

非線形履歴型復元力特性を有する多自由度系構造物の のランダム地震応答解析

STOCHASTIC SEISMIC RESPONSE ANALYSIS OF A MULTI- DEGREE-OF-FREEDOM HYSTERETIC STRUCTURE

竹 宮 宏 和*

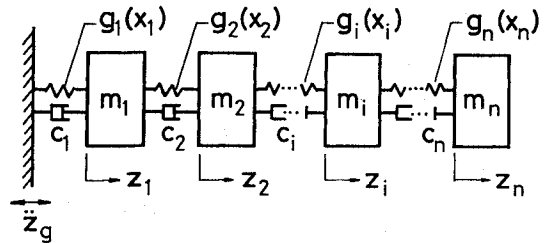
By Hirokazu TAKEMIYA

1. 緒 言

これまで耐震工学分野において、地震動の特性ゆえにランダム振動理論を適用して土木建築構造物の地震時動的性状、またさらには耐震安全性を調べた論文が数多く発表されてきているが、その多くは理論の適用範囲から線形応答内に限られている。しかし実際の土木・建築構造物が強震を受けた例では、机上の線形計算によると完全破壊しているにもかかわらず、現実には修復可能な範囲の破損内にとどまっていることが多い。これは応答が弾性限を越えてもその後の反転挙動のため直ちに破壊に至らず、かえって復元力特性において履歴ループを描き地震動の入力エネルギーの一部を吸収する能力を有することを意味する。この非線形性を積極的に建築構造物の耐震設計に導入することはいち早く棚橋¹⁶⁾、Veletsos, Newmark¹⁷⁾らによって、特定の入力波形に対する直接積分応答解析を通して提唱された。著者もそのランダム振動時の効果のよりの確な把握ということで、ランダム振動理論を適用して1自由度に系について報告してきたが^{12), 15)}、今回は多自由度系に対しての手法の開発および評価をある1つのケーススタディーのもとに行った。

本研究では、非線形多自由度系構造物として、図-1のように質点間が双一次履歴型復元力特性(図-2)を有する非線形ばねで模擬できるものを対象とした。実際の土木・建築構造物ではより複雑な復元力特性を呈するが、本質的にはこれで近似して大差ない場合も多い。

ランダム地震入力に対するかかる構造物の応答解析は、解析手法の困難さからこれまでほとんどすべてデジタルまたはアナログ・コンピュータによるシミュレー



z_g = Displacement of base
 x_i = Displacement of i -th mass relative to base
 x_j = Displacement of i -th mass relative to $(i-1)$ -th mass

図-1 多自由度履歴系

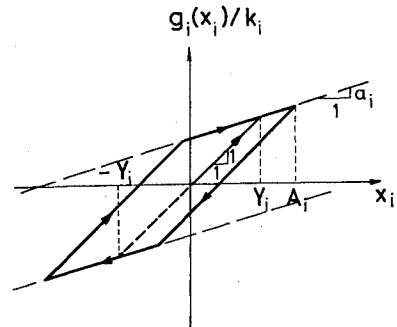


図-2 双一次型履歴復元力特性

ションで、ケース・バイ・ケースに、あるいはモンテカルロ法で調べられてきているが、ここでは精度の良い等価線形化手法を開発して解析解を求めている。上記構造物の地震時動的性状をパラメトリックに調べるにはこの手法は都合が良い。この方向の研究として、これまでにKaulの論文⁹⁾があるが、そこでは状態変数 $3n$ (n は原系の自由度)のFokker-Plank方程式内の非線形項について等価線形化を行っており、応答共分散マトリックスを求めるに非常ランダム過程で $3n(3n+1)/2$ 元の連立1階微分方程式を、また定常ランダム過程で同元の連立1次方程式を解かなければならない。そして上記文献6)では等価線形化後のFokker-Plank方程式に

* 正会員 工博 Assistant Professor, Div. of Structural Engineering Asian Institute of Technology, Bangkok, Thailand. (京都大学工学部土木工学教室より派遣)

対応する明確なモデルを与えていない。また途中密度関数を導入するところにラフな面がある。本論文では線形系に原系と同一タイプの多自由度系を採用し、その等価剛性および等価減衰係数は rms ダクティリティー応答量の関数として求めている。ただし当等価線形化手法には原系の定常ランダム応答にできる限り忠実な数式表現化を試み、精度の検証は1自由度系に対して行った。

次に非定常ランダム地震入力に対する上記非線形履歴系の近似非定常ランダム応答計算法を示した。まず、入力にある振動数成分を有し、その平均強度が時間とともに階段的に変化するフィルタード・ショット・ノイズを採用し、これに対する原系の応答は、時間軸を微小区間に分割し、各区間内においては初期条件、つまり1つ前の区間の最終応答値から得られる等価線形系の応答で置き換える。このため、ランダム定常入力に対する非比例減衰系の遷移応答共分散マトリックスに関する $n(2n+1)$ 元の連立1階微分方程式を導き、この解析解を複素固有値解析を通して求めている。また定常ランダム応答過程から導かれる等価線形系をうへの逐次計算に適用することの妥当性についてはすでに1自由度系に対して報告されている¹⁴⁾。

3. 等価線形化手法

ランダム入力を受ける非線形多自由度系の等価線形化手法の最初のステップは文献 5) に述べられている。これは非線形1自由度に対する Krylov-Bogoliubov 法⁷⁾の拡張であり、したがって容易に考えつくことは、Caughey が1自由度系に対して試みた狭帯域応答仮定²⁾をすることであろう。しかし、これはすでに報じられているように⁴⁾、降伏比 α が小さくなる ($\alpha \ll 1$) と非常に精度が悪くなる。ここでは、定常ランダム振動時の双一次型履歴復元力特性の変化により忠実な数式表現化を試みる。

いま、非線形 n 自由度系の運動方程式を次式で表わす。

$$[M]\{\ddot{z}\} + [C]\{\dot{z}\} + \{\psi(\{z\})\} = \{F(t)\}$$

$$\left(\cdot \equiv \frac{d}{dt} \right) \dots\dots\dots(2.1)$$

ただし、 $[M]$ は系の質量マトリックス、 $[C]$ は微小線形振動時の減衰マトリックス、 $\{z\}$ は図-1の変位ベクトル、そして $\{\psi(\{z\})\}$ は $\{z\}$ に依存した復元力ベクトル、 $\{F(t)\}$ は外力ベクトルである。式 (2.1) に対する等価線形系として

$$[M]\{\ddot{z}\} + [C]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} = \{F(t)\} \dots(2.2)$$

を定義すると、等価粘性減衰マトリックス $[C]$ および等価剛性マトリックス $[K]$ は式 (2.1) と (2.2) の自

乗誤差の期待値最小化の規範、すなわち

$$E[\{\varepsilon\}^T \{\varepsilon\}] \rightarrow \text{Min.} \dots\dots\dots(2.3)$$

より算出される。ただし

$$\{\varepsilon\} = ([\hat{C}] - [C])\{\dot{z}\} + ([\hat{K}] - [K])\{z\} - \{\psi(\{z\})\}$$

