

最悪人工地震入力の解析

ANALYSIS OF THE WORST PSEUDO EARTHQUAKE
IN ASEISMIC DESIGN

星谷 勝*・矢作 枢**・友沢 武昭***・石井 清****

By Masaru Hoshiya, Kaname Yahagi, Takeaki Tomosawa and Kiyoshi Ishii

1. 序 論

1959年, G.W. Housner により提案された平均応答スペクトル法は現在の耐震設計において, 重要な役割をはたしている。しかし, 平均応答スペクトルを動的解析あるいは修正震度法に適用する場合, 次に示すいくつかの問題点がある。一つは, 平均応答スペクトルが, 地震動の母集団に対する応答スペクトルの平均値の推定量であり, 本来, ばらつきをもつ確率統計量であることである。このことは, 将来, 生起するであろう地震動が平均応答スペクトルよりもはるかに大きな値を示す可能性があることを示している。理論的には, 応答スペクトルはいくらでも大きくなりうる。また, 応答スペクトルは, 入力として用いた地震データに大きく左右されるので, 信頼性の高い統計的処理がむずかしいこと。また, 地震加速度データ自体の精度の問題, すなわち, SMAC 加速度計の短周期における精度および長周期におけるデータ間のばらつきなどの問題点がある。

一方, 特に重要な構造物, たとえば原子力発電所あるいは長大橋梁などに対しては, 耐用年数中に想定しうる地震動強さに対しては確率1で安全性を保証できうるような設計法が望ましい。

このような設計法として, 平均応答スペクトルのかわりに, 以下に示すが, 応答スペクトルの上限値を用いる方法は, 耐震設計における一つの有力なアプローチとなる。

平均応答スペクトルを次のような式で表わせるものとす^{1), 2), 3)}。

$$S \leq \alpha \cdot (S_a)_{\text{bound}} \dots \dots \dots (1)$$

ここで, S は応答スペクトル, α は地震動強さを示すパラメータ。 $(S_a)_{\text{bound}}$ は単位地震動強さの応答スペクトルの上限値である。なお, 本論文では α に最大加速度を用いた場合の $(S_a)_{\text{bound}}$ の解析を試みる。もし合理的な $(S_a)_{\text{bound}}$ が求められれば, それは確定関数として与えられ, 将来おこりうるいかなる地震動の単位地震動強さの応答スペクトルよりも大きく安全側にある。したがって, α の値が適切に評価できれば $S = \alpha \cdot (S_a)_{\text{bound}}$ を設計に用いることにより, 少なくとも地震動強さ α のいかなる地震動に対しても耐震安全性を保証できる。また, 式(1)における α の確率分布形を推定できれば, S に対する信頼性評価も可能となる。

応答スペクトルは入力および構造動特性の複雑な関数として求まるが, 単位の地震動強さに対しては, その上限値が当然存在しよう。ここで, この上限値を与える入力, すなわち系に対し考えられる最も危険な入力を最悪入力とよぼう。

Drenick⁴⁾は入力の全パワーの平方根を地震動強さとして応答スペクトルの上限値をシュワルツの不等式を用いて求めたが, 実用上ではさらに改良が必要である。

Shinozuka⁵⁾はDrenickの研究を地震動の確率モデルに拡張したが, 入力が規定したスペクトル特性を満足するという範囲内の最悪応答を解析したので適用性に限界が残る。

もし, ここで過去の実際地震データから得られた情報を有効に用いれば, 純数学的, 理論的入力にはさらに改良され, より現実的となる。

このような観点から, 本論文は, 応答スペクトルの上限値を求める基礎的研究として, 地震入力に対し, 振幅レベル, 継続時間およびパワースペクトルを実際地震データをもとにして作られる拘束条件とし, 1自由度系(SDF系)の最悪入力を推定する方法を検討したものである。

本論文の問題を最適制御問題としてとらえ, 次の最適

* 正会員 Ph. D. 武蔵工業大学助教授 工学部土木工学科
 ** 正会員 首都高速道路公社
 *** 正会員 工修 (株)長大橋設計センター
 **** 学生会員 武蔵工業大学大学院 修士課程

化手法を用いる。すなわち、最悪入力を解析するための近似手法として、数値解析手法⁶⁾ (Feasible Derrection Method; 以下 FDM と略記する) および数値実験手法⁷⁾ (Monte Carlo Simulation Method) を用いる。

本論文では、初めに最適制御問題を設定し、上記2方法により最悪入力および最大応答を解析する。最後に、応答スペクトルの上限値を解析し、耐震設計において、応答スペクトルの上限値を用いるアプローチの有用性を検討する。

2. 最適制御理論の適用

序論で述べた問題は、最適制御理論を適用して、次に示す最適制御問題に置換できる。すなわち、地震動の振幅レベル、継続時間およびパワースペクトルを最適制御における操作量 (設計変数) の拘束条件とし、また加速度のある時間的変化によって起こる SDF 系の応答の最大値を評価関数として、最適制御問題を構成するものである。本論文では、SDF 系の変位応答を最大とする入力および最大応答値を解析する。以下、応答という言葉は変位応答を意味する。

