

## 地震動の非定常スペクトル密度とその模式化

TIME VARYING POWER SPECTRAL DENSITIES OF EARTHQUAKE  
MOTIONS AND THEIR MATHEMATICAL REPRESENTATION後 藤 尚 男\*・北 浦 勝\*\*  
By Hisao GOTO and Masaru KITaura

## 1. ま え が き

構造物の耐震設計を確立していくためには、設計地点に耐用期間中に来襲するであろう地震動のモデル化、基礎-地盤系をも含めた構造物の動特性およびそのモデル化、予想される地震動に対するモデル化された系の応答、破壊に対する照査の4段階のそれぞれを実験的・理論的に追求していかねばならない。本研究は第1段階の地震動のモデル化を、特に地震動のパワースペクトル密度関数\*\*\*の非定常性に注目して考察したものである。

最近、従来の震度法をそのままの形で適用することが困難な柔構造物などの耐震設計においては、適当なモデルで表示された構造物に実地震動を入力として作用させ応答計算によりその安全性を照査する場が多くなりつつある。このときすでに得られているある特定の地震動記録のみでなく、構造物の立地場所に将来来襲すると予想される地震動が入力として使用されることが望ましい。ところで将来の地震動を予想することは一般に困難な場合が多いので、過去に得られた地震記録を整理・解析することにより実地震の持つ諸性質、たとえば地震動の振幅特性や振動数特性、地盤の動特性との関係などを把握し、これらの諸性質を反映した確率過程を人工的に発生させるという試みがなされている<sup>1)2)</sup>。地震のメカニズムが次第に明らかにされつつあり、強震記録が集積されつつあるとはいえ、いまだ代表的な地盤・地質の地震記録すら十分には得られていない現状を考えれば、このような人工地震波を予想地震波として、また地震動のランダム性を評価するための同一の確率統計的性質を有する地震波群として用いることは十分意味のあることとして肯定されよう。

人工地震波に関するこれまでの研究は多くの場合、地

震動を定常確率過程として取り扱うか、あるいはその振幅特性の時間的変化にのみ考慮が払われるが、地震動の振動数特性を表現するスペクトル密度は時間が経過してもあまり変動しないものとして考察が進められてきている。これは耐震設計において対象となる地震波形は地震記録のうちの比較的加速度振幅の大きな部分であり、この部分のスペクトル密度が記録全体のそれに占める割合がかなり大きいと考えられたからであろう。また非定常性に関する数学的表現の複雑さとならんで、実地震の本質が完全につかめていなかったということも、振動数特性の非定常性が無視されてきた理由の一つといえよう。

ところで地震動は振動数成分の異なる数種類の波動が反射・屈折などを繰り返して伝ばしていく現象であるから、厳密には強震部分においてもスペクトル密度は時間とともに変化していると考えられる。最近ではこのような観点から地震動を見直す研究がいくつか報告されつつある。山原は実地震動のスペクトル密度と振幅特性の時間的な変化を局所スペクトルの概念を用いてある時間区間ごとに求め、パワーはもとよりスペクトル密度も地震の初期、中期、末期においていちじるしく変化することを指摘している<sup>3)4)</sup>。Trifunac は地震記録を種々の固有振動数を持つ線形1自由度系に入力として与え、固有振動数の違いによる応答の時間的変化の推移より、地震動の非定常スペクトル特性を地震の震源のメカニズム (source mechanism) や表面波などの伝ばとの関連において検討を加えている<sup>5)6)</sup>。

ところで過渡振動や非定常不規則過程に関するスペクトル解析の理論も発達しつつあり、Page の Instantaneous Power Spectrum<sup>7)</sup>、Priestley の Evolutionary Spectrum<sup>8)</sup>、時間平均ではなく集合平均の概念を用いて定義する Generalized Spectral Density<sup>9)</sup>、局所スペクトル密度など物理的数学的に論理のとおり定義がなさ

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学教室

\*\* 正会員 工博 京都大学助手 工学部交通土木工学教室

\*\*\* パワースペクトル密度関数のことを以後本論文では単にスペクトル密度と呼称する。

れている。しかし結果を直観的に理解しうる形で、かつ物理的解釈が定常確率過程の自然的な拡張となっていること、使用が容易であること、などの条件を満たす非定常確率過程のスペクトル密度に関する統一的な定義はまだ与えられておらず、個々の研究者が種々の定義を用いているという状況にある。

以上見たように地震動の非定常スペクトル密度に関しては、数学的な基礎理論の未完成のゆえもあって、その分類とか非定常スペクトル密度が構造物の応答に及ぼす影響、特に入力レベルや入力の卓越振動数によって変化する応答レベルに依存して、固有振動数の変化する非線形系の応答への影響に関する研究はまだまだほとんど行われていない。このような観点から本研究ではまず地震動のスペクトル密度の時間的変化を一次元局所スペクトル密度の概念を用いて求め、変化の様子について検討するとともにその分類を試みた。つづいてスペクトル密度が時間とともに変化する地震動を確率過程で模式表示し、このような確率過程は地震動のスペクトル密度の時間的変化が構造物の応答に及ぼす影響を確率統計的に検討していくための入力地震波となりうることを示した。なおこのような確率過程を線形および非線形1自由度系に作用させ、理論解析やシミュレーションによって得られる応答について検討を加えるとともに、実験によって理論解析などの妥当性を確認しているのので、これらの結果を本論文に引き続いて報告する予定である。

## 2. 地震記録の解析方針

震源に比較的近い地点で観測される地震（近地震）においては、地震動を振動数成分や速さの異なる数種の波動に分離することは容易でない。他方遠地震の記録には実体波と表面波の違いがかなりはっきりと現われており、振動数成分が明らかに異なっているという時刻を指摘しやすい場合がある。このように振動数成分の時間的変化の様子は記録により必ずしも一様でないが、本文では解析の都合上地震動の確率統計的性質は時間に関して比較的ゆるやかに変化するものとした。すなわちこのことはある短い時間間隔内では地震動の確率統計的性質はあまり変わらず、したがってその間では近似的に定常であると仮定することを意味している。

非定常スペクトル密度に関しては1.でも述べたように種々の定義がなされつつあるが、本論文では最も基本的でしかも直観的に理解でき、従来の定常解析の概念を包含する局所スペクトル密度によって地震動の非定常スペクトルを求めた。すなわちスペクトル密度の時間的変化を求めるため、地震の加速度記録  $\ddot{z}(t)$  からある時刻  $t$  を中心に前後各  $\tau/2$  秒間の部分記録を取り出し、各部

分記録は定常であるものとして時刻  $t$  のスペクトル密度  $S(f, t)$  を次式より求めた。

$$S(f, t) = \frac{2}{\tau} \left[ \left\{ \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \ddot{z}(t) \cos(2\pi ft) dt \right\}^2 + \left\{ \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \ddot{z}(t) \sin(2\pi ft) dt \right\}^2 \right] \dots\dots\dots (1)$$

ここに  $f$  は振動数を表わす。上式において  $\tau$  を無限大とした極値が従来の定常過程におけるスペクトル密度の定義である。 $S(f, t)$  を求める時刻  $t$  は地震記録のはじめより1秒ごとの間隔とした。また  $S(f, t)$  の計算時間すなわち部分記録の継続時間  $\tau$  は、地震記録に含まれる周期約5秒以下（振動数約0.2 Hz以上）の成分を対象とするため5秒とした。

