周波数領域 No. 14, 15, 16)

する非正常パワースペクトルを評価することが可能であり、より数多くの部分波形を再構成し、それらに基づいてより滑らかな周波数特性を持つ合成波形を作成することができる。しかし、このような応用面の人為はかえって処理過程の評価をあいまいにすると考え、ここではあくまでも 24 の離散的な周波数の値に対応して得られた非正常パワースペクトルと 1 対 1 に対応する 24 本の再構成部分波形のみを対象として式 (56) および式 (57) によって合成された波形と原波形とを比較検討する。

図-12 は合成波形のパワースペクトルを原波形のそれと比較して示したものである。再合成の過程から当然のことではあるが、合成波形のパワースペクトルは離散的なものとなっている。

図-10 における各再構成部分波形は 図-5 に示した各部分波形に対応するものであるが、式 (51) の補正係数の意味から明らかなように、濾波計算の過程で失われるパワーを補正しているために、再構成部分波形の振幅は対応する 図-5 の部分波形の振幅に比べて大きくなっている。これらの再構成部分波形の和として得られた合成波形 (図-11 (b)) を再び本報告の 3. (2) の手順にし



図—14 原波形および合成波形の規準化加速度応答スペクトル

たがって、部分波に分解した結果の一部を原波形を分解した対応する部分波と比較して 図—13 に示す。原波形を分解して得られた部分波と合成波形を分解して得られた部分波を比較してこの両者がかなりよく一致していることから、合成波形のパワースペクトル (図—12 (b)) が原波形のそれに対して離散的であるとしても、パワーの着目周波数近傍の積分値としては妥当な評価をされていることがわかる。また、合成波形のパワーの積分値としての全パワーは  $2067 \text{ gal}^2$  であり、原波形の全パワー  $2288 \text{ gal}^2$  と比較するとき、提案する計算法によって、ほぼパワーを保存し得ることがわかる。

工学的には波形が構造物などに与える影響が重要であるが、図—14 に原波形および合成波形の規準化加速度応答スペクトルを、減衰定数を 0.02, 0.05, 0.10, 0.20 とし、比較して示す。1~2 Hz において両者の相違が見られるが、全体としてほぼ同様の応答スペクトル特性を与えている。

## 7. おわりに

以上に数値濾波計算法を提案し、この濾波計算のアルゴリズムに基づいた非定常パワースペクトルの計算法を示し、El Centro 記録を対象として非定常パワースペク

トル分析および得られた非定常パワースペクトルからの波形の再合成を行い、ここに提案した非定常パワースペクトルの計算法の妥当性を確かめた。

ここに提示した数値濾波の計算法およびそれに基づく非定常パワースペクトルの計算法は、境界値問題の解法としてすでに確立されている有限要素技法に基づいており、明確で安定なものであり、デジタル記録の時間刻み幅がランダムな場合も扱いやすい。また、本濾波計算法は数階の積分計算も同時に可能なものである。

フィルターの特性は 図—1 に示したように、微分方程式の階数に関するパラメーター  $n$  を大きくすれば、重み関数はシャープになり理想的なフィルターに近くなるが、 $n$  が大きくなるほど、多くの有効桁数を必要とし、また、当然のことながら同じ波形の解析に対して大きな記憶容量を要することになる。

ここで提案した非定常パワースペクトルの計算過程は、上記濾波計算法に基づいて原波形を帯域通過フィルターに通し、得られた部分周波数波形より求められる時間方向のパワーの分布である。本非定常パワースペクトルの計算にあたって、分割する周波数帯の数や帯域幅および自乗波形の中心線を求めるに際しての低域通過フィルターの選択が結果に影響する。前者は、周波数方向のウィンドウ関数に対応し、後者は、平滑化の程度をどの

程度にするかということに対応する。これらの選択は、対象とする現象、解析の目的等に関連した工学的な判断に基づいて決定すべきところである。

謝 辞：本研究は本州四国連絡橋公団よりの受託研究として行っている設計地震入力に関する研究の基礎的な部分をなすものである。本研究を進めるにあたって、本四公団の六車真一、神 弘夫両氏にはたいへんご協力をいただきました。

また、建設省土木研究所の栗林栄一、岩崎敏男両氏には記録波形の使用に関し便宜を提供していただき、また、有意義なご討議をいただきました。ここに御礼申し上げます。

なお、ここに報告したデジタル・フィルターのアルゴリズムの開発に際し、当時東京工業大学大学院の学生であった岡山和生氏（現建設省勤務）が大きく寄与している。ここに記し感謝の意を表します。