最適制御問題は次のように設定できよう。次に示すような拘束条件のもとで、SDF 系の応答の絶対値を最大とする。すなわち、

$$|x(t_{\max})| \rightarrow \max. \dots \dots \dots (2)$$

とするような最悪入力 $f(t)$ を決定すること。ここで t_{\max} は SDF 系の最大応答を示す時間。

拘束条件 1 ; 最悪入力 $f(t)$ が、入力の継続時間の情報を含む振幅レベルの包絡線の上限界 $g_{\text{bound}}(t)$ の中に含まれること。すなわち、

$$|f(t)| \leq g_{\text{bound}}(t) \dots \dots \dots (3)$$

拘束条件 2 ; 最悪入力 $f(t)$ が、パワースペクトル $G(\omega)$, $\omega \geq 0$ を有すること。

$$\dots \dots \dots (4)$$

応答 $x(t)$ は、SDF 系が固有円振動数 ω_0 および減衰定数 β を有するとき初期条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ として、次式で与えられる。

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 $h(t)$ は単位衝撃応答関数である。

$$h(t) = \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega} t \dots \dots \dots (6)$$

$$\bar{\omega} = \omega_0(1-\beta^2)^{1/2} \dots \dots \dots (7)$$

いま、最悪入力 $f(t)$ を次のように近似できると仮定する。すなわち、最悪入力 $f(t)$ は unit step function の級数和で与えられる関数 $g(t)$ とパワースペクトル $G(\omega)$ を有する sine 級数 $n(t)$ の積として表わす。

つまり、

$$f(t) \approx g(t)n(t) \dots \dots \dots (8)$$

$$g(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \{u(t-t_k) - u(t-t_{k+1})\} \dots \dots \dots (9)$$

$$n(t) = \sum_{j=1}^m a_j \sin(\omega_j t + \delta_j) \dots \dots \dots (10)$$

ここで、 $t_1 = 0.0 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$

α_k ; 時間 (t_k, t_{k+1}) で振幅レベルを決める非負の値をもつパラメータ。

$$\left. \begin{aligned} &u(t-t_k); \text{ unit step function} \\ &\omega_j = \omega_l + (j-1/2)\Delta\omega \\ &\omega_l, \omega_u; \text{ パワースペクトル } G(\omega) \text{ の最} \\ &\quad \text{小および最大の } \omega \text{ の値} \\ &\Delta\omega = (\omega_u - \omega_l)/m \\ &a_j = \{2 G(\omega_j)\Delta\omega\}^{1/2} \\ &\delta_j \text{ は } 0.0 \sim 2\pi \text{ の定数} \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

$g(t)$ は 図-1 に示すように α_k, t_k の関数で与えられる階段状の直線で近似的に地震動の振幅レベルの

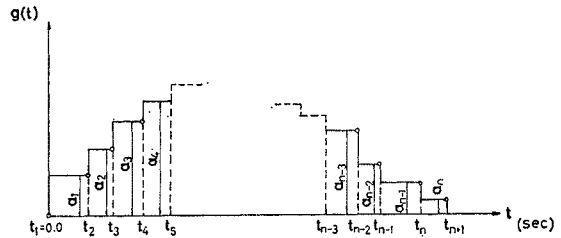


図-1 $g(t)$ の概略図

evolutionary な傾向を示す。 $n(t)$ は地震動の定常部の特性を有する波形を示す。

$n(t)$ がパワースペクトル $G(\omega)$ を有するので式 (9) において、 n を十分大きくとり、 $g(t)$ を滑らかに変化させる関数とすれば、拘束条件 2 は当然満足される。 a_j および δ_j に関する式 (11) は Appendix 1 を参照されたい。

最適制御問題における設計変数は式 (9) の $g(t)$ における $\alpha_k (k=1, \dots, n)$, $t_k (k=1, \dots, n+1)$ および式 (10) の $n(t)$ における $\delta_j (j=1, \dots, m)$ と SDF 系の応答に最大値を与える時間 t_{\max} である。

式 (8) を用いて式 (3) を整理する。

$$|f(t)| \approx |g(t)n(t)| = g(t)|n(t)| \leq g_{\text{bound}}(t) \dots \dots \dots (12)$$

いま、時間間隔 (t_k, t_{k+1}) における $n(t)$ の絶対最大値 $\max|n(t)|$ と、同じ時間間隔 (t_k, t_{k+1}) における振幅レベルの包絡線 $g_{\text{bound}}(t)$ の最小値 $\min\{g_{\text{bound}}(t)\}$ を用いて式 (12) を近似する。

すなわち、時間 (t_k, t_{k+1}) で、

$$\alpha_k \cdot \max|n(t)| \leq \min\{g_{\text{bound}}(t)\} \dots \dots \dots (13)$$

式 (13) は式 (12) において、時間間隔 $(t_{k+1}-t_k)$

が十分に小さければよい近似式となる。また、 $G(\omega)$ が narrow band であるか、または $g_{bound}(t)$ が比較的なだらかなときは、さらにより近似式となる。