そして $\{\varepsilon\}^T$ は $\{\varepsilon\}$ の転置ベクトルである。特に図-1で表わされる系の場合は、質点 $(i-1)$ と、 i を連結する非線形ばね剛性 $g_i(x_i)$ に対して、相対変位 x_i の関係する線形剛性項と相対速度 \dot{x}_i の関係する粘性減衰項の線形結合を、つまり

$$g_i(x_i) = \hat{c}_i \dot{x}_i + \hat{k}_i x_i \dots\dots\dots(2.4)$$

を仮定し、さらに応答の定常確率過程状態を考慮すると

$$\hat{c}_i = c_i + E[g_i(x_i)\dot{x}_i]/E[\dot{x}_i^2] \dots\dots\dots(2.5 \cdot a)$$

$$\hat{k}_i = E[g_i(x_i)x_i]/E[x_i^2] \dots\dots\dots(2.5 \cdot b)$$

を得る。ただし、 $E[\cdot]$ はランダム変動量の期待値を表わす。

上式中の期待値を評価するには、まず相隣る2質点間の力学モデル化を図-3のように行い、各質点の相対変位を $(1-\alpha_i)k_i$ の剛性を有するばねの伸び w_i と、クーロン・スライダの滑り v_i とに分ける。すなわち、

$$x_i = w_i + v_i \dots\dots\dots(2.6)$$

このとき、式 (2.4) の復元力は

$$g_i(x_i) = \alpha k_i \dot{x}_i + (1-\alpha)k_i w_i \dots\dots\dots(2.7)$$

と表わされる。ただし当然のことながら $|w_i| \leq Y_i$ である。式 (2.7) を式 (2.5) に代入し、再び応答の定常確率過程を考慮すると

$$\frac{\hat{c}_i}{k_i} = \frac{c_i}{k_i} + (1-\alpha_i) \frac{E[w_i \dot{v}_i]}{E[\dot{x}_i^2]} \dots\dots\dots(2.8 \cdot a)$$

$$\frac{\hat{k}_i}{k_i} = \alpha_i + (1-\alpha_i) \frac{E[w_i^2] + E[w_i v_i]}{E[x_i^2]} \dots\dots\dots(2.8 \cdot b)$$

を得る。ここで第1式を評価するにまず $E[w_i \dot{v}_i]$ を算定しなければならないが、確率密度関数 $P_{W\dot{V}}(w_i, \dot{v}_i)$ を導入すると

$$E[w_i \dot{v}_i] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-Y}^Y w_i \dot{v}_i P_{W\dot{V}}(w_i, \dot{v}_i) dw_i d\dot{v}_i \dots\dots\dots(2.9)$$

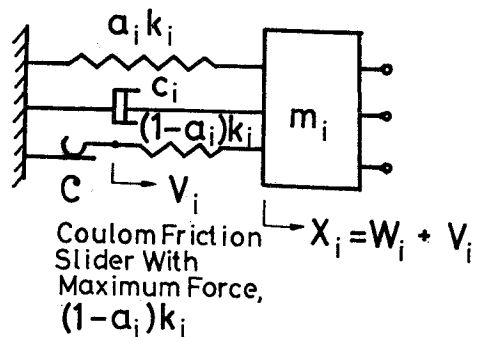


図-3 双一次型履歴系の力学モデル

ところで、双一次型履歴系の運動を物理的に考察すると (i) $|w_i| < Y_i$ ではクーロン・スライダは静止しているので $\dot{v}=0$, (ii) $|w_i|=Y_i$ では $\dot{w}_i=0$, したがって式 (2.6) から $\dot{x}_i=\dot{v}_i$, またクーロン・スライダの滑り方向は w_i の伸び方向と一致しているので $w_i\dot{v}_i > 0$, しかし両者はこの状態ではそれぞれ独立したものと見てよい. 以上より $P_{W\dot{V}}$ に次式を採用すればよい.

$$P_{W\dot{V}}(w_i, \dot{v}_i) = P_W(Y_i)\delta(|w_i|-Y_i) \cdot P_{\dot{V}}(\dot{v}_i)\mathbf{1}(|w_i|) \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

ただし $P_W, P_{\dot{V}}$ はそれぞれ w, \dot{v}_i に関する確率密度関数を, $\delta(\cdot)$ は Dirac のデルタ関数, $\mathbf{1}(\cdot)$ は Heaviside のステップ関数を表す. 式 (2.10) を式 (2.9) に用いると,

$$E[w_i\dot{v}_i] = 2 Y_i P_W(Y_i) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}_i P_{\dot{V}}(\dot{v}_i) d\dot{v}_i \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

$P_{\dot{V}}(\dot{v})$ に平均値零, 分散 $\sigma_{\dot{v}}^2 = E[\dot{v}^2] = E[\dot{x}^2] = \sigma_{\dot{x}}^2$ のガウス分布を仮定すると,

$$E[w_i\dot{v}_i] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Y_i P_W(Y_i) \sigma_{\dot{x}_i} \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

そして $P_W(Y_i)$ の値は確率密度関数 $P_{W\dot{V}}(w, \dot{v})$ の正規化条件から求められる. しかし, うえに見られるように $E[w_i\dot{v}_i]$ の算定には $|w_i|=Y_i$ のみの確率密度関数が意義をもつ. 付録 A において, $P_W(Y_i)$ について検討した結果, 本研究では近似的に

$$P_W(Y_i) = \left(\frac{E[W_i^2]}{Y_i^2} \right)^m \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

を採用し, 指数 m はシミュレーション結果との比較から決定した. 一方, 式 (2.8・b) に対しては応答 x_i の分布について対称性を仮定すると, 式 (2.6) と後に出てくる式 (2.19) より $E[w_i v_i] = 0$ を得るので

$$\frac{k_i}{k_i} = \alpha_i + (1-\alpha_i) \frac{E[w_i^2]}{E[x_i^2]} \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

$$\frac{E[w_i^2|a_i=A_i]}{Y_i^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{A_i^2}{Y_i^2} & , A_i < Y_i \\ 1 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{3}{2} \frac{A_i}{Y_i} \left(\frac{A_i}{Y_i} - \frac{4}{3} \right) \cos^{-1} \left(1 - 2 \frac{Y_i}{A_i} \right) - \left(3 \frac{A_i}{Y_i} - 2 \right) \left(\frac{A_i}{Y_i} - 1 \right)^{1/2} \right] & , A_i \geq Y_i \end{cases} \quad \dots\dots\dots(2.20)$$

そして振幅 A_i に確率密度関数 $p_A(a_i)$ を導入すると

$$\frac{E[w_i^2]}{Y_i^2} = \int_0^{\infty} \frac{E[w_i^2|A_i=a_i]}{Y_i^2} p_A(a_i) da_i \quad \dots\dots\dots(2.21)$$

(2) 広帯域 (B.B.) 応答仮定

応答がランダム広帯域状態であると, 前述の狭帯域応答仮定の場合と違って, 各応答サイクルにおいても固定された最大振幅に対する平行四辺形を描かない. そして $|w_i|=Y_i$ の状態からの反転挙動で最大振幅 A_i に達する以前にその平行四辺形の内部に入る. したがって $(1-\alpha_i)k_i$ ばねの伸びの確率密度 $p_W(w_i)$ を導入すると

$$E[w_i^2|a_i=A_i] = \int_0^{2\pi} p_{\theta}(\theta_i) \left[\int w_i^2 p_W(w_i|A_i=a_i, \theta_i=\theta_i) dw_i \right] d\theta_i \quad \dots\dots\dots(2.22)$$