### 付 録

式 (31) の  $k$  および式 (42) の  $E$  の具体的内容を以下に示す。ただし、 $z = t_m$  である。

(1)  $n=1$  の場合

$$k = \frac{\alpha}{z} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\beta z}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad E = \frac{z}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2)  $n=2$  の場合

$$k = \frac{\alpha}{z^3} \begin{bmatrix} 12 & 6z & -12 & 6z \\ & 4z^2 & -6z & 2z^2 \\ \text{SYM.} & & 12 & -6z \\ & & & 4z^2 \end{bmatrix} + \frac{\beta z}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22z & 54 & -13z \\ & 4z^2 & 13z & -3z^2 \\ \text{SYM.} & & 156 & -22z \\ & & & 4z^2 \end{bmatrix}; \quad E = \frac{z}{60} \begin{bmatrix} 21 & 9 \\ & 3z & 2z \\ & & 9 & 21 \\ -2z & -3z \end{bmatrix}$$

(3)  $n=3$  の場合

$$k = \frac{\alpha}{z^5} \begin{bmatrix} 720 & 360z & 60z^2 & -720 & 360z & -60z^2 \\ & 192z^2 & 36z^3 & -360z & 168z^2 & -24z^3 \\ & & 9z^4 & -60z^2 & 24z^3 & -3z^4 \\ \text{SYM.} & & & 720 & -360z & 60z^2 \\ & & & & 192z^2 & -36z^3 \\ & & & & & 9z^4 \end{bmatrix} + \frac{\beta z}{55440} \begin{bmatrix} 21720 & 3732z & 281z^2 & 6000 & -1812z & 181z^2 \\ & 832z^2 & 69z^3 & 1812z & -532z^2 & 52z^3 \\ & & 6z^4 & 181z^2 & -52z^3 & 5z^4 \\ \text{SYM.} & & & 21720 & -3732z & 281z^2 \\ & & & & 832z^2 & -69z^3 \\ & & & & & 6z^4 \end{bmatrix}$$

$$; \quad E = \frac{z}{840} \begin{bmatrix} 300 & 120 \\ 52z & 32z \\ & 4z^2 & 3z^2 \\ 120 & 300 \\ -32z & -52z \\ & 3z^2 & 4z^2 \end{bmatrix}$$

(4)  $n=4$  の場合

$$k = \frac{\alpha}{z^7} \begin{bmatrix} 100800 & 50400z & 10080z^2 & 840z^3 & -100800 & 50400z & -10080z^2 & 840z^3 \\ & 25920z^2 & 5400z^3 & 480z^4 & -50400z & 24480z^2 & -4680z^3 & 360z^4 \\ & & 1200z^4 & 120z^5 & -10080z^2 & 4680z^3 & -840z^4 & 60z^5 \\ & & & 16z^6 & -840z^3 & 360z^4 & -60z^5 & 4z^6 \\ \text{SYM.} & & & & 100800 & -50400z & 10080z^2 & -840z^3 \\ & & & & & 25920z^2 & -5400z^3 & 480z^4 \\ & & & & & & 1200z^4 & -120z^5 \\ & & & & & & & 16z^6 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{\beta z}{12972960} \begin{bmatrix} 5251680 & 978480z & 98640z^2 & 4596z^3 & 1234800 & -411480z & 55800z^2 & -3126z^3 \\ & 237600z^2 & 26460z^3 & 1296z^4 & 411480z & -134280z^2 & 17910z^3 & -990z^4 \\ & & 3096z^4 & 156z^5 & 55800z^2 & -17910z^3 & 2358z^4 & -129z^5 \\ & & & 8z^6 & 3126z^3 & -990z^4 & 129z^5 & -7z^6 \\ \text{SYM.} & & & & 5251680 & -978480z & 98640z^2 & -4596z^3 \\ & & & & & 237600z^2 & -26460z^3 & 1296z^4 \\ & & & & & & 3096z^4 & -156z^5 \\ & & & & & & & 8z^6 \end{bmatrix}$$

$$; \quad E = \frac{z}{15120} \begin{bmatrix} 5460 & 2100 \\ 1020z & 600z \\ 105z^2 & 75z^2 \\ & 5z^3 & 4z^3 \\ 2100 & 5460 \\ -600z & -1020z \\ 75z^2 & 105z^2 \\ -4z^3 & -5z^3 \end{bmatrix}$$