また、式 (5) および (8) を用いれば、次の関係が得られる。

$$|x(t_{max})| = \left| \int_0^{t_{max}} f(\tau)h(t_{max}-\tau)d\tau \right| \dots\dots\dots(14)$$

$$\approx \left| \int_0^{t_{max}} g(\tau)n(\tau)h(t_{max}-\tau)d\tau \right| \dots\dots\dots(15)$$

ここで、初めの最適制御問題は次のように整理できる。次に示す拘束条件のもとで、SDF 系の応答の絶対値 $|x(t_{max})|$ を最大とする。すなわち、

$$|x(t_{max})| \approx \left| \int_0^{t_{max}} g(\tau)n(\tau)h(t_{max}-\tau)d\tau \right| \rightarrow \max \dots\dots\dots(16)$$

ような最悪入力 $f(t)=g(t)n(t)$ を決定すること。

拘束条件 1; 継続時間 および 振幅レベルの拘束条件 (3) 式は (8)~(10) および式 (13) を用いれば、時間 $t_k \leq t < t_{k+1} (k=1, \dots, n)$ で

$$0.0 \leq \alpha_k \cdot \max |n(t)| \leq \min \{g_{bound}(t)\} \dots\dots\dots(17)$$

$$\text{ここで、} t_1 = 0.0 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} \dots\dots\dots(18)$$

拘束条件 2; パワースペクトルの拘束条件 (4) 式は、式 (8)~(10) および式 (11) を用いれば、

$$0.0 \leq \delta_j < 2\pi (j=1, \dots, m) \dots\dots\dots(19)$$

3. Monte Carlo Method による最適化

この方法は、まずシュミレーション法を用いて、拘束条件を満足する多くの可能な入力 $f_i(t) (i=1, \dots, \text{very large number})$ を作成する。ここで、 $f_i(t)$ は i 番目のサンプル関数を意味する。いったん、入力 $f_i(t)$ が抽出されれば、式 (5) より、応答 $x_i(t)$ を直接計算し、 $x_i(t)$ の絶対最大応答値 $|x_i(t_{max})|$ を求めることができる。十分なシュミレーション試行のうち、 $|x_i(t_{max})|$ の中で、最大のものを与える関数 $f_k(t)$ を最悪入力 $f(t)$ と推定する。

すなわち、

$$f(t) = f_k(t) \text{ such that } |x_k(t_{max})| = \max \{|x_i(t_{max})| (i=1, \dots, \text{very large number})\} \dots\dots\dots(20)$$

さて、 $f_i(t)$ は拘束条件 (17), (18) および (19) 式を満たす関数であればよいから、その抽出法は全く任意である。しかし、多くの $f_i(t)$ を抽出する際に偶然性に支配されて行くほうが適切と考え、 $f_i(t)$ を拘束条件を満たすある種の確率過程のサンプル関数として抽出できると考える。

$f_i(t)$ を次のように作成する。まず、Appendix 1 に従って ω_j, a_j を算出し、次に δ_j を 0 から 2π の範囲で一様な確率変数、すなわち $u(0, 2\pi)$ からシュミレ

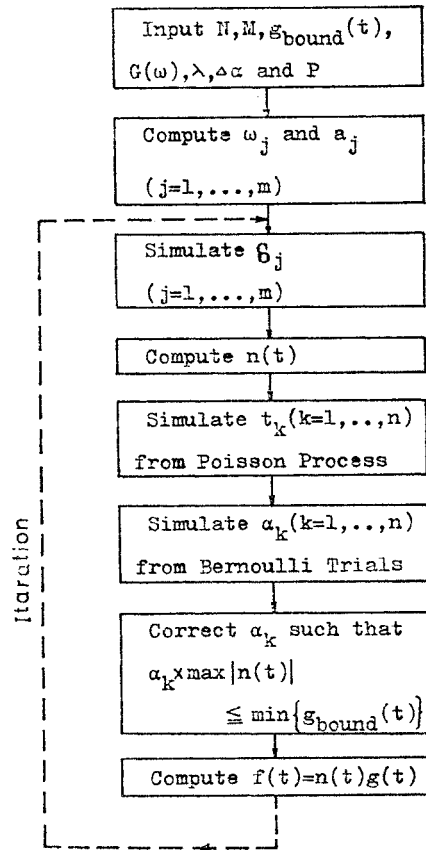


図-2 $f(t)$ の作成手順

トすれば式 (10) より $n_i(t)$ を決定することができる。次に式 (9) の $g(t)$ は、まず $t_k (k=2, \dots, n+1)$ を定常発生率を有するポアソン過程としてシュミレートする。さらに α_k をベルヌーイ試行としてシュミレートし、振幅レベルの拘束条件 (17) 式より α_k のみを補正する。