なお本方法には次に記すような問題点がある。すなわち本方法は元の地震記録に長方形のデータウインドウを乗じ、 $\tau$ なる時間区間で平均化操作を施していることになるので、 $\tau$ が短いほど時刻  $t$  における地震動の特性を表わしうるが、低振動数成分波にはいる誤差が大きくなる。一方  $\tau$  を長くするとその区間内での定常という仮定が成立しにくくなり、近似的に定常解析を行いうとする根拠を失うことになる。また他の1つは元の地震記録を  $\tau$  という有限時間で打ち切ることによりスペクトル密度に変形が現れるという現象である。すなわち振動数領域における重なり効果とよばれるものであり、振動数領域において原信号に含まれていない振動数成分である側帯波を生ずるとともに、分解能が低下する。この点を改善するためには  $\tau$  を長くするというのも1つの方法である。これら2つの問題点を検討するために3.においてまず  $\tau$  が  $S(f, t)$  に及ぼす影響を調べ、本研究で対象とした地震記録は新潟地震の記録を除けば  $\tau=5$  秒とすればほぼ満足しうる精度で  $S(f, t)$  の時間的変化が明らかになることを確認した。

## 3. 地震動のスペクトル密度の時間的変化

地震動のスペクトル密度の時間的変化を調べるために用いた地震記録は Table 1 および Fig. 1 に示すとおりである。これらのうち El Centro 1940, Olympia 1949, Taft 1952 と称される地震記録は強震記録としては比較的古いものであり、従来より代表的な強震記録として耐震工学においてしばしば引用されているものである。また、日本の地震はいずれも最近の10年間に得られたもので、1968年十勝沖地震はその規模が大であり、松代群発とえびのの両地震は震源にきわめて近く、新潟は砂

Table 1 解析の対象とした地震の記録

地震記録	成分	**記号	マグニチュード	震央距離 (km)	震源深さ (km)	水平の最大加速度 (gal)	記録の継続時間 (sec)	地盤条件	地盤計の種類と振動特性***	出典
新潟市 1964.6.16	N-S	a	7.5	60	40	119	44	深さ10mまではN<10, 10m~20m, N=15, 砂またはシルト	SMA C A $T_0=0.1\text{sec}, h=1$	土木研究所報告第125号
	N-S	b		284		64	10	宮古と青森の中間位で、5m以下で20<N<50, 砂礫		
	N-S	c	7.8	180	20	88	10	下層地盤N>50, 密な砂または砂礫		
	N-S	d		252		199	10	N<5 非常にゆるい砂	SMA C B 2 $T_0=0.14\text{sec}, h=1$	港湾技術資料 No.80
松代群衆 1966.4.5	N-S	e	5.4	11	10以下	231	18	15m程度までは砂礫をわずかに含むシルト, N<20		
	NW-SE	f		8		207	10	大粒の砂礫 20<N<35		土木研究所資料第254号
えびの	E-W	g		数km	0	42	6.15			
	N-S	h				30	6.15	5m程度以下でN>20, シラス	電磁式加速度強震計 $T_0=0.5\text{sec}, h=1$	***
E15 1968.3.11	N-S	i		数km	0	41	7.5			
	E-W	j	7.0	14	4	210	29	シルト, 粘土を含むローム層, 沖積層, N>50	RFT-250 $T_0=0.1\text{sec}, h=0.528$	Strong Motion Earthquake Accelerograms Vol. II, Part A, Earthquake Eng. Res. Lab., California Inst. of Tech., Sept., 1971
Taft 1952.7.21	SE89°	k	7.7	45		176	10	N>50	AR-240 $T_0=0.082\text{sec}, h=0.552$	
	NE21°	l				153	16	15mまでシルト, 砂, 砂礫	AR-240 $T_0=0.081\text{sec}, h=0.574$	
Olympia 1949.4.13	SW266°	m	7.1	16		269	19		$T_0=0.08\text{sec}, h=0.574$	United States Earthquakes 1949, Serial No.748, USCGS
	SE176°	n				195	19		$T_0=0.077\text{sec}, h=0.574$	