以前著者はこの事実を1つの試みとして次のように処理した¹³⁾. すなわち $|w_i|=Y_i$ の状態から線形運動に復帰する

以上からわかるように, 本論文での等価線形化手法では, $E[w_i^2]/Y_i^2$ を推定することが必須となる. このため応答 x_i を

$$x_i = A_i \cos \theta_i \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

と仮定し, A_i と θ_i は独立過程でそれぞれ次の密度関数を有するものとする. すなわち

$$P_{\theta}(\theta_i) = (2\pi)^{-1}, \quad 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

$$P_A(a_i) = \sigma_{x_i}^{-2} a_i \exp\left(-\frac{a_i^2}{2\sigma_{x_i}^2}\right), \quad a_i > 0 \quad \dots\dots\dots(2.17)$$

ただし $\sigma_{x_i} = (E[x_i^2])^{1/2}$ で rms 変位応答値である. これらの仮定は x_i にガウス・ランダム過程を付与する. よって条件付期待値 $E[w_i^2|a_i=A_i, \theta_i=\theta_i]$ $E[w_i^2]$ が求まれば, $E[w_i^2]$ は

$$E[w_i^2] = \int_0^{2\pi} p_{\theta}(\theta_i) \int_0^{\infty} p_A(a_i) E[w_i^2|A_i] da_i d\theta_i \quad \dots\dots\dots(2.18)$$

で計算される. 本論文では $E[w_i^2|a_i=A, \theta_i=\theta_i]$ の評価にあたって, 以下の2つの応答状態を考える.

(1) 狭帯域 (N.B.) 応答仮定

これは非線形応答状態 ($A_i > Y_i$) において, 毎サイクル同一履歴中心を保持して原点对称な平行四辺形を描くことを意味する. この場合, $(1-\alpha_i)k_i$ ばねの伸びは

$$w_i = \begin{cases} x_i - A_i + Y_i & 0 \leq \theta_i < \theta_i^* \\ -Y_i & \theta_i^* \leq \theta_i \leq \pi \\ x_i - Y_i + A_i & \pi \leq \theta_i \leq \pi + \theta_i^* \\ Y_i & \pi + \theta_i^* \leq \theta_i \leq 2\pi \end{cases}$$

ただし,

$$\theta_i^* = \cos^{-1} \left(1 - \frac{2 Y_i}{A_i} \right) \quad \dots\dots\dots(2.19)$$

と表わされるので

確率は平行四辺形の高さに逆比例している、これは $E[w_i^2|a_i=A_i]/Y_i^2$ に対して次式を導く。

$$\frac{E[w_i^2|a_i=A_i]}{Y_i^2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{A_i^2}{Y_i^2} & , A_i \leq Y_i \\ \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3} \frac{A_i}{Y_i} + \frac{1}{6} \frac{A_i^2}{Y_i^2} \right) + \frac{4}{3\pi} \left(\frac{A_i}{Y_i} - 1 \right) \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{A_i}{Y_i} \right) \cos^{-1} \left(1 - \frac{2Y_i}{A_i} \right) - \left(\frac{A_i}{Y_i} - 1 \right)^{1/2} \right] & , Y_i \leq A_i \leq 2Y_i \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{4}{3} - 2 \frac{A_i}{Y_i} + \frac{A_i^2}{Y_i^2} \right) \cos^{-1} \left(1 - \frac{2Y_i}{A_i} \right) - \left(2 \frac{A_i}{Y_i} - 3 \right) \left(\frac{A_i}{Y_i} - 1 \right)^{1/2} \right] & , A_i \geq 2Y_i \end{cases} \dots\dots\dots(2.23)$$

3. 1 自由度系についての精度の検証

前節での等価線形手法の精度の検証を1自由度系に対して行う。簡単のため入力は次の性質を有するホワイト・ノイズ $n(\tau)$ とする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} E[n(\tau)] &= 0 \\ E[n(t+\tau)n(t)] &= 2\pi S_0 \delta(\tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

シミュレーションによる実験結果は以前に著者らが報告したもの¹²⁾を使用している。

まず、式 (2.20), (2.23) から算出される $E[w^2]/Y^2$ を図-4 に示す。同図にはこれらの精度の検証のための実験値もプロットしている。両者を比較すると、応答領域 $\sigma_x/Y < 1$ では (N.B.) 応答仮定と (B.B.) 応答仮定による差はあまりないが、 σ_x/Y が大きくなるにつれて両者の差が現われてくる。 σ_x/Y が2程度までは (B.B.) 仮定の方が実験値への適合度が良いが、付録 A にも述べるように $\sigma_x/Y \geq 1$ となると $E[w^2]/Y^2$ は1に漸近しなければならない。(N.B.) 仮定はこれを満たすが (B.B.) 仮定は零に漸近する。

ところで応答平均振動数

$$\omega_x = \sigma_x / \sigma_x \dots\dots\dots(3.2)$$

を定義すると、1自由度系に対しては $\omega_x/\omega_0 = k/k$ であるから式 (2.14) の精度が検証される。これについてすでに文献 12) で報告したのが図-5 である。実験値との比較は、 $\beta_0 = 0.01$ 程度では $\alpha = 1/2$ のときは (N.B.) 仮定が、 $\alpha = 1/10$ より小さいときは (B.B.) 仮定が全応答領域で良い一致を示している。しかし (N.B.) と (B.B.) 仮定の差はわずかである。 β_0 が大きくなるにつれて、(B.B.) 仮定でも $\sigma_x/Y < 2$ の範囲で精度が劣ってくるの

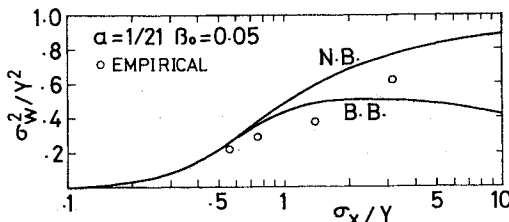


図-4 σ_w^2/Y^2 と σ_x/Y の関係

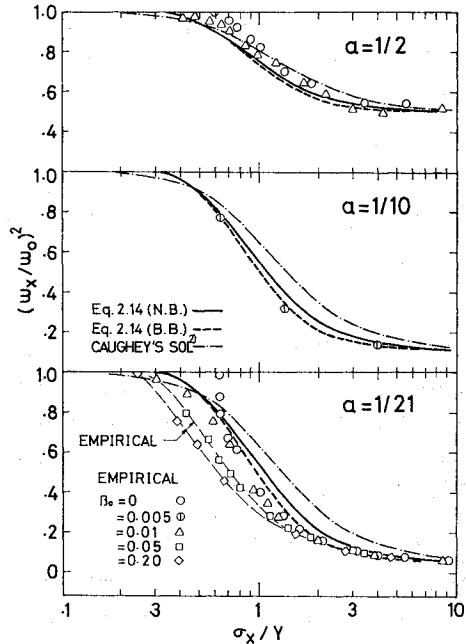


図-5 応答平均振動数

が $\alpha = 1/21$ の場合見られる。同図には従来の Caughey の解²⁾ (これは式 (2.8-a) で (N.B.) 仮定を採用したときに得られる) も描いてあるが、これは $\alpha = 1/2$ 程度までのときにのみ良い予測値を与えることがわかる。