## 参 考 文 献

- 1) Priestley, M.B. : Evolutionary spectra and nonstationary processes, Jour. Royal Statist. Soc., Ser. B, Vol. 27, pp. 204~237, 1965.
- 2) Bendat, J.S. and Piersol, A.G. : Measurement and Analysis of Random Data, John Wiley, 1966.
- 3) Mark, W.D. : Spectral analysis of the convolution and filtering of nonstationary stochastic processes, Jour. of Sound and Vibr., Vol. 11, No. 1, pp.19~63, Nov., 1970.
- 4) Liu, S.C. : Evolutionary power spectral density of strong-motion earthquakes, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 60, No. 3, pp. 891~900, June, 1970.
- 5) 山原 浩 : 地盤の振動特性を考慮した地震時の地動の推定 (その1) —地震のパワーとスペクトル特性の時間的変化—, 日本建築学会論文報告集, 第175号, pp. 31~37, 1970年9月.
- 6) 山原 浩 : 地盤の振動特性を考慮した地震時の地動の推定 (その2) —地層の物理モデル置換と地震時の地動の推定—, 日本建築学会論文報告集, 第176号, pp. 51~57, 1970年10月.
- 7) Trifunac, M.D. : Response envelope spectrum and interpretation of strong earthquake ground motion, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 61, pp. 343~356, April, 1971.
- 8) Liu, S.C. : An approach to time-varying spectral analysis, Proc. ASCE, Vol. 98, EM 1, pp. 243~253, Feb., 1972.
- 9) 亀田弘行 : 強震地震動の非定常パワースペクトルの算出法に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第235号, pp. 52~62, 1975年3月.
- 10) 後藤尚男・北浦 勝 : 地震動の非定常スペクトル密度とその模式化, 土木学会論文報告集, 第236号, pp. 47~58, 1975年4月.
- 11) 星谷 勝・千葉利晃・草野直幹 : 地震加速度波の非定常特性とシミュレーション, 土木学会論文報告集, 第245号, pp. 51~58, 1976年1月.
- 12) 星谷 勝 : 非定常確率過程のスペクトル解析, 土木学会誌, 1975年3月号, pp. 41~46.
- 13) 日野幹雄・竹内邦良 : 非定常スペクトルの定義法および実際への応用, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 18, pp. 57~87, 1975年7月.
- 14) 吉田 裕・岡山和生 : 地震加速度記録の積分における濾波計算のアルゴリズム, 土木学会論文報告集, 第221号, pp. 25~38, 1974年1月.
- 15) 吉田 裕・岡山和生 : マトリックス法によるデジタル・フィルターのアルゴリズムと地震加速度波形の積分計算への応用, 日本鋼構造協会第9回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 101~106, 1975年6月.
- 16) Earthquake Engineering Research Laboratory, California Inst. of Technology : Strong Motion Earthquake Accelerograms, Digitized and Plotted Data, Vol. 1, Part A, July, 1969.
- 17) 栗原千鶴子・桜井彰雄 : 地震加速度波形の積分, 電力中央研究所・技術研究所報告, No. 68077, June, 1969.
- 18) 鈴木浩平・佐藤寿芳 : On a method to obtain displacement wave form from the record of earthquake acceleration, 東京大学生産技術研究所「生産研究」, Vol. 22, No. 1, Jan., 1970.
- 19) Trifunac, M.D. : Zero baseline correction of strong motion accelerograms, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 61, No. 5, pp. 1201~1211, Oct., 1971.
- 20) Bolt, B.A. : San Fernand rupture mechanism and the Pacoima strong-motion record, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 62, No. 4, pp. 1053~1061, Aug., 1972.
- 21) J.S. ベンダット・A.G. ピアソル (得丸英勝訳) : ランダムデータの統計的处理, 培風館, 昭和51年.
- 22) 大崎順彦 : 地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 昭和51年.
- 23) 吉田 裕・増田陳紀・佐竹昭夫 : 地震加速度記録の非定常パワースペクトルに関する一考察, 第31回土木学会全国大会講演概要集, I-238, 昭和51年10月.
- 24) 若菜弘之・吉田 裕・澤 正 : 実地震記録の非定常パワースペクトルと再構成, 第32回土木学会全国大会講演概要集, I-165, 昭和52年10月.

(1977.10.11・受付)