\* 記録のうち、振動特性が比較的定常と思われる一部分を計算に用いた。水平最大加速度はこの定常部分の最大値を表わす。

\*\* 記号は Fig.1.3と共通である。

\*\*\*  $T_0$ は地盤計の固有周期,  $h$ は減衰定数を表わす。著者らが現地観測したもの。

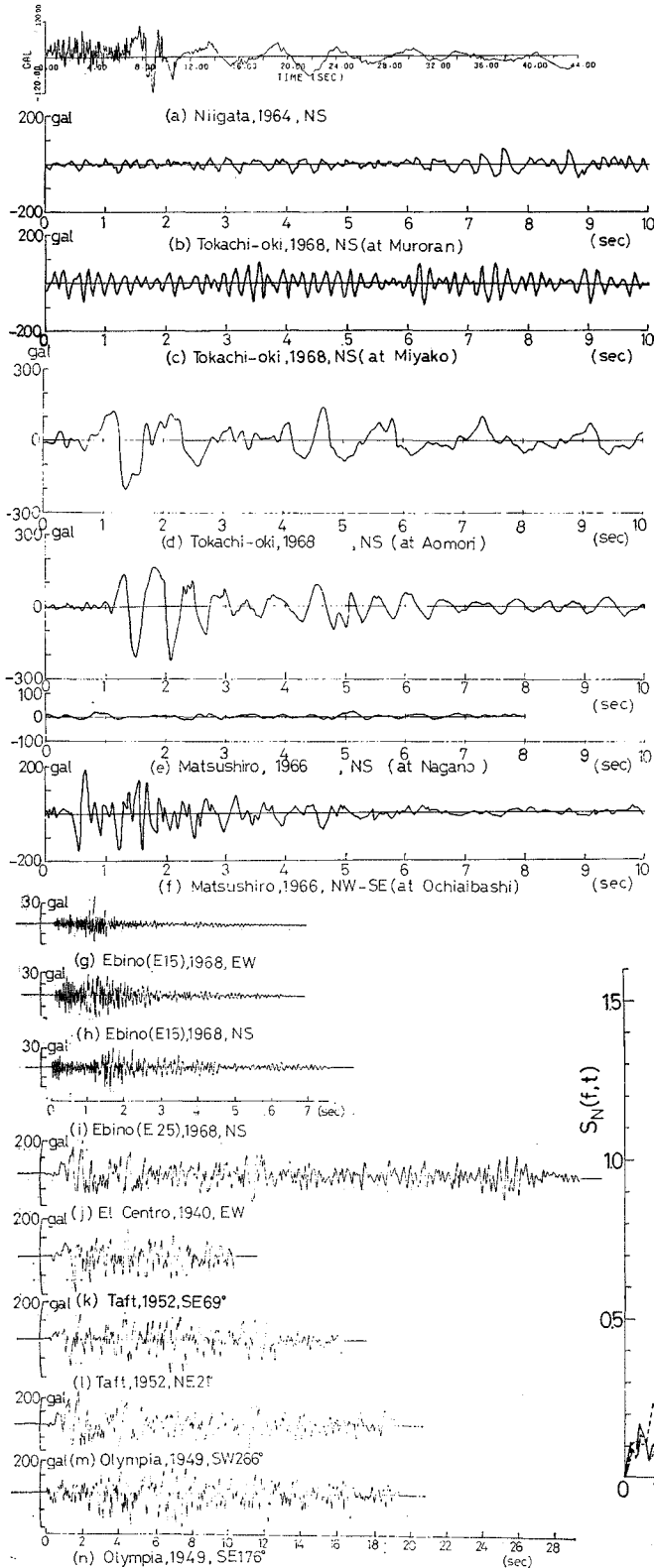


Fig. 1 解析の対象とした地震の加速度記録

質土の液状化の影響が現われているという点にそれぞれの記録の特徴がある。

### (1) 長方形ウィンドウの時間区間 $\tau$ が $S(f, t)$ に及ぼす影響

原加速度記録から取り出す部分記録の長さ、すなわち長方形ウィンドウの時間区間  $\tau$  が解析結果に及ぼす影響について検討する。新潟の記録の場合は Fig. 1 (a) に見られるように記録の後半部分には明らかに 5 秒程度の周期成分が卓越しており、当然のことながら  $\tau < 5$  秒なるウィンドウではこの周期成分(振動数成分)を正しく評価することは不可能である。また地震動の確率統計的性質が記録の途中で急変しているため、部分記録が定常であるという仮定が成立しない場合がある。そこでこの記録に限ってかなり明瞭に振動数特性の異なっているとみなしうる時刻(約 8 秒)の前後でスペクトルを別々に計算することにした。

新潟以外で日本とアメリカの記録をそれぞれ 1 個ずつ選び、 $\tau$  の違いが  $S(f, t)$  の形状に及ぼす影響を図示したものが Fig. 2 である。図中たとえば  $t=3.5$  とあれば時間記録のうちの 3.5 秒を中心と

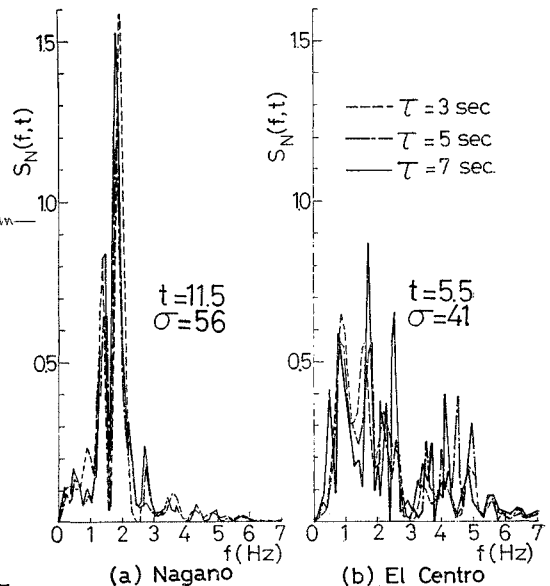


Fig. 2  $\tau$  の違いがスペクトル密度の形状に及ぼす影響

した  $\tau$  秒間の  $S(f, t)$  であり、 $t=all$  は記録の全継続時間にわたって計算した結果を表わす。また  $\sigma$  は各部分記録の標準偏差値 (単位は gal) を示す。なお各部分記録のスペクトル曲線と振動数軸とで囲まれる面積が 1 となるように規準化したスペクトル密度を規準スペクトル密度と称し、 $S_N(f, t)$  と表わすことにする。 $S_N(f, t)$  は各部分記録の振幅の大きさにかかわらず図の全面積が 1 であるので、ある振動数成分の全成分に占める割合が容易に読みとれるという利点がある。したがって図においてはスペクトル密度として  $S_N(f, t)$  を示してある。

長野の記録は  $\tau$  を変化させてもほぼ同形のスペクトルを有しており、 $\tau$  が 5 秒より小でもかなりよい情報が得られる。この記録のように  $S_N(f, t)$  がほぼ定常とみなして卓越振動数が比較的高い (本記録は約 2 Hz) 場合には、当然のことながら従来の解析のように記録の全継続時間にわたって定常であるとする  $S_N(f, t)$  を求めれば十分であり、しかも  $\tau$  を小さくした  $S_N(f, t)$  と一致する傾向にあることが確認されたことになる。これらのことは新潟の持つ特徴とは対照的である。

El Centro の  $S_N(f, t)$  は  $\tau$  により若干変化が見られ、 $\tau$  が小さいほど側帯による平滑化の影響であると考えられるが、スペクトルの山や谷の出入りが比較的ゆるやかであり、 $\tau$  の増大とともによりこまやかな変化が認められる。 $\tau=5$  秒以上ではその形に本質的な差は認められず、 $\tau$  の増大すなわちより広範囲の時間記録を含むことによる差のみが形の違いとなって現われているとみなしてよいようである。このことから El Centro に対しては  $\tau$  を 5 秒ととるのが適当であると考えられる。

以上 3 種の記録に対する  $\tau$  に関する考察から、加速度記録から肉眼で読みとれる卓越周期が数秒以上という特殊な記録を除けば  $\tau=5$  秒のウィンドウを採用すれば地震動のスペクトル密度の非正常性をかなりの確にとらえうるといえる。

## (2) 地震動スペクトル密度の時間的变化 (Fig. 3 参照)

### Fig. 3 (a) 新潟地震の $S_N(f, t)$

全継続時間にわたって定常であると仮定した場合の  $S_N(f, t)$  は 0.3 Hz 近傍に大きなピークを持ち、2 Hz 付近に第 2 のピークがあるが、高振動数成分も比較的混入しており、この図 (Fig. 3 (a)) を見る限りではややランダムな波形であると解される。一方加速度の時間記録を見ると 8 秒前後で明らかに振動数特性が異なっているので、本記録に限り 8 秒の前と後で別々に  $S_N(f, t)$  を求めた。 $t=4$  秒における  $S_N(f, t)$  は 0.3 Hz 付近にピークが見られるが、 $t=all$  におけるときの 0.3 Hz 近傍の値よりは小さく、かなりランダムな波形とみなしう

る。 $t=26$  秒では 0.3 Hz 近傍の成分が非常に鋭いピークを持っているが、これらのことは加速度図において約 8 秒まではランダムな波形を示しているが、8 秒以後では比較的周期の長い (振動数の低い) 正弦波が卓越していることと対応している。またこのことは従来から用いられている  $t=all$  のスペクトル図では当然のことながらスペクトルの構成が時間的に変化していることを表現できないのに反して、非正常なスペクトル解析によればより正確に実地震波の持つ特性をとらえることができることを表わしている。

なお  $S_N(f, t)$  の形状が急変する時刻 (約 8 秒) は、この地震で注目を浴びるようになった砂の液状化現象が記録の観測地点で始まった時刻を表わしているのではないかと考えられる。したがって新潟の場合には卓越振動数が時間とともに移動したとするよりは、ある時刻を境にして異なる振動数成分の波が発生したと考えるべきであろう。