上記 $f_i(t)$ の作成手順を図-2 に示す。

(1) ポアソン過程のシュミレーション

定常発生率を有するポアソン過程は次のようにしてシュミレートできる⁹⁾。

ポアソン過程におけるランダム・パルス発生の時間間隔は確率変数である。この時間間隔 X の確率分布を求める。明らかに事象 $\{X \geq t\}$ は時間間隔 $(0, t)$ でパルスが 1 回も生起しないことと同値であるから、

$$P\{X \geq t\} = P_0(t) = e^{-\lambda t} \dots\dots\dots(21)$$

したがって、 X の確率分布関数は次式で与えられる。

$$F_X(t) = P\{X < t\} = 1 - e^{-\lambda t} \dots\dots\dots(22)$$

確率分布関数 $F_X(t)$ を用いれば、 $t = t_{k+1} - t_k$ は次式を用いて抽出できる。

$$e^{-\lambda t} = 1 - F_X(t)$$

両辺の自然対数を取り、整理すれば、

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - F_X(t)) \dots\dots\dots (23)$$

(2) α_k のシュミレーション

α_k は t_k とは独立にベルヌーイ試行としてシュミレートし、次に拘束条件 (17) 式により補正する。

ベルヌーイ試行において、 α_k の確率関数を次のように与える。

$$\left. \begin{aligned} P_{\alpha_{k+1}}(\alpha_k + \Delta\alpha) &= p \\ P_{\alpha_{k+1}}(\alpha_k - \Delta\alpha) &= q = 1 - p \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 $\alpha_0 = 0.0$, p は $0 \leq p \leq 1.0$ および $\Delta\alpha$ は α_k の単位変化幅。

式 (24) は $u(0, 1)$ を用いて、簡単にシュミレートできる。次に α_k を振幅レベルの拘束条件 (17) 式から次のように補正する。

$$\left. \begin{aligned} t_k \leq t < t_{k+1} \text{ で} \\ |\alpha_k| \max|n(t)| \leq \min\{g_{\text{bound}}(t)\} \text{ のとき} \\ \alpha_k = |\alpha_k| \\ |\alpha_k| \max|n(t)| > \min\{g_{\text{bound}}(t)\} \text{ のとき} \\ \alpha_k = \frac{\min\{g_{\text{bound}}(t)\}}{\max|n(t)|} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

(1), (2) において、式 (23) の λ および式 (24) の $\Delta\alpha$ の数値は $g(t)$ のシュミレーションにおける重要なファクターである。 λ は $t = t_{k+1} - t_k$ の平均値の逆数であるから $\Delta\alpha/\lambda$ が小さくなるほど、 $g(t)$ はゆるやかに変化する関数となる。

4. Feasible Direction Method による最適化

FDM は最適化手法の 1 つであり、Direction Method の最も一般的な方法として、一般の非線形、不等号の拘束条件をもつ最適化問題に広く応用されている⁶⁾。

この方法は、初めに拘束条件を満足する設計変数の初期値を設定し、拘束条件を満たす領域内で目的関数 $F = |x(t_{\text{max}})|$ を大きくする方向に設計変数を繰返し改良し、目的関数 F を最大とする設計変数を求める方法である。

設計変数の改良は、次式で与えられる。

$$X_{q+1} = X_q + aS_q \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 X は設計変数のベクトル $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, t_1, \dots, t_{n+1}, \delta_1, \dots, \delta_m, t_{\text{max}}\}$, S は目的関数 F を大きくする方向ベクトル。また、 a は正の移動距離であり、 X_{q+1} が拘束条件を満足するように選ばれる。拘束条件 $g \leq 0$ のとき拘束条件 g は満足される。添字 q は q 回目の改良を意味する。