図-6 は式 (2.8-a), (2.13) および式 (2.14), (2.20) より計算される1自由度系の定常 rms 変位応答を実験値と比較したものである。ただし式 (2.13) において指数 m はそれぞれの降伏比に最も適した値を、すなわち、 $\alpha = 1/2$ では $m = 2$, $\alpha = 1/10$ では $m = 3$, そして $\alpha = 1/21$ では $m = 4$ を採っている。この決定については付録 A を参照されたい。また、同図には文献 12) で提案した Modified Power Balance Method から得られる応答および $\sigma_x/Y < 1$ での Lutes による非線形非履歴系による近似解 ($\beta_0 = 0$ の場合¹⁰⁾、さらに応答平均振動数に実験を使用したものも合わせ描いた。なお、ここで使用している尺度 N は入力強度を表わす量で

$$N = \frac{\sqrt{2\pi S_0 \omega_0}}{\omega_0^2} \dots\dots\dots(3.3)$$

で定義され、 ω_0, β_0 は微小線形振動時の固有円振動数および減衰定数である。ちなみに線形1自由度系の変位・速度 rms 値はこの N を用いると

$$\frac{\sigma_x}{N} = \frac{\sigma_{\dot{x}}/\omega_0}{N} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta_0}} \dots\dots\dots(3.4)$$

と表わされる。図-6 より本研究で開発した等価線形化手法は定常 rms 変位応答に関して、 $\beta_0=0.01\sim 0.05$ で実験値と非常に良い一致を全応答領域にわたって示していることがわかる。この範囲の粘性減衰効果は通常の土木・建築構造物に期待し得る量であろう。M.P.B. 法との比較では、本手法はほとんど差はないが、しいていえば $\sigma_x/Y < 1$ の範囲で $\alpha=1/2$ のときは前者が、また、 $\alpha=1/21$ のときは後者が精度が向上している。

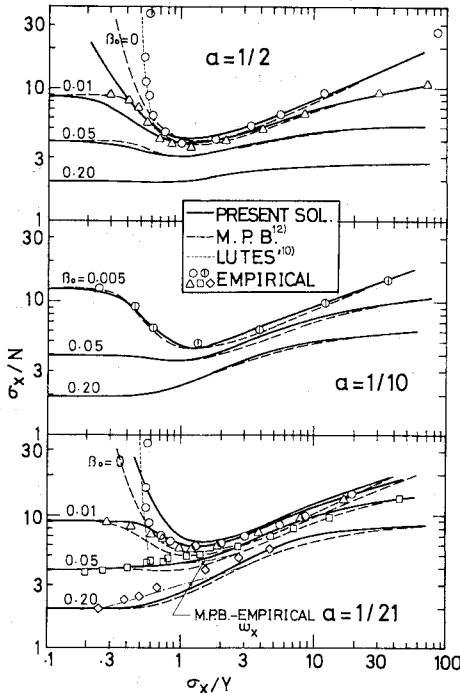


図-6 定常 rms 変位

4. 応答共分散マトリックス

ランダム地震入力に対する構造物の応答解析は、まず次の応答共分散マトリックスを算定することである。

$$\begin{bmatrix} E[\{\dot{y}\}\{\dot{y}\}^T] & E[\{\dot{y}\}\{y\}^T] \\ E[\{\dot{y}\}\{y\}^T] & E[\{y}\{y\}^T] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.1)$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} E[\{\dot{x}\}\{\dot{x}\}^T] & E[\{\dot{x}\}\{x\}^T] \\ E[\{\dot{x}\}\{x\}^T] & E[\{x}\{x\}^T] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4.1)'$$

そしてこれらは構造物の動的安全性あるいは信頼性解析にとって必須の諸量となる。ところで、解析対象構造

物が式(2.1)で表わされる非線形履歴系の場合、応答解析を時間軸上で微小区間に区切って、この各時間区間内では原系に代わって等価線形系で近似する。この線形系は、当然のことながら一般には古典モード解析の適用できないいわゆる非比例減衰系⁹⁾となる。上の応答共分散マトリックスを求めるに、まず式(2.2)を複素モード分解⁹⁾し、その単位衝撃関数を決定して Rice の手法⁸⁾に従っても良いが、ここでは、この目的のためにより適した手法を採る。

これまで地震動のシミュレーションには、多くの人が種々の方法を発表してきているが⁹⁾、本質的には発生さす波にある卓越振動数を持たせるとともに、継続時間中の平均強度を変化させることであろう。そのうち最も典型的なものとして、ショット・ノイズ \ddot{z}_0 に線形1自由度系のフィルターをかけ、その絶対加速度を地震加速度 \ddot{z}_g とみなす考え方が¹⁴⁾ある。すなわち

$$\ddot{z}_g = \ddot{x}_0 + \ddot{z}_0(t) \dots\dots\dots(4.2)$$

ここに x_0 と $\ddot{z}_0(t)$ との関係は

$$\ddot{x}_0 + 2\xi_g\omega_g\dot{x}_0 + \omega_g^2x_0 = -\ddot{z}_0(t) \dots\dots\dots(4.3)$$

で ω_g, ξ_g はそれぞれ地盤の卓越振動数および減衰定数を与える。そして外力項は

$$E[\ddot{z}_0(t)] = 0$$

かつ

$$E[\ddot{z}_0(t)\ddot{z}_0(t+\tau)] = 2\pi S_{\ddot{z}_0}(t)\delta(\tau) \dots\dots\dots(4.4)$$

の特性を有する。この場合式(2.2)は次式の形となる。

$$[M]\{\dot{y}\} + [\tilde{C}]\{y\} + [\tilde{K}]\{y\} = -[M]\{1\}\ddot{z}_g(t) \dots\dots\dots(4.5)$$

いま、式(4.2)、(4.3)および(4.5)を1つの式に書き改めると、

$$[\tilde{M}]\{\dot{y}\} + [\tilde{C}]\{y\} + [\tilde{K}]\{y\} = \{\tilde{F}\}\ddot{z}_0(t) \dots\dots\dots(4.6)$$

ただし

$$\begin{aligned} \{y\} &= \begin{Bmatrix} \{y\} \\ x_0 \end{Bmatrix} \\ [\tilde{M}] &= \begin{bmatrix} [M] & [M]\{1\} \\ \{0\} & 1 \end{bmatrix} \\ [\tilde{C}] &= \begin{bmatrix} [C] & \{0\} \\ \{0\} & 2\xi_g\omega_g \end{bmatrix} \\ [\tilde{K}] &= \begin{bmatrix} [K] & \{0\} \\ \{0\} & \omega_g^2 \end{bmatrix} \\ \{\tilde{F}\} &= \begin{Bmatrix} [M]\{1\} \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

さらに $2(n+1)$ の状態ベクトル $\{\bar{a}\}^T = \{\{\dot{y}\}^T | \{y\}^T\}$ を導入すると式(4.6)は

$$[A]\{\dot{\bar{a}}\} + [B]\{\bar{a}\} = \{P\}\ddot{z}_0(\tau) \dots\dots\dots(4.7)$$

となる。ここで

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [\tilde{M}] \\ [\tilde{M}] & [\tilde{C}] \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -[\tilde{M}] & [0] \\ [0] & [\tilde{K}] \end{bmatrix}$$

$$[P] = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}$$

式 (4.1) の応答共分散マトリックスは $\{\tilde{a}\}$ で表わすと $E[\{\tilde{a}\}\{\tilde{a}\}^T]$ となるので、式 (4.7) からこれに関する微分方程式を作成することを考える。まず、式 (4.7) を

$$\{\dot{\tilde{a}}\} + [D]\{\tilde{a}\} = \{Q\}\ddot{z}_0(t) \dots\dots\dots(4.8)$$