### Fig. 3 (b), (c), (d) 1968 年十勝沖地震の $S_N(f, t)$

この地震に関しては室蘭、宮古および青森市における記録を用いた。室蘭の  $t=all$  の  $S_N(f, t)$  は 2.7 Hz で最大のピークを持っている。また非正常解析により求めた  $S_N(f, t)$  は  $t=all$  と同一の振動数のところでピークを有しているが、値そのものは時間とともに若干変動している。宮古と青森における  $t=all$  の  $S_N(f, t)$  はそれぞれ 5.3 Hz と 1.1 Hz において最大の値をとるが、非正常解析によれば記録の初期の部分において優勢である 5.3 Hz と 1.1 Hz のピークは時間の経過とともに低振動数のほうへ移行し、かつ青森においてはピーク付近の有するパワーの全体に占める割合が大きくなっていることが読みとれる。このことは加速度記録において青森が時間の経過とともにやや周期化された波形を描いていることと対応していよう。またこのことは振幅特性が定常であるとみなしても (Table 1 の注参照) 振動数特性は定常とは限らないことを示している。宮古の  $S_N(f, t)$  の図形は時間とともにほぼ同一の形を保ったまま低振動数へと移行している。これら 3 個の実地震記録のスペクトル図は、たとえ同一地震であっても記録された地点が異なれば、その波形はもとよりスペクトル特性の時間的な変化のパターンも異なることを示している。

### Fig. 3 (e), (f) 松代群発地震の $S_N(f, t)$

長野は  $t=all$  において 1.9 Hz 付近で最大のパワーを持っている。非正常解析においても 1.2 Hz から 1.9 Hz の間に顕著なピークをいくつか有し、他の振動数成分に比べて非常に大きく、加速度記録が時間にかかわらずかなり正弦波に近い波形であることを示している。すなわちこの  $S_N(f, t)$  の形は時間とともに全体の大きさがゆっくりと変動しているが、ピークとなる振動数の変遷は

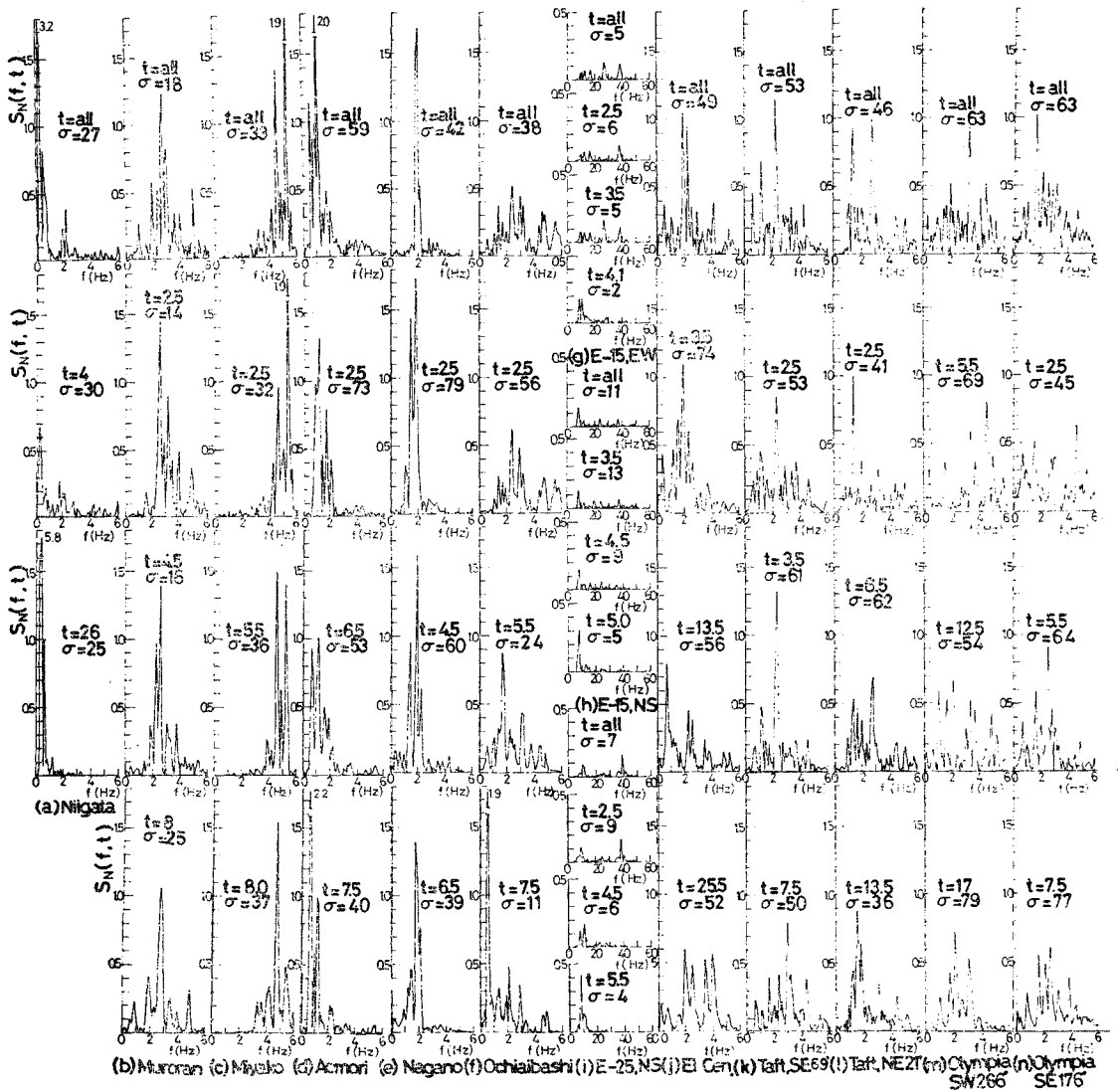


Fig. 3 実地震のスペクトル密度の時間的変化

ほとんど見られない。したがって長野の場合は記録の全継続時間にわたって定常と仮定してスペクトルを求めれば、十分その振動数特性を反映した結果が得られることもわかる。一方落合橋の  $t=all$  は 2.4 Hz にピークを持つが、かなり広い振動数範囲でパワーを持っている。ところが非定常としての解析では  $t=2.5$  秒において 2.4 Hz であるピークが時間とともに低振動数の方へ移動し、かつピークとなる振動数の持つパワーの全成分に占める割合が大きくなっている。

この場合も同一地震でも測定地点が異なればスペクトル特性の時間的変化のパターンが異なる例である。

#### Fig. 3 (g), (h), (i) えびの群発地震の $S_N(f, t)$

えびのの 3 記録とも  $t=all$  の  $S_N(f, t)$  と非定常解析

によるそれとは比較的良好に似ており、いずれも高振動数成分が多い。またこれら 3 記録間でも大差なく、互いに相似た傾向を示している。えびの地震のような局地震で震源にきわめて近い地点の記録は、種々の振動数成分が十分に分離していない状態の地震波動を表わすことになるので、振動数特性の時間的変化が少なくまた地震の違いによる  $S_N(f, t)$  の差もほとんどないのであろうと考えられる。

#### Fig. 3 (j) El Centro の地震記録の $S_N(f, t)$

$t=all$  の  $S_N(f, t)$  には 2 Hz の前後のピークを中心に約 1 Hz から 4 Hz までの成分が比較的均等に含まれており、かなりランダムな波形であることを示している。一方非定常解析によると  $t=2.5$  秒において 1.9 Hz