式 (26) の S は式 (27) および (28) を満足するように決定される (図-3~5 参照)。

$$S^T \nabla g_j < 0 \quad j \in J \quad (J \text{ は } X_q \text{ で境界に達した})$$

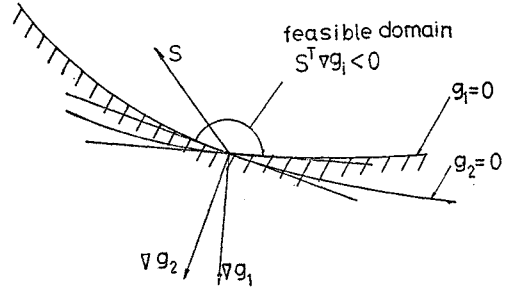


図-3 $S^T \nabla g_i < 0$ の領域

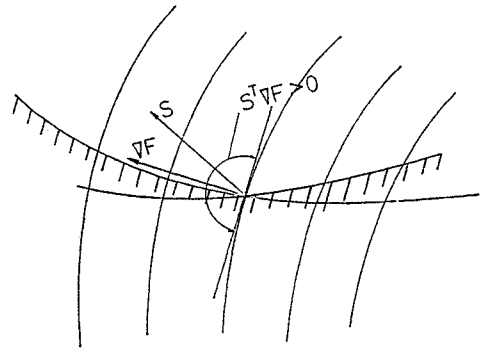


図-4 $S^T \nabla F > 0$ の領域

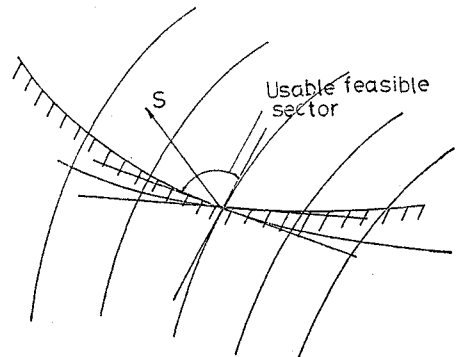


図-5 $(S^T \nabla g_i < 0) \cap (S^T \nabla F > 0)$ の領域

拘束条件の集合) $\dots\dots\dots (27)$

$S^T \nabla F > 0 \dots\dots\dots (28)$

ここで、 ∇g_j は拘束条件 g_j に対する設計変数 x_i の勾配 $\partial g_j / \partial x_i$ を要素とするベクトル、 ΔF は目的関数 F に対する設計変数 x_i の勾配 $\partial F / \partial x_i$ を要素とするベクトルである。

式 (27) は、 S が拘束条件 g_j を満たす方向であることを保証する。つまり、式 (27) を満足すれば、正の値をもつ a が存在し、 X_{q+1} が拘束条件 g_j を満足するように決定できる。式 (28) は、 S が目的関数 F を大きくする方向であることを保証する。したがって、FDM のアルゴリズムには、2つの主要部がある。すなわち、1つは式 (27) および (28) を満足する S の決定であり、いま1つは、移動距離 a の決定である。また、設計

変数 X_{q+1} の収束判定には、Kuhn-Tucker の最適基準の定理を用いる。これらのアルゴリズムについては参考文献 6) にゆずる。 S の決定に際しては、目的関数および拘束条件に対する設計変数の偏微分もしくは差分が必要のため、解析は Monte Carlo Method より、はるかに煩雑となる。

また、求められた解が全体的最適値であるためには、拘束条件を満たす領域が凸型であり、かつ目的関数が凹型関数である必要があるが、本論文の最悪制御問題においては、目的関数および拘束条件が複雑であるため、数種の異なる初期値から出発した解（局所的最適値）が同じ値となることで全体的最適値と判定する。

次に本論文の問題に対し、FDM を適用する。設計変数としては、 $g(t)$ の $\alpha_k (k=1, \dots, n)$, $t_l (l=1, \dots, n+1)$, $n(t)$ の $\delta_j (j=1, \dots, m)$ および t_{\max} となる。ここで、 t_{\max} 以降の入力は応答の絶対最大値と全く関係がないので、

$$t_{n+1} = t_{\max} \dots\dots\dots (29)$$

とする。また、 $g(t)$ の n を十分大きくとり、 t_1, \dots, t_n を定数とすれば、解析は非常に簡単になる。

目的関数 (16) 式をさらに次のように変形する。

$$|x(t_{\max})| = \left| \int_0^{t_{\max}} g(\tau) n(\tau) h(t_{\max} - \tau) d\tau \right| \dots (16)$$

$$= \left| \int_0^{t_{\max}} \sum_{k=1}^n \alpha_k \{u(\tau - t_k) - u(\tau - t_{k+1})\} \cdot \sum_{j=1}^m a_j \sin(\omega_j \tau + \delta_j) \times h(t_{\max} - \tau) \alpha \tau \right| \dots (30)$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_k a_j I_{kj}(\delta_j, t_{n+1}) \dots (31)$$

ここで、

$$I_{kj}(\delta_j, t_{n+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin(\omega_j \tau + \delta_j) h(t_{n+1} - \tau) d\tau \dots (32)$$

式 (32) はさらに変形できるが、これは Appendix 2 に示す。また、実際の計算では、 $|x(t_{\max})|$ の 2 乗を目的関数とし、絶対値符号をはずす。

$$F = \{x(t_{\max})\}^2 = \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_k a_j I_{kj}(\delta_j, t_{n+1}) \right\}^2 \dots (33)$$

5. 最悪入力の解析

前節の手法を用いて、SDF 系に対する最悪入力（最大加速度は 1 gal）の解析を行う。

入力に対する振幅レベルおよび継続時間に対する拘束条件 1 は実際の強震加速度データに対する振幅レベルの包絡線⁹⁾を簡略化したものを用いる。また、入力に対するパワースペクトルの拘束条件 2 は Case 1 として、パワースペクトルを SDF 系の固有円振動数に対応させ、

系に対して最も厳しい周波数成分を与える。また、Case 2 として、パワースペクトルが固有円振動数を中心として範囲 $(\omega_0 - \pi/2, \omega_0 + \pi/2)$ で一様な有限ホワイトノイズを与えた。

振幅レベルの包絡線は衝撃的な地震動や特殊地域に対して観察される特殊波等や、さらに設計対象によっても詳細に分類され与えられるべきであるが、本論文では、最悪入力アプローチの検討が主題であるから、包絡線には文献 9) を使用するにすぎない。しかし、実用の立場からはさらに包絡線の検討が必要であろう。同様にしてパワースペクトルの拘束条件に対しても、その検討は今後の大きな課題である。