の形に直し、これに後から $\{\tilde{a}\}^T$ を乗じたものと、この転置に前から $\{\tilde{a}\}$ を乗じたものを加え合わせ、それぞれの項に関して期待値を取ると次式を得る (付録 B 参照)。

$$\frac{d}{dt}[R_{\tilde{a}}] + [D][R_{\tilde{a}}] + [R_{\tilde{a}}][D]^T = 2\pi S_{\ddot{z}_0}(t)[\{Q\}\{Q\}^T] \dots\dots\dots(4.9)$$

ただし

$$[R_{\tilde{a}}] = E[\{\tilde{a}\}\{\tilde{a}\}^T]$$

$$[D] = [A]^{-1}[B]$$

$$\{Q\} = [A]^{-1}\{P\}$$

そして、特に定常確率応答は

$$\frac{d}{dt}[R_{\tilde{a}}] = 0$$

とおいて求める。これは Lyapunov 安定性方程式とよばれる形となる。

式 (4.9) を解くに次の座標変換を行う。

$$\{\tilde{a}\} = [\phi]\{r\} \dots\dots\dots(4.10)$$

ここに、 $[\phi]$ は式 (4.8) に対する複素固有モード・マトリックスであり、複素固有値 λ_i は、

$$\det. |[D] - \lambda[I]| = 0 \dots\dots\dots(4.11)$$

ただし $[I]$ は単位マトリックスの解である。いま、 $\{r\}$ に関する応答共分散マトリックス $E[\{r\}\{r\}^T]$ を $[R_r]$ で表わせば、これと $[R_{\tilde{a}}]$ との関係は式 (4.10) より

$$[R_{\tilde{a}}] = [\phi][R_r][\phi]^T \dots\dots\dots(4.12)$$

これを式 (4.9) に代入し、前から $[\phi]$ の逆マトリックス $[\phi]^{-1}$ をそして後から $([\phi]^T)^{-1}$ を乗じ

$$[\phi]^{-1}[D][\phi] = [\lambda]$$

なることを考慮すると注) $[R_r]$ に関する微分方程式

注): 運動方程式 (4.6) において、慣性(質量)、減衰、剛性各マトリックスが対称性を有する場合は、式 (4.7) において、 $[A]$ 、 $[B]$ 両マトリックスが対称となり、Foss の複素固有モード直交性²⁾、つまり $[\phi]^T[A][\phi] = [A_1]$ 、 $[\phi]^T[B][\phi] = [A_2]$ を利用できるが、今回は式 (4.6) の記号の説明から明らかなように $[\tilde{M}]$ 、 $[\tilde{C}]$ および $[\tilde{K}]$ は非対称である。したがって、 $[\phi]^{-1}[D][\phi] = [\lambda]$ を適用しなければならない。このため、複素マトリックスの逆行列が必要となる (付録 C 参照)。

$$\frac{d}{dt}[R_r] + [\lambda][R_r] + [R_r][\lambda] = [G(t)] \dots\dots\dots(4.13)$$

を得る。ただし

$$[G(t)] = 2\pi S_{\ddot{z}_0}(t)[\phi]^{-1}\{Q\}\{Q\}^T([\phi]^{-1})^T \dots\dots\dots(4.14)$$

式 (4.13) の解は

$$[R_r] = \int_0^t [e^{-\lambda_j(t-\tau)}][G(\tau)][e^{-\lambda_j(t-\tau)}]d\tau \dots\dots\dots(4.15)$$

で与えられる。いま、式 (4.4) の強度関数に階段関数を仮定すると、時間区間 $t_i \leq t < t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ では、 $[G(t)] = [G(t_i)] (= \text{一定値})$ となるので上の積分は容易にできて (付録 B 参照)。

$$[R_r]_{t=t_{i+1}} = \left[\frac{1}{\lambda_j + \lambda_m} ([G(t_i)] - [e^{-\lambda_j \Delta t_i}][G(t_i)][e^{-\lambda_j \Delta t_i}]_{t_m}) + [e^{-\lambda_j \Delta t_i}][R_r']_{t=t_i}[e^{-\lambda_j \Delta t_i}] \right] \dots\dots\dots(4.16)$$

ただし $[R_r']_{t=t_i}$ は初期条件を表わし、履歴系の応答解析では各時刻ステップごとに 2. の等価線形化手法を繰り返すので、1つ前のステップで得られた応答共分散マトリックス $[R_{\tilde{a}}]_{t=t_i}$ と、考えている区間内のモード・マトリックス $[\phi]_{t=t_i}$ を用いて

$$[R_r']_{t=t_{i+1}} = [\phi]_{t=t_i}^{-1}[R_{\tilde{a}}]_{t=t_i}([\phi]_{t=t_{i+1}}^T)^{-1} \dots\dots\dots(4.17)$$

で求められる。そして区間幅 Δt_i を十分小さくすれば強度 $S_{\ddot{z}_0}(t)$ に対してかなり滑らかな変化を付与することができる。

5. 数値解析例

本研究の解析例として、33階建てのせん断型ビルディングを5質点系にモデル化し¹⁸⁾、その模擬地震動に対する応答を特に靱性率効果に着目して調べた。この系の微小線形振動時の質量および剛性マトリックスはそれぞれ

$$[M] = \begin{bmatrix} 14.14 & & & & \\ & 14.14 & & 0 & \\ & & & 13.13 & \\ & & & & 12.12 \\ & 0 & & & & 9.78 \end{bmatrix} \text{ t} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 828 & -342 & & & & \\ -342 & 606 & -264 & & & 0 \\ & -264 & 475 & -211 & & \\ & & -211 & 337 & -126 & \\ & & & 0 & -126 & 126 \end{bmatrix} \text{ t/cm}$$

で、粘性減衰効果は各次固有モード同一値5%とする。したがって減衰マトリックスの形は

$$[C] = 0.1[M]^{1/2}([M]^{-1/2}[K][M]^{-1/2})^{1/2}[M]^{1/2}$$

この系の線形時動特性については文献 13) あるいは 18) を参照されたい。そしてこの系の各質点間の降伏変位レベルは下から上に向かって

$$\{Y_i\} = \{10.02 \ 12.20 \ 12.38 \ 10.52 \ 8.49\} \text{cm}$$

としている。

次に入力地震動に対して、波形特性としての振動数成分および強度の時間的変化を規定しなければならない。まず前者は式 (4.3) よりパワー・スペクトル密度の形として、 ξ_g が大きく遷移項を無視すると

$$S_{\ddot{z}_0}(\omega, \tau) \approx \frac{1 + 4\xi_g \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right]^2 + 4\xi_g \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} S_{\ddot{z}_0}(t) \dots\dots\dots (5.1)$$

が決まり、よって地震動分散は

$$\sigma_{\ddot{z}_0}^2(t) \approx \pi \left(\frac{1}{2\xi_g} + 2\xi_g \right) \omega_g S_{\ddot{z}_0}(t) \dots\dots\dots (5.2)$$

となる。ここでは上記のパラメーターに

$$\omega_g = 4\pi \text{ rad/sec}, \quad \xi_g = 0.5$$

を選んだ (図-7)。後者の強度に関する $S_{\ddot{z}_0}(t)$ には Ang と Amin の提案した関数

$$S_{\ddot{z}_0}(t) = \begin{cases} S_0 \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 & 0 \leq t \leq t_1 \\ S_0 & t_1 \leq t \leq t_2 \dots\dots\dots (5.3) \\ S_0 e^{-c(t-t_2)} & t_2 \leq t \end{cases}$$