付近にあったピークが  $t=13.5$  秒で約  $0.7\text{ Hz}$  のピークにとって替われ、さらに  $t=25.5$  秒では約  $2\sim 4\text{ Hz}$  の間に数個のピークを有するようになっていく。すなわちこの地震の  $S_N(f, t)$  は時間とともにかなり変化しているが、卓越振動数が高い（または低い）振動数領域へ単調に上昇（または減少）していくという傾向は見られない。ただし包括的に見れば  $S_N(f, t)$  は全体として徐々に高振動数領域へと移動している。これらのことは一般に地震記録が持つと考えられている特性（時間の経過とともに横波や表面波などのより低い振動数成分を有する波動が到達し、したがってそのような成分が優勢となる）を必ずしも十分に反映しておらず、震源が時間とともに移動していることや波動が地盤内で複雑に反射屈折を繰り返しつつ伝ばしていることがうかがえる。

Fig. 3 (k), (l) Taft の地震記録の  $S_N(f, t)$

Taft NE  $21^\circ$  の  $S_N(f, t)$  はそのピークとなる振動数やピーク付近のパワーの占める比率が時間とともに若干変動している。パワーの占める比率の変化は加速度記録に比較的正弦波に近い波形が卓越する部分とやや不規則性の強い波形の部分とがあることと対応していよう。Taft SE  $69^\circ$  の  $S_N(f, t)$  についてもほぼ同様のことを指摘しうるが、この場合には時間とともに高い振動数成分がやや優勢となり、その成分のパワーの全体に占める割合が低下する傾向が見られる。このことは Fig. 3(k) をまとめ直した Fig. 4 から明らかである。同図は



Fig. 4 スペクトル密度の時間的変化（ある特定の振動数  $f$  成分の時間的変化, Taft SE  $69^\circ$ ）

Taft SE  $69^\circ$  の  $t=all$  における顕著なピークのみを取り出し、その振動数成分の時間的な変化を图示したものである。縦軸は  $S_N(f, t)$  を表わしているの、横軸の時間  $t$  に対する縦軸の値はその時刻におけるある振動数成分の持つパワーの全パワーに対する比率を示している。したがってこの図からも  $t=2.5$  秒においては  $1.2\text{ Hz}$  や  $2.3\text{ Hz}$  の振動数成分が多いこと、時間の経過とともにより高いすなわち  $3.0\text{ Hz}$  の振動数成分が優勢となること、時間とともに顕著なピーク成分の値がほとんど低下しており、よりランダムな波形に近づいていくことが明らかである。

Fig. 3 (m), (n) Olympia の地震記録の  $S_N(f, t)$

SE  $176^\circ$  の  $t=all$  における  $S_N(f, t)$  は約  $1.6\text{ Hz}$

付近にピークを持つが、比較的広帯域の振動数成分を含んでおり、全体としてはかなりランダムな波形であるといえる。ところが非定常解析によると時間の経過とともに比較的平坦なスペクトルが  $2.5\text{ Hz}$  付近にピークを持つ形を経て再び平坦なスペクトルへと、すなわちランダムな波形から正弦波に近い波形を経て再びランダムな波形へと近づいている。SW  $266^\circ$  の  $S_N(f, t)$  も時間の経過とともにランダム波から、正弦波形へと変化しているが、SE  $176^\circ$ , SW  $266^\circ$  のいずれも卓越振動数の移動は単調な変化ではなく、このことは種々の振動数成分を持つ波動の到達や震源の時間的な移動などを意味しているのではないかと考えられる。

#### 4. スペクトル密度が時間的に変化する地震動の模式表示

これまでの地震記録の解析において、耐震設計において対象とされる加速度振幅の大きな部分にのみ注目しても、スペクトル密度は時間的に変化する場合の多いことが明らかにされた。本項では、地震動のスペクトル密度の非定常性が構造物の応答に及ぼす影響を検討するために用いる入力を、先に解析した実地震記録の結果を基にして人工的に発生させることを試みる。

##### (1) 地震動の模式表示

先に得られた実地震動の非定常性のパターンを大別すると以下ようになる。a) 時間の経過とともに高い振動数が卓越する（たとえば Taft SE  $69^\circ$ ）。b) 逆に低い成分が優勢となる（十勝沖の青森）。c) 高い成分が卓越したり低い成分が卓越したりする（El Centro）。d) 卓越振動数はほとんど変わらない（十勝沖の室蘭）。また各時刻の地震動の分散値で除して規準化したスペクトル密度  $S_N(f, t)$  の形状自体の時間的変化は大きく分けると Fig. 5 (a) に示すように卓越振動数が低くなるにつれてランダム波形から正弦波形に近づく場合（type I, たとえば松代の落合橋）と同図 (b) のように時間にかかわらずほぼ合同な形で、ただその振動数領域のみが変わる（type II, 十勝沖の宮古）という両者がある。

スペクトル密度が以上のように時間とともに変化する

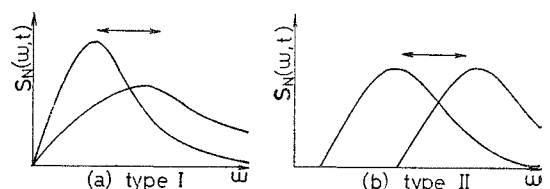


Fig. 5 実地震のスペクトル密度の形状

場合の加速度を表わす時間関数としては種々の表現法が考えられるが、ここでは後藤らの人工地震の表示法<sup>1)</sup>を拡張(式(3))のように $\alpha(t), \beta(t)$ を追加し次式のよ  
うな確率過程を用いることにした。

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = \psi(t) \cdot g(\omega, \phi, t) \dots\dots\dots(2) \\ g(\omega, \phi, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \cos [\{\alpha(t)\omega_n \\ + \beta(t)\}t + \phi_n] \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

ここに、 $\ddot{z}(t)$ は地震動加速度を表わす確率過程、 $\psi(t)$ は時間 $t$ に関する確定関数で、 $\ddot{z}(t)$ の振幅特性を規定するいわゆる shape function、 $g(\omega, \phi, t)$ は振動数成分が時間とともに変化する確率過程であり、振幅特性は定常である、 $\alpha$ は加速度の単位を持つ定数、 $N$ は正の整数、 $\omega_n$ は確率密度 $p(\omega)$ を持つ確率変数 $\omega$ の実現値、 $\phi_n$ は0と $2\pi$ の範囲で一様分布するランダム位相角、 $\alpha(t), \beta(t)$ はスペクトル密度の時間的変化を表わす関数であり、 $\alpha(t)$ は主として type I の、 $\beta(t)$ は主として type II の変化を表わす。なお $t=0$ における $\alpha(t)$ と $\beta(t)$ の値はそれぞれ $\alpha(0)=1, \beta(0)=0$ ととる。しか  
らばこのとき $g(\omega, \phi, t)$ の振動数を表わす項は $\omega_n$ のみとなる。したがって本表示法では $t=0$ における $\omega_n$ の分布形 $p(\omega)$ が与えられれば、時刻 $t$ における $\alpha(t)\omega_n + \beta(t)$ の分布は一義的に定まることになる。

上式において地震加速度 $\ddot{z}(t)$ は振幅の大きさを規定する時間 $t$ に関する確定関数 $\psi(t)$ と振動数成分が時間とともに変化する確率過程 $g(\omega, \phi, t)$ の積で表わされる。また、 $g(\omega, \phi, t)$ は振動数の項、すなわち $t$ の係数が式(3)の $\{\}$ 内のように時間的に変化するように拡張された余弦関数を、時間軸上でランダムにずらして加え合わせたものとして表現されている。なお本論文においては、ある振動数成分の持つ絶対値そのものよりも、その全振動数成分の持つパワーに占める割合を重視し、この比 $S_N(f, t)$ の値の大小でもってスペクトル密度の時間的変化を評価してきた。したがって地震動の模式化に当たっても、全パワーの時間的変化とスペクトル密度のそれとを分離して考えるために地震動として式(2)のよ  
うな表示法をとった。