さて、以上まとめれば、入力に対する振幅レベル、継続時間およびパワースペクトルの拘束条件は次のとおりである。

拘束条件 1 (振幅レベルおよび継続時間の拘束条件);

$$g_{\text{bound}}(t) = 0.0 (\text{gal}) \quad t < 0.0 (\text{sec})$$

$$= 1.0 \quad 0.0 \leq t \leq 35.0$$

$$= \exp(-0.0357(t-35.0)) \quad 35.0 \leq t \leq 50.0$$

$$= 0.0 \quad 50.0 < t \dots (34)$$

拘束条件 2 ;

Case 1 $G(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ (gal² sec), $\omega \geq 0$ (35)

Case 2 $G(\omega) = S_0 \{u(\omega - \omega_0 + \pi/2) - u(\omega - \omega_0 - \pi/2)\}$, $\omega \geq 0$ (36)

ここで、 $\delta(\)$ は Dirac's delta function, S_0 は正の定数。拘束条件 1 の式 (34) を図-6 に、拘束条件 2 の

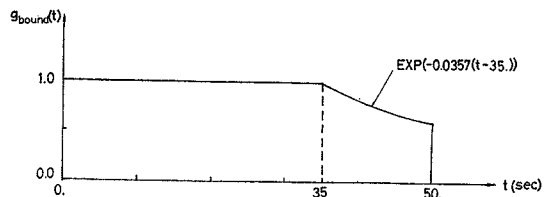


図-6 加速度包絡線 $g_{\text{bound}}(t)$

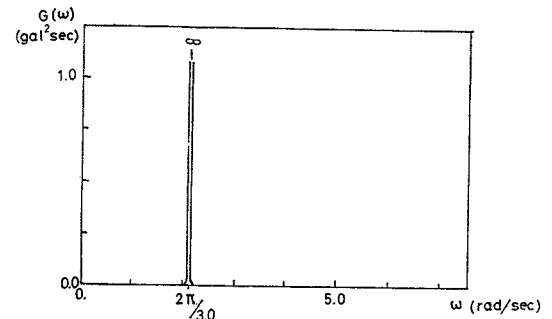


図-7 パワースペクトル $G(\omega)$, $\omega \geq 0$ (Case 1)

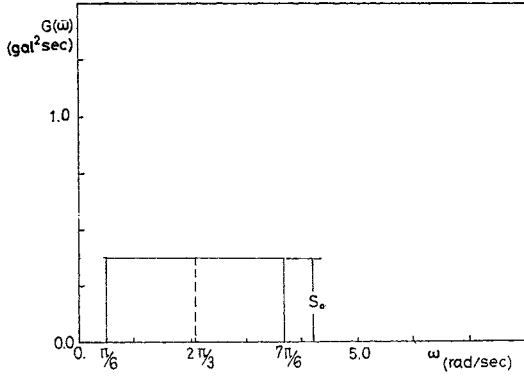


図-8 パワースペクトル $G(\omega), \omega \geq 0$ (Case 2)

式 (35) および (36) を図-7 および図-8 に示す。
 また、計算例として、SDF 系は固有円振動数 $\omega_0 = 2\pi/3$ rad/sec (固有周期 $T_0 = 3.0$ sec) および減衰定数 $\beta = 0.05$ とする。
 Case 2 では $n(t)$ の計算で式 (10) の総数和を $m = 10$ とする。

(1) Monte Carlo Method による数値結果

式 (23) および (24) を用いた $f_i(t)$ の作成において、 $\lambda = 0.20$, $4\alpha = 0.20$ および $p = 0.75$ とした。Case 1 では $\delta_1 = 0.0$ として入力に位相差を与えていない。また、シュミレーション回数は Case 1 および Case 2 とともに 200 回とした。

Case 1 および Case 2 の数値結果をそれぞれ図-9 および図-10 に示す。図-9 および図-10 において、(a), (b), (c) および (d) はそれぞれ、最悪入力 $n(t)$, $g(t)$, $f(t) = g(t)n(t)$ および SDF 系の応答 $x(t)$ である。

図-10 の (a) すなわち、Case 2 の $n(t)$ は式 (36) の $G(\omega)$ において、 $S_0 = 1/\pi$ とした。表-1 に Case 2