ただし

$$t_1 = 1.5 \text{ sec}, \quad t_2 = 15 \text{ sec}, \quad c = 0.18 \text{ sec}^{-1}$$

を十分に近似できる階段関数を採用した (図-8 の最下段図)。

応答計算は時間領域で微小区間 $\Delta t = 0.25 \text{ sec}$ 間隔ごとに、1つ前のステップの最後の応答量から式 (2.8・a) および (2.14) を介して得られる等価線形系について行った。したがってここでは非線形履歴構造物の非定常確率応答を求めるに、上の各区間内では応答の定常確率過程を仮定して得られた等価線形系で近似しているわけである。この妥当性についてはすでに文献 14) で自由度系に対して確かめられている。

図-8 の $\alpha_i = 1/10$ の場合の各質点間のダクティリティ α_i rms 応答を示す。(a) 図は入力 \ddot{z}_0 の最大時 rms 強度 (したがって式 (5.3) の $S_{\ddot{z}_0}(t) = S_0$ の部分) におい

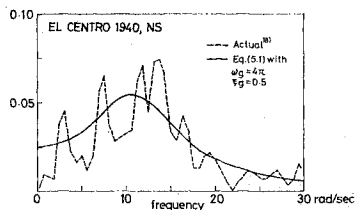
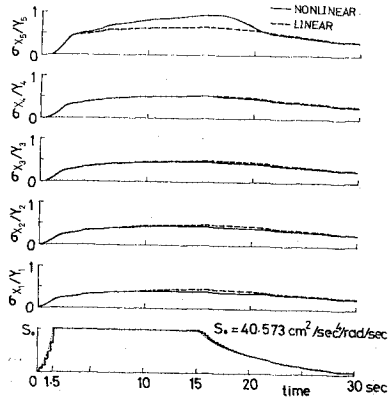
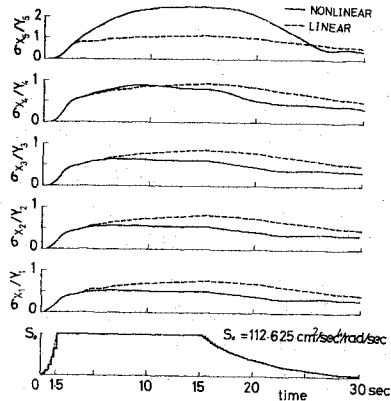


図-7 正規化された地震動のパワー・スペクトル密度



(a)



(b)

図-8 非定常 rms ダクティリティ応答

て TAFT 1952, N 21°E 記録に相当する地震動, すなわち $\sigma_{\ddot{z}_0} = 56.6 \text{ cm/sec}^2$, (b) 図は EL CENTRO 1940, NS 記録に相当する地震動, すなわち, $\sigma_{\ddot{z}_0} = 94.3 \text{ cm/sec}^2$ に対するものである。ただしそれらのパワー・スペクトル密度の相対的形状は全入力時間にわたってほぼ式 (5.1) で与えられ, 図-7 の実線である。図-8 には比較のため線形応答計算結果も一緒に描いてあるが, 入力強度が大きくなると, (b) 図に見られるように質点 1~4 と質点 5 (系の最上端質点) では非線形履歴復元力特性の効果はまったく異なるということに注意されたい。前者では, 非線形応答は線形時基本固有周期 (4.2 秒) の 2 倍程度ですでに最大値に達し, その後定常入力強度があるにもかかわらず応答はほぼ一定値を保つ。これは履歴減衰効果のため遷移応答期間が短縮されたと判断される。一方, 線形応答は遷移期間が長く入力強度が低下しない限り増大するもので非線形応答より上回っている。質点 5 では, 非線形応答が常に線形応答を上回って最大応答に達する時間も線形系よりかなり遅れている。これらのことは非線形履歴復元力特性が多自由度系においては, 応答量が大きくなると履歴減衰効果のみならず剛

性の低下による固有モード形状の変化となって現われてくるためと説明される．ところで，(a) 図の入力強度に対しては非線形履歴効果は質点 5 以外にはほとんど影響を持たない．

なお，上の非線形応答様相はアナログ・コンピューターを使っての EL CENTRO 1940, NS 記録に対する直接積分結果¹³⁾とよく対応している．

6. 結 語

本論文で著者は，質点間が双一次型履歴復元力特性を有する多自由度系のランダム等価線形化法を考案し，またそれに伴う非比例減衰系の擬似非正常確率入力に対する応答共分散マトリックスの新たな計算法を示した．等価線形化手法の精度は 1 自由度系について検証し高精度を保証している．またここでの擬似非正常確率入力の考え方は各時刻区間ごとにその強度および振動数成分を変化させることが可能であり，しかも各区間を十分小さくすれば地震動としての滑らかな非正常入力を作成できる．解析例としては，地震動に対する高層ビルディングを対象に応答におよぼす靱性率効果を調べ，合理的耐震設計におけるその重要性を指摘した．

ところで，上記系に対して残されたいま 1 つの重要課題として，非線形領域にわたる応答になる残留変形の評価がある．本文に即していえばクーロン・スライダの動き v_i であり，これは直接地震動後の永久変形限度および地震動時の低サイクル疲労破壊に関係してくる．著者は地震時構造物の動的安全性という観点からこの問題へのアタックを進めている．

なお，本研究を進めるにあたり，ご指導を賜った京都大学土木教室の山田善一教授，また，関心を寄せられ励ましの言葉を送って下さった Rice Univ. の L.P. Lutes 教授，Pardue Univ. の J. FP. Yao 教授ならびに Univ. of California の J. Penzien 教授に感謝の意を表する次第である．

【付録 A】 $P_W(Y_i)$ の算定

2. で述べた理由により，密度関数 $P_{W\dot{v}}$ を次のように表わすことができる．

$$P_{W\dot{v}}(w_i \dot{v}_i) = \begin{cases} P_{W\dot{v},L}(w_i, \dot{v}_i) & |w_i| < Y_i - \epsilon_i \text{ に対して} \\ P_W(Y_i) \delta(|w_i| - Y_i) \cdot P_{\dot{v}}(\dot{v}) 1(|w_i|) & Y_i - \epsilon_i \leq |w_i| \leq Y_i \text{ に対して} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases} \quad \text{(A.1)}$$