(2)  $g(\omega, \phi, t)$ のスペクトル密度と $p(\omega)$ の関係

式(3)において $\alpha(t) \equiv 1, \beta(t) \equiv 0$ であれば $g(\omega, \phi, t)$ は定常確率過程となり、この場合には $g(\omega, \phi, t)$ のスペクトル密度 $S_g(\omega)$ と確率変数 $\omega$ の確率密度関数 $p(\omega)$ とは相似形すなわち次式の関係の成立することがすでに明らかにされている<sup>1)</sup>。

$$S_g(\omega) = \pi \alpha^2 p(\omega) / 2 \dots\dots\dots(4)$$

この式は任意の形状のスペクトル密度 $S_g(\omega)$ を持つ地

震波を人工的に発生させるためには、 $S_g(\omega)$ と相似な確率密度 $p(\omega)$ を持つ確率変数 $\omega$ を振動数として採用すれば、式(3)により求められることを示している。

次に一般に $\alpha(t), \beta(t)$ が $t$ の関数として与えられる場合の $g(\omega, \phi, t)$ (以下、 $g$ と略記する)のスペクトル密度 $S_g(\omega, t)$ と $p(\omega)$ の関係について考える。2.において地震動の非定常スペクトル密度を定義したが、この定義を今の場合に適用すると、 $S_g(\omega, t)$ は次のようにして求められる。すなわち式(3)で与えられる $g$ の時刻 $t_1$ におけるスペクトル密度 $S_g(\omega, t_1)$ は、 $g$ を $t \equiv t_1$ なる $t(-\infty < t < \infty)$ においても $t=t_1$ の状態で変動し続けているという完全な定常確率過程と仮定することにより、つまり $g$ を、

$$g(\omega, \phi, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \cos [\{\alpha(t_1)\omega_n + \beta(t_1)\}t + \phi_n] \dots\dots\dots(5)$$

と表わすことにより、通例の定常確率過程のスペクトル密度の定義を用いて求めることができる。このように非定常スペクトル密度を定義すると、定常確率過程の場合の等式(4)を求めるのとほぼ同じ方法により次式  
の関係を得る。

$$S_g(\omega, t) = \pi \alpha^2 q(\omega, t) / 2 \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 $q(\omega, t)$ は時刻 $t$ における確率変数 $\alpha(t)\omega + \beta(t)$ の確率密度。なお $t=0$ における $\omega_n$ は $t=t$ においては $\Omega_n(t) = \alpha(t)\omega_n + \beta(t)$ となるので、確率密度に関する変数変換の関係式を用いることにより $q(\omega, t)$ すなわち $q\{\Omega(t)\}$ と $\omega$ の確率密度 $p(\omega)$ との関係は次式で与えられる。

$$q\{\Omega(t)\} = \frac{1}{\alpha(t)} \cdot p\left\{\frac{\Omega(t) - \beta(t)}{\alpha(t)}\right\} \dots\dots\dots(7)$$

また、 $S_g(\omega, t)$ を $S_g\{\Omega(t)\}$ と書き直すことにより式(6)は、

$$S_g\{\Omega(t)\} = \frac{\pi \alpha^2 q\{\Omega(t)\}}{2} = \frac{\pi \alpha^2}{2 \alpha(t)} \cdot p\left\{\frac{\Omega(t) - \beta(t)}{\alpha(t)}\right\} \dots\dots\dots(8)$$

となる。式(8)は式(3)で与えられる非定常確率過程 $g(\omega, \phi, t)$ のスペクトル密度 $S_g\{\Omega(t)\}$ と振動数の確率密度 $q\{\Omega(t)\}$ とは時間をパラメータとする集合平均としてとらえると相似形となることを意味している。また $S_g\{\Omega(t)\}$ と $\omega$ の確率密度関数 $p(\omega)$ との関係は式(8)<sub>2</sub>で与えられる。

(3)  $\ddot{z}(t)$ の共分散 $K_{\ddot{z}\ddot{z}}(\tau_1, \tau_2)$

地震動加速度 $\ddot{z}(t)$ の共分散 $K_{\ddot{z}\ddot{z}}(\tau_1, \tau_2)$ を、時間をパラメータとする集合平均の考えを用いて次式のように定義する。



$$K_{\ddot{z}\ddot{z}}(\tau_1, \tau_2) = E[\{\ddot{z}(\tau_1) - m_{\ddot{z}}(\tau_1)\} \{\ddot{z}(\tau_2) - m_{\ddot{z}}(\tau_2)\}] \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$m_{\ddot{z}}(\tau) = E[\ddot{z}(\tau)] \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。ところで  $\ddot{z}(t)$  を構成する式 (3) の  $g(\omega, \phi, t)$  の期待値は、 $\cos \phi_n, \sin \phi_n$  の集合平均が 0 となることを利用して若干の演算を施すことにより 0 となる。したがって  $\ddot{z}(t)$  の集合平均  $m_{\ddot{z}}(\tau)$  も、

$$m_{\ddot{z}}(\tau) = 0 \dots\dots\dots (11)$$

となる。よって式 (9) は、

$$K_{\ddot{z}\ddot{z}}(\tau_1, \tau_2) = E[\ddot{z}(\tau_1) \cdot \ddot{z}(\tau_2)] \dots\dots\dots (12)$$

となる。上式に式 (2) を代入し、 $\cos \phi_n, \sin \phi_n$  および  $\cos \phi_n \times \sin \phi_n$  の集合平均が 0 であることと、 $\cos^2 \phi_n$  や  $\sin^2 \phi_n$  の集合平均が 1/2 となることを用いると、結局

$$K_{\ddot{z}\ddot{z}}(\tau_1, \tau_2) = -\frac{a^2}{2} \psi(\tau_1) \psi(\tau_2) \cdot \int_0^\infty \cos [\{\alpha(\tau_1)\tau_1 - \alpha(\tau_2)\tau_2\} \omega + \{\beta(\tau_1)\tau_1 - \beta(\tau_2)\tau_2\}] p(\omega) d\omega \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。この式から共分散は  $\ddot{z}(t)$  の組成関数である余弦関数に含まれる位相差とは無関係に定まることが知られる。式 (12) において  $\ddot{z}(t)$  の振動数特性が時間的に変化しないとき、すなわち  $\alpha(\tau)=1, \beta(\tau)=0$  であるときは当然のことながら後藤らの解<sup>1)</sup>と一致する。 $\ddot{z}(t)$  の分散  $\sigma_{\ddot{z}}^2(t)$  は上式において  $\tau_1=\tau_2=t$  とおくことにより、

$$\sigma_{\ddot{z}}^2(t) = a^2 \psi^2(t) / 2 \dots\dots\dots (13)$$

をうる。このことは振幅の時間的変化とスペクトル密度のそれとが独立であるとする式 (2) で与えられる地震波の分散は、スペクトル密度が時間的にいかに変化しようと、強さの時間的変化を表わす確定関数のみによって与えられることを意味している。