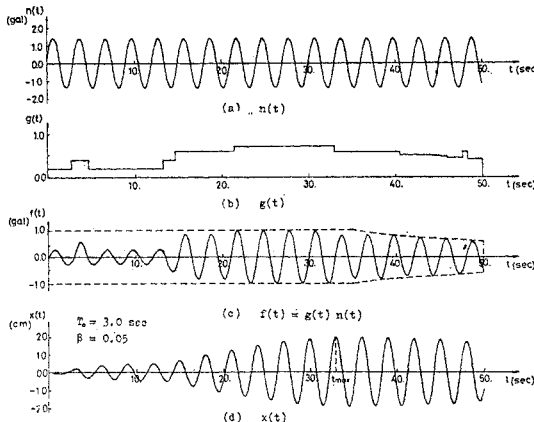


図-9 Monte Carlo Method—Case 1

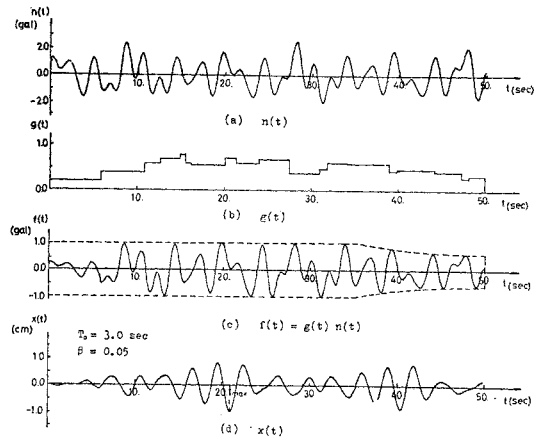


図-10 Monte Carlo Method—Case 2

表-1 δ_j 値 (Case 2, Monte Carlo Method)

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
δ_j	1.292	5.247	1.048	5.509	4.884	1.305	1.149	1.689	5.537	2.153

における $n(t)$ の δ_j 値 ($j = 1, \dots, 10$) を示す。

また、Case 1 の絶対最大応答値 $|x(t_{max})|$ は 2.280 cm, Case 2 の $|x(t_{max})|$ は 1.011 cm となった。

次に解の収束性を調べるために、 $\max|x(t_{max})|$ とシュミレーション回数の関係を求め、その結果を図-11 に示した。Case 1 の場合には、150 回から 200 回の $\max|x(t_{max})|$ の増加率は 0% であるが、Case 2 の場合、増加率は 2% 程度ある。このことから、Case 1 の $\max|x(t_{max})|$ はほぼ収束していると考えられるが、Case 2 の $\max|x(t_{max})|$ の収束はやや不十分であるこ

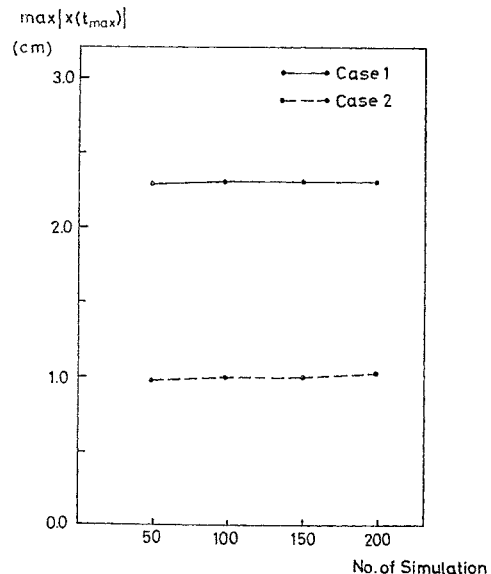


図-11 $\max|x(t_{max})|$ の収束性—Monte Carlo Method

とがわかる。

(2) FDM による解析および結果

Monte Carlo Method による数値結果を参考として、 $g(t)$ の t_k および $n(t)$ の δ_j のうちいくつかを定数とし、設計変数から除外し設計変数の総数を低減する。

Case 1 の場合を検討する。式 (9) で $n=9$ とする。また、 $g(t)$ の $t_k (k=2, \dots, 9)$ および $n(t)$ の δ_i を次のような定数とする。

$$\delta_1 = 0.0 \dots \dots \dots (37)$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 0.0 \\ t_k &= 1.75 + 4.0(k-1) \quad (k=2, \dots, 9) \end{aligned} \right\} \dots \dots (38)$$

ここで、式 (38) の t_k 値 ($k=2, \dots, 9$) は Monte Carlo Method の数値結果を参考にし決定した。式 (37) および (38) によって、残る設計変数は $g(t)$ の $\alpha_k (k=1, \dots, 9)$ および式 (29) の $t_{10} (=t_{max})$ である。

拘束条件は式 (17), (18), (37) および (38) より、

$$0 \leq \sqrt{2} \alpha_k \leq 1.0 \quad (k=1, \dots, 8) \dots \dots (39)$$

$$0 \leq \sqrt{2} \alpha_9 \leq \min\{g_{bound}(t)\} \dots \dots (40)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \min\{g_{bound}(t)\} & \\ &= 1.0 \quad t_{10} \leq 35.0(\text{sec}) \\ &= \exp(-0.0357(t_{10}-35)) \quad t_{10} > 35.0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (41)$$

$$t_9 \leq t_{10} (=t_{max}) \dots \dots (42)$$

目的関数 F は式 (33), Appendix 2 の式 (A 2-1) より、

$$F = \{x(t_{max})\}^2 = \left\{ \sum_{k=1}^9 \alpha_k a_k I_{k1}(0, t_{10}) \right\}^2 \dots (43)$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^9 \alpha_k a_k I_{sk1}(t_{10}) \right\}^2 \dots \dots (44)$$