ただし ϵ_i は無限小である．そして正規化条件は

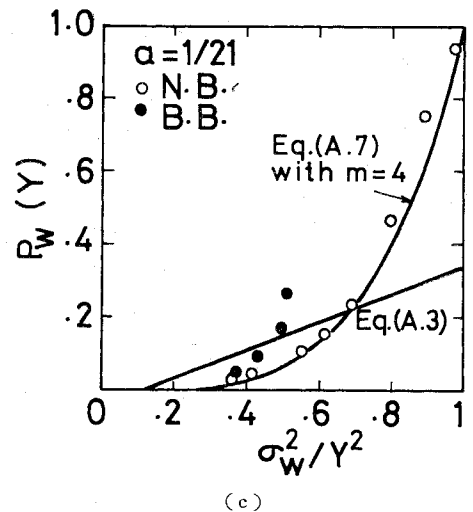
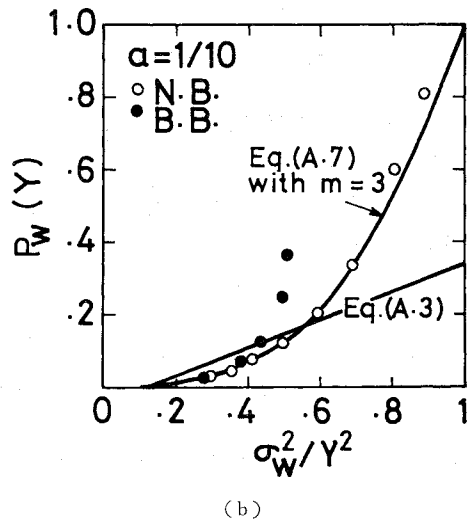
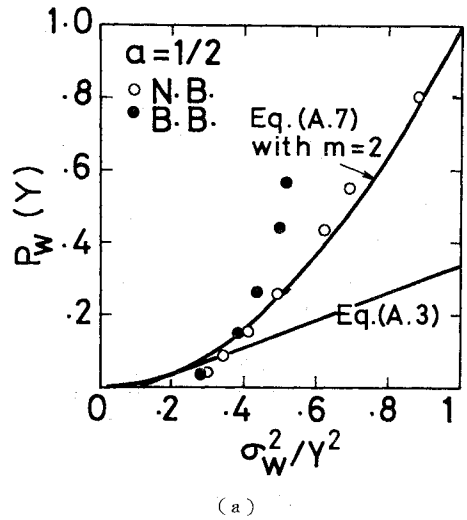


図-9 P_Y の値

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-Y_i}^{Y_i} P_W \dot{v}(w_i, \dot{v}_i) dw_i d\dot{v}_i = 1 \quad \dots\dots (A.2)$$

係数 $P_W(Y_i)$ を評価するに、まず非線形応答が非常に強いとき ($\sigma_{x_i}/Y_i \gg 1$) を考えると、直感的に $P_W \dot{v}, L$ は無視し得るほど小さく、そして $E[w_i^2] = Y_i^2$ と期待されるので

$$P_W(Y_i) = 1 \quad E[w_i^2] = Y_i^2 \text{ に対して} \dots\dots (A.3.a)$$

また、一方それほど非線形応答が強くないときは $P_W \dot{v}, L$ をガウス分布で近似すると、式 (A.2) の積分遂行結果は

$$P_W(Y_i) = \operatorname{erfc}\left(\frac{Y_i}{\sqrt{2} \sigma_{w_i}}\right) \quad E[w_i^2] < Y_i^2 \text{ に対して} \dots\dots (A.3.b)$$

を与える。ただし

$$\sigma_{w_i} = (E[w_i^2])^{1/2} \\ \operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} e^{-v^2} dv$$

で定義される余誤差関数である。そして、上式はほとんど線形応答状態、すなわち

$$\sigma_{w_i}/Y_i \ll 1$$

のときの

$$P_W(Y_i) = 0$$

を満たす。要するに $P_W(Y_i)$ は σ_{w_i}/Y_i の関数となっていることがわかる。実際、式 (2.12) の評価にあたっては、この全変域 $0 \leq \sigma_{w_i}/Y_i \leq 1$ における明確な関数表現が肝心であり、式 (A.3.a) と (A.3.b) は不連続であるので、いまシミュレーション結果から $P_W(Y_i)$ の変化を調べてみる。

1 自由度系について、定常ランダム応答から算出される等価粘性減衰定数

$$\beta_{eq} = \frac{\pi}{4} \left\{ \left(\frac{\omega_x}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{\sigma_x}{N} \right)^2 \right\} \dots\dots (A.5)$$

と、式 (2.8.a) から算定される等価粘性減衰定数

$$\beta_{eq} = \frac{(1-\alpha)}{\sqrt{2}\pi} \left(\frac{\omega_0}{\omega_x} \right)^2 \left(\frac{Y}{\sigma_x} \right) P_W(Y) + \beta_0 \quad \dots\dots (A.6)$$

を等値して得られた結果を、降伏比 α の典型的ないくつかの場合について横軸に $\sigma_{w_i}^2/Y^2$ をとって図-9 に示した。ここで、(N.B.)(B.B.) とあるのは、上式中の応答平均振動数 $\omega_x/\omega_0 = (k/k)^{1/2}$ を計算するに式 (2.14) において 2. で仮定した応答状態による差である。実験値は $\alpha=1/2$ と $1/21$ では $\beta_0=0$ のものを、 $\alpha=1/10$ では $\beta_0=0.005$ のものを使用している。(N.B.) 結果と (B.B.) 結果と比較した場合、当然のことながら、前者は上で述べた応答両極端の挙動を適切に表わす。rms 変位に関する限り両者の差はほとんどないので、本研究では全応答領域に対して統一的に (N.B.) 結果を基礎にして $P_W(Y)$ の評価を行った。これらは近似曲線として

$$P_W(Y) = \left(\frac{\sigma_{w_i}^2}{Y^2} \right)^m \dots\dots (A.7)$$

を思い起こさせる。図-9 にはそれぞれの降伏比 α に最も適合度の良い指数 m を選び示した。同図より、式 (A.3) の成立し得る範囲は非常に限られ、 $\alpha=1/2$ では $\sigma_{w_i}^2/Y^2 < 0.35$ 、 $\alpha=1/10$ では $\sigma_{w_i}^2/Y^2 < 0.6$ 、そして $\alpha=1/21$ では $\sigma_{w_i}^2/Y^2 \simeq 0.7$ となることがわかる。

【付録 B】 $[R_{\bar{z}}]$ と $[R_r]$ の計算法

応答共分散マトリックス $[R_{\bar{z}}]$ を評価するに、まず式 (4.8) に後から $\{\bar{u}\}^T$ を乗じたものと、式 (4.8) の転置に前から $\{\bar{u}\}$ を乗じたものを加え合わせそれぞれの項に関して期待値をとると

$$\frac{d}{dt} [R_{\bar{z}}] + [D][R_{\bar{z}}] + [R_{\bar{z}}][D]^T \\ = E[\{Q\}\{\bar{u}\}^T \ddot{z}_0(t)] + E[\{\bar{u}\}\{Q\}^T \ddot{z}_0(t)] \quad \dots\dots (B.1)$$

を得る。ところで微分方程式 (4.8) の解は

$$\{\bar{u}\} = \int_0^t e^{-[D](t-\tau)} \{Q\} \ddot{z}_0(\tau) d\tau \dots\dots (B.2)$$

で与えられるので、式 (B.1) の右辺については

$$E[\{Q\}\{\bar{u}\}^T \ddot{z}_0(t)] \\ = [\{Q\}\{Q\}^T] \int_0^t e^{-[D]T(t-\tau)} E[\ddot{z}_0(\tau) \ddot{z}_0(t)] d\tau$$

ここで式 (4.4) を考慮すると

$$= 2\pi S_{\ddot{z}_0}(t) [\{Q\}\{Q\}^T] \int_0^t e^{-[D]T(t-\tau)} \delta(t-\tau) d\tau \\ = \pi S_{\ddot{z}_0}(t) [\{Q\}\{Q\}^T] \quad \dots\dots (B.3)$$

同様に

$$E[\{\bar{u}\}\{Q\}^T \ddot{z}_0(t)] = \pi S_{\ddot{z}_0}(t) [\{Q\}\{Q\}^T] \quad \dots\dots (B.4)$$