(4)  $\ddot{z}(t)$  の振幅の確率密度関数  $p\{\ddot{z}(t)\}$

$\ddot{z}(t)$  の振幅の確率密度関数  $p\{\ddot{z}(t)\}$  は式 (2) に中心極限定理を用いることにより、平均値が 0 で分散が式 (13) で与えられる正規分布にしたがうことがわかる。すなわち  $p\{\ddot{z}(t)\}$  は、

$$p\{\ddot{z}(t)\} = \frac{1}{a \sqrt{\pi} \psi(t)} \cdot \exp\left[-\frac{\ddot{z}^2(t)}{a^2 \psi^2(t)}\right] \dots\dots\dots (14)$$

で与えられる。

(5)  $\psi(t), \alpha(t), \beta(t), p(\omega)$  の表現

以上までの検討においては  $\psi(t)$  などの確定関数を一般的な形で表現してきたが、式 (2) で表わされるような振幅特性とともに振動数特性が時間的に変化する地震動を電子計算機上で発生させるためには、 $\psi(t)$  などの具体的な関数形を設定しなければならない。

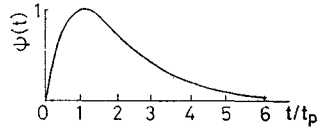


Fig. 6 人工地震波の shape function

$\psi(t)$  については多くの実地震記録にあてはまるような解析関数を見出すことは困難であるが、次に示す関数形は遠地地震の特徴を比較的よく表わしているとして、しばしば使われる形である (Fig. 6 参照)。

$$\psi(t) = \frac{t}{t_p} \cdot \exp\left(1 - \frac{t}{t_p}\right) \cdot U(t) \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $t_p$  は  $\psi(t)$  が最大となる時刻、 $U(t)$  は unit step function を表わす。本文では振幅特性の非定常性を考える場合には  $\psi(t)$  として上式を用いることにし、振動数特性の非定常性のみ注目する場合には  $\psi(t) \equiv 1$  とし、振幅特性を定常として解析した。

式 (3) 中の  $\omega_n$  の確率密度関数  $p(\omega)$  は式 (4) で表わされるように、 $g(\omega, \phi, t)$  のスペクトル密度  $S_g(\omega)$  と相似形である。したがって  $p(\omega)$  の形状は  $S_g(\omega)$  を参考にして決定すればよいことになるが、3. で見たように個々の地震のスペクトルはかなり複雑な形をしている。しかしながら地震力を構造物に伝える地盤も単純化すれば 1 つの振動系と考えられるので、 $S_g(\omega)$  したがって  $p(\omega)$  を唯一のピークを持つ滑らかな曲線で近似的に次式のように表現することにする。

$$p(\omega) = \begin{cases} 0 & : \omega < \omega_s \\ \frac{4(\omega - \omega_s)^2}{\omega_q^3} \cdot \exp\left\{-\frac{2(\omega - \omega_s)}{\omega_q}\right\} & : \omega \geq \omega_s \end{cases} \dots\dots\dots (16)$$

上式は Fig. 7 に示すように  $\omega_p (= \omega_s + \omega_q)$  なる円振動数でピークを有するが、この曲線は 3. の地震記録のスペクトル密度を包括的にとらえた形状、もしくはその包絡線とみなしうるので、以下の解析では  $p(\omega)$  を上式で与えるものとする。

スペクトル密度の時間的変化を表わす関数である  $\alpha(t)$  と  $\beta(t)$  については種々の表現法が考えられるが、3. における非定常スペクトル密度  $S_N(\omega, t)$  の時間的変化の特徴を表わす最も簡単な場合として次式を考えることに

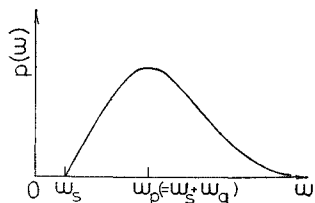


Fig. 7 人工地震発生に用いた振動数の確率密度関数

する。すなわち、

$$\alpha(t) = \exp(rt), \quad \beta(t) = \delta t$$

.....(17)

Fig. 8 に、上式によって与えられる関数によって時間とともに変化するスペクトル密度の一例を示した。図示されているグラフはいずれも時間の経過とともに低い振動数成分が卓越する場合であるが、 $r$  あるいは  $\delta$  の符号を逆にするにより、逆に高い成分が優勢となるスペクトル密度を表わすこともできる。

(5) スペクトル密度が時間的に変化する人工地震波の加速度記録

式(2)によって発生させた。スペクトル密度が時間とともに変化する人工地震波の加速度記録の一例を Fig. 9 に示した。また人工地震を発生する際に用いたパラメータを Table 2 に示す。図の横軸は

Table 2 人工地震を発生する際に用いたパラメータの値

記録名	$r$	$\delta$	スペクトル密度の時間的変化の型
E-1	-0.139	0	I a)
E-2			I b)
E-3	0	0.2	II a)
E-4		-0.2	II b)
E-5		0	—

構造物の固有円振動数で無次元化された時間を、また縦軸は構造物の降伏加速度でもって無次元化された加速度を表わす。なお shape function は時間にかかわらず一定としてある。同図より先に述べた方法によって発生させた人工地震波の振動数特性が、ほぼ期待したとおり時間とともに変化している様子がわかる。すなわち人工地震 E-1 においては時間の経過とともに高い振動数成分が卓越するようになっており、またややランダム性が増していること、E-2 においては逆に低振動数成分が増し、やや正弦波形に近づくこと、E-3 では E-1 と同じく高振動数成分が多くなるが、そのランダム性には大きな変化が見られないこと、E-4 では時間とともに低い振動数成分が優勢となっているが、E-3 の場合と同じくそのランダム性はあまり変わらないこと、E-5 は卓越振動数成分、ランダム性ともにほぼ定常とみなしうること。また E-1 から 5 のいずれの振動特性もほぼ定常であること、などである。以上のことから式(2)によって発生される人工地震波は、そのスペクトル密度の時間的変化の様子が任意に変えられること、地震波発生の際に用いる数個の乱数<sup>1)</sup>を取り換えることにより、同一の確率統計的性質を有するこのような人工地震波を数多く発生させることが可能であること、したがって、この人工地震