数値解析結果を図-12 に示す。図-12 の (a), (b), (c) および (d) はそれぞれ最悪入力 $n(t)$, $g(t)$, $f(t) = g(t) \times n(t)$ および SDF 系の応答 $x(t)$ である。FDM では t_{max} 以降の入力は絶対最大応答値 $|x(t_{max})|$ と関係がなく、入力および応答とも時間 $(0, t_{max})$ の範囲で与えられる。絶対最大応答値 $|x(t_{max})|$ は、 $t_{max} = 34.53 \text{ sec}$ で 2.279 cm となった。

次に Case 2 の場合を検討しよう。式 (9) で $n=9$ とする。 $n(t)$ の $t_k (k=2, \dots, 9)$ を Case 2 のシュミレーション結果を参考にして次式で与えられるとする。

$$t_k = 2.5(k-1) \quad (k=2, \dots, 9) \dots \dots (45)$$

また、 $n(t)$ の $\delta_j (j=1, \dots, 9)$ を表-1 の値とし、定数とする。したがって、設計変数としては、 $n(t)$ の δ_{10} , $g(t)$ の $\alpha_k (k=1, \dots, 9)$ および $t_{10} (=t_{max})$ である。

拘束条件は、式 (17), (18) および (19) より、

$$0 \leq \alpha_k \max|n(t)| \leq 1.0 \quad (k=1, \dots, 9) \dots \dots (46)$$

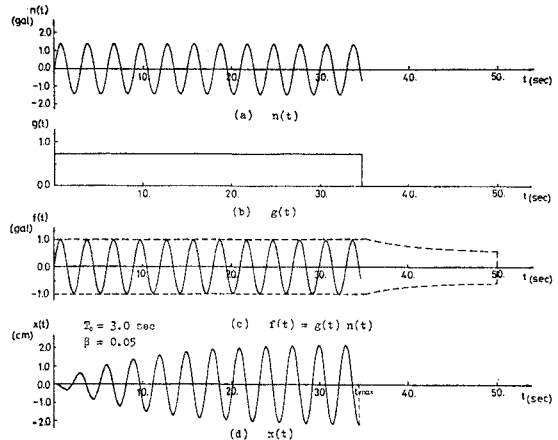


図-12 FDM-Case 1

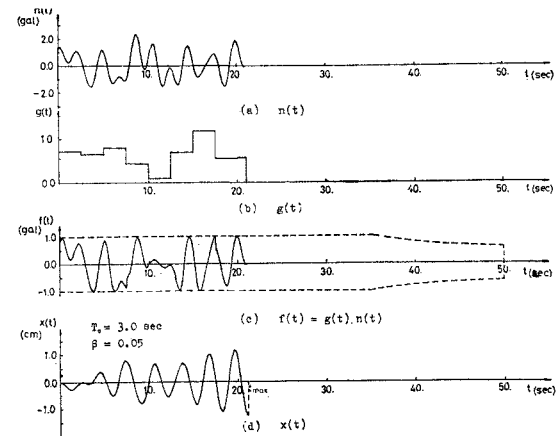


図-13 FDM-Case 2

$$t_9 \leq t_{10} (=t_{max}) \dots \dots (47)$$

$$0 \leq \delta_{10} < 2\pi \dots \dots (48)$$

式 (46) において、 $\max|n(t)|$ は $k=1, \dots, 8$ で 1 変数 δ_{10} の関数であり、 $k=9$ のときには、1 変数 δ_{10} の関数か 2 変数 δ_{10} および t_{10} の関数となるので、拘束条件 (46) 式に対する δ_{10} および $k=9$ のときの t_{10} についての勾配には 1 次差分を計算に用いる。

数値結果を図-13 に示す。図-13 の (a), (b), (c) および (d) は、それぞれ最悪入力 $n(t)$, $g(t)$, $f(t) = g(t)n(t)$, および SDF 系の応答 $x(t)$ である。ここで、図-13 の (a) すなわち、 $n(t)$ は式 (36) の $G(\omega)$ において $S_0 = 1/\pi$ とした。

また、数値結果とし、 $\delta_{10} = 1.858 \text{ rad}$ に、絶対最大応答値 $|x(t_{max})|$ は $t_{max} = 21.02 \text{ sec}$ で、 1.221 cm となった。

(3) Monte Carlo Method と FDM の比較検討

Case 1 において、絶対最大応答値 $|x(t_{max})|$ は、Monte Carlo Method により 2.280 cm , FDM により

2.279 cm となった。両方法の数値結果は、SDF 系が共鳴振動を起こし、定常振動に移ったのちの絶対最大応答値すなわち理論的絶対最大値¹⁰⁾ ($=1/2 \beta \omega_0^2 = 2.280$ cm) とほぼ等しい(理論的絶対最大値は、外力を $-\sin \omega_0 t$ (gal) とし、SDF 系の運動方程式

$$\ddot{x} + 2\beta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -\sin \omega_0 t \dots\dots\dots(49)$$

を解けば、変