よって、これらを式 (B.1) に代入すると式 (4.9) すなわち、

$$\frac{d}{dt} [R_{\bar{z}}] + [D][R_{\bar{z}}] + [R_{\bar{z}}][D]^T \\ = 2\pi S(t) [\{Q\}\{Q\}^T] \quad \dots\dots (B.5)$$

を得る。

さて、座標変換式 (4.10) を上式に施すと式 (4.13) となり、この式は各要素ごとの線形微分方程式

$$\frac{d}{dt} [(R_r)_{lm}] + (\lambda_l + \lambda_m)(R_r)_{lm} = (G(t))_{lm} \quad \dots\dots (B.6)$$

に分解されるので容易に解 (4.15) が導かれる。いま、 $[G(\tau)]$ が時刻 $t_i \leq \tau \leq t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$ で $[G(t_i)] =$ 一定値とすると、これは初期条件 $[R_r]_{t=t_i}$ のもとに

$$[R_r]_{t=t_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [e^{-\lambda_j(t_{i+1}-\tau)}] [G(t_i)] [e^{-\lambda_j(t_{i+1}-\tau)}] d\tau$$

$$\begin{aligned}
 & + [e^{-\lambda_j t_i}] [R_r]_{t=t_i} [e^{\lambda_j t_i}] \\
 = & \left[\frac{1}{\lambda_l + \lambda_m} ([G(t_i)] - [e^{-\lambda_j t_i}] \right. \\
 & \cdot [G(t_i)] [e^{-\lambda_j t_i}]_{t_m} \left. \right] \\
 & + [e^{-\lambda_j t_i}] [R_r]_{t=t_i} [e^{-\lambda_j t_i}] \dots\dots (B.7)
 \end{aligned}$$

以上のように各離散時刻ごとに $[R_r]$ を計算して、もとの座標の応答共分散マトリックス $[R_x]$ を式 (4.12) によって求める。

【付録 C】 $[\Phi]^{-1}$ の計算法

通常、複素モード・マトリックス $[\Phi]$ の要素においては、場所によって非常にオーダの異なる数値が入り、そのままの形で逆マトリックスは求まりにくい。そのためまず $[\Phi]$ を変位と速度に関する区分および共役の関係から分割マトリックスを使って表わすと

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} [\Phi]_{11} & [\Phi]_{12} \\ [\Phi]_{21} & [\Phi]_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (C.1)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} [\Phi]_{12} \\ [\Phi]_{22} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} [\Phi]_{11}^* \\ [\Phi]_{21}^* \end{Bmatrix} \\
 \{[\Phi]_{11} \mid [\Phi]_{12}\} &= \{[\Phi]_{21} \mid [\Phi]_{22}\} \begin{bmatrix} [\lambda_i] & [0] \\ [0] & [\lambda_i^*] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

そして星印* は複素数の共役を意味する。したがって式 (C.1) より

$$[\Phi]^{-1} = [\Psi] = \begin{bmatrix} [\Psi]_{11} & [\Psi]_{12} \\ [\Psi]_{21} & [\Psi]_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (C.2)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 [\Psi]_{11} &= -[\Phi]_{21}^{-1} [\Phi]_{21}^* ([\Phi]_{11}^* \\
 & \quad - [\Phi]_{11} [\Phi]_{21}^{-1} [\Phi]_{21}^*)^{-1} \\
 [\Psi]_{12} &= -[\Phi]_{11}^{-1} [\Phi]_{11}^* ([\Phi]_{21}^* \\
 & \quad - [\Phi]_{21} [\Phi]_{11}^{-1} [\Phi]_{11}^*)^{-1} \\
 [\Psi]_{21} &= ([\Phi]_{11}^* - [\Phi]_{11} [\Phi]_{21}^{-1} [\Phi]_{21}^*)^{-1} \\
 [\Psi]_{22} &= ([\Phi]_{21}^* - [\Phi]_{21} [\Phi]_{11}^{-1} [\Phi]_{11}^*)^{-1}
 \end{aligned}$$

ところで複素マトリックス $([A] + i[B])$ の逆マトリックスは、

$$\begin{aligned}
 ([A] + i[B])^{-1} &= ([A][B]^{-1}[A] + [B])^{-1} \\
 & \quad \cdot ([A][B]^{-1} - i[1]) \dots (C.3)
 \end{aligned}$$

ただし i は虚数単位である。以上によって $[\Phi]^{-1}$ を効果的に計算することができる。

参 考 文 献

- 1) Amin M. and Ang A.H.S. : Nonstationary Stochastic Model of Earthquake Motions, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, No. EM 2, April, 1968, pp. 559-583.
- 2) Caughey T.K. : Random Excitation of a System with Bilinear Hysteresis, Journal of Applied Mecha-

- 3) Hurty W.C. and Rubinstein M.F. : Dynamics of Structures, Prentice-Hall, Englewood Cliff, New Jersey, 1964, pp. 313-337.
- 4) Iwan W.D. and Lutes L.D. : Response of the Bilinear Hysteretic System to Stationary Random Excitation, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 43, No. 3, 1968, pp. 545-552.
- 5) Iwan W.D. and Yang I.M. : Application of Statistical Linearization Techniques to Nonlinear Multidegree-of-Freedom Systems, Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers, Vol. 39, 1972, pp. 545-550.
- 6) Kaul M. and Penzien J. : Stochastic Inelastic Response of Offshore Towers to Strong Motion Earthquake, Earthquake Engineering Research Center Report, University of California, Berkeley, No. 72-4, Aug., 1972.
- 7) Krylov N. and Bogoliubov N. : Introduction to Nonlinear Mechanics; Approximate Asymptotic Methods, Princeton University Press, 1943.
- 8) Lin Y.K. : Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1970, pp. 110-142.
- 9) Luiz P. and Penzien J. : Stochastic Seismic Response of Structures, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, No. EM 2, April, 1971, pp. 441-456. の参考文献参照.
- 10) Lutes L.D. : Approximate Technique for Treating Random Vibration of Hysteretic Systems, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 48, 1970, pp. 299-306.
- 11) Lutes L.D. and Shah V.S. : Transient Random Response of Bilinear Oscillators, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, No. EM 4, Aug., 1973, pp. 715-734.
- 12) Lutes L.D. and Takemiya H. : "Random Vibration of a Yielding Oscillator, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 100, No. EM 2, April 1, 1974, pp. 343-359.
- 13) Strong Earthquake Response Analysis Committee, SERAC Report, No. 5, Part V, 1964.
- 14) Tajimi H. : A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure During an Earthquake, Proceedings of The Second World Conference on Earthquake Engineering, Vol. 2, July, 1960, pp. 781-796.
- 15) 竹宮：不規則外力を受ける双一次履歴系の等価線形化について、土木学会論文報告集、第 219 号、1973 年 11 月、pp. 1-13.
- 16) Tanabashi R. : "Nonlinear Transient Vibration of Structures, Proceedings of The Second World Conference on Earthquake Engineering, Vol. 2, July, 1960, pp. 1223-1238.
- 17) Veletsos A.S. and Newmark N.M. : Effect of Inelastic Behavior on the Response of Simple Systems to Earthquake Motions, Proceedings of The Second World Conference on Earthquake Engineering, Vol. 2, July, 1960, pp. 895-912.
- 18) Yamada Y. and Takemiya H. : "Statistical Estimation of the Maximum Response of Structures Subjected to Earthquake Motions, Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, No. 182, Oct., 1970, pp. 115-132.