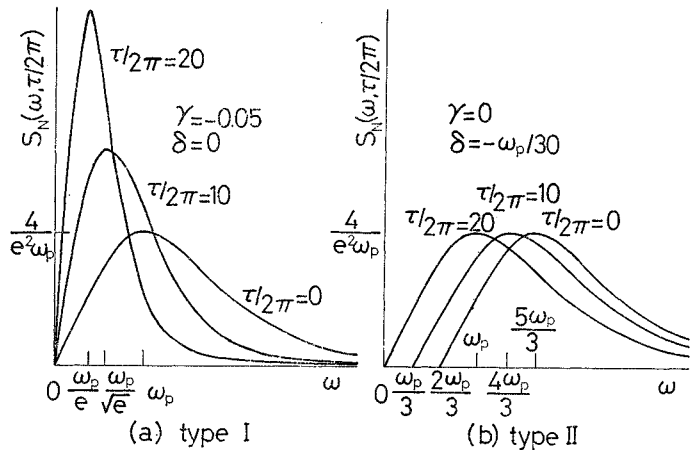


Fig. 8 時間とともに変化するスペクトル密度

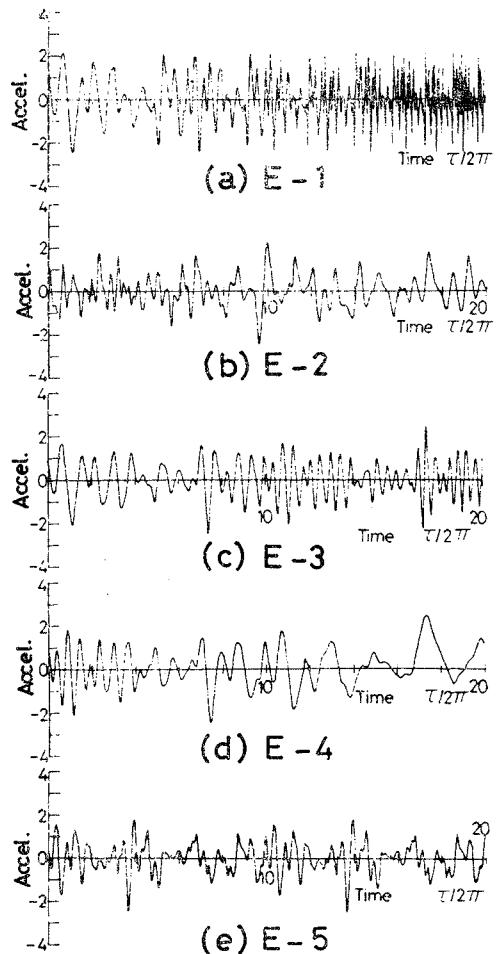


Fig. 9 スペクトル密度が時間とともに変化する人工地震波

は、地震動のスペクトル密度の時間的変化が構造物に及ぼす影響を確率統計的に検討していくための入力地震波として有用であること、が明らかとなった。

## 5. 結 論

この研究は、従来地震波形の振幅特性に主として重点が置かれていた非定常性の問題をその振動数特性にまで拡張したものであり、局所スペクトル密度の概念を用いて実地震記録の解析を行い、地震応答解析において問題となる加速度振幅の比較的大きな部分に限定しても、地震動のスペクトル密度は時間とともに変化している場合が多いことを示したものである。また解析結果をもとにスペクトル密度の時間的変化の様子を分類するとともに、そのような変化をする地震記録を人工的に発生させる一方法を提案した。その結果得られた成果を要約すると次のようである。

(1) 局所スペクトル密度の概念を用いることにより、地震動のスペクトル密度の時間的変化の様子を明らかにすることができる。ただし本方法では元の加速度記録からある継続時間を持つ部分記録を取り出し解析するが、この方法には継続時間内の地震動の確率統計的性質の定常性と、有限記録を解析することにより生ずるスペクトル密度の形状の変形という2つの問題点がある。本解析の範囲では継続時間を5秒ととることによりほぼ満足しうる程度でこの問題点を克服しうる。また本解析法では地震動の持つ確率統計的な諸性質が時間に関してゆっくりと変化するという仮定を基に出発しているため、新潟地震の記録のように加速度記録に明らかに確率統計量が激変していると思われる時刻の存在する場合には、その時刻において記録を分割したのち本方法を用いればよい結果を得ることができる。

(2) 地震記録のスペクトル密度の時間的変化の様子は各記録によってかなり異っているが、変化のパターンを包括的にとらえると、次に示す4通りに大別できる。a) 時間の経過とともに高い振動数成分が卓越する。b) 逆に低い成分が優勢となる。c) 高い成分が卓越したり、低い成分が卓越したりする。d) 卓越振動数はほとんど変わらない。

(3) 地震記録の規準化したスペクトル密度の形状の時間的変化を包括的にとらえると、卓越振動数が低くなるにつれてランダム波形から正弦波形に近づく場合と、時間にかかわらずほぼ合同な形で、ただその振動数領域のみが変わる場合の両者がある。

(4) 振幅特性や振動数特性の時間的変化を考慮した地震波形は、振幅特性のみを規定する時間に関する確定関数と、この関数とは独立で振動数成分のみが時間とともに変化する確率過程の積として模式表示することができる。

(5) 本方法により発生させたスペクトル密度が時間

とともに変化する人工地震波は、パラメータを適当に選ぶことによりスペクトル密度の時間的変化の様子を任意に変えること、地震波発生の際に用いる数個の乱数を取り換えることにより同一の確率統計的性質を有する地震波を電子計算機上で数多く発生させることができることから、地震動のスペクトル密度の時間的変化が構造物の応答に及ぼす影響を確率統計的に検討していくための入力地震波となりうる。

(6) 今後解決されるべき問題点は以下のようである。すなわち構造物の応答には入力地震動の卓越振動数とともに振幅特性が大きな影響を及ぼすものと考えられるので、今後は両者の時間的変化を同時に検討することも必要である。また、スペクトル密度の時間的変化の型と震源距離との関係については、震源にきわめて近い地震記録のスペクトル密度は時間的変化が比較的少ないということ、地震の規模が大きくて震源距離の長い記録については、波動の地盤内における複雑な反射屈折などを反映してその卓越振動数が時間とともにかなり変化する、などの傾向をとらえることができた。さらに詳細なスペクトル密度の時間的変化の型と地盤条件や震源距離などとの関係については、今後より多くの記録についての解析に待たねばならない。

最後に本研究実施に際してご討議ならびに有益なご助言をいただいた京都大学 亀田弘行助教授、数値計算において助力を受けた元京都大学大学院学生(現神戸市役所) 新谷瑞徳氏に感謝する次第である。また地震記録の一部は京都大学 土岐憲三助教授に提供していただいた。ここに記して感謝の意を表する次第である。なお、本研究の数値計算は京都大学大型計算機センターのFACOM 230-75 によったことを付記する。

### 参 考 文 献

- 1) 後藤尚男・土岐憲三・秋吉 卓：電子計算機による耐震設計用の人工地震波形に関する研究，日本地震工学シンポジウム(1966)講演集，昭41. 10, pp. 25~30.
- 2) 土岐憲三：地震動のシミュレーションとその応用，京都大学防災研究所年報，第11号 A, 昭43, pp. 291~303.
- 3) 山原 浩：地震の振動特性を考慮した地震時の地動の推定(その1)——地震のパワーとスペクトル特性の時間的変化，日本建築学会論文報告集，第175号，昭45. 9, pp. 31~37.
- 4) 山原 浩：地震時の振動特性を考慮した地震時の地動の推定(その2)——地層の物理モデル置換と地震時の地動の推定——，日本建築学会論文報告集，第176号，昭45. 10, pp. 51~57.
- 5) Trifunac, M.D.: Response Envelope Spectrum and Interpretation of Strong Earthquake Ground Motion, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 61, No. 2, April, 1971, pp. 343~356.
- 6) Trifunac, M.D.: A Method for Synthesizing Realistic Strong Ground Motion, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 61, No. 6, December, 1971, pp. 1739~1753.
- 7) Page, C.H.: Instantaneous Power Spectra, Jour. of

- Appl. Phys. 23, Jan., 1952, pp. 103~106.
- 8) Priestley, M.B.: Evolutionary Spectra and Non-Stationary Processes, Jour. of Royal Statistical Society, B27, 1965, pp. 204~237.
- 9) Lin, Y. K.: Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill Book Company, 1967, p. 60.

(1974. 9. 18・受付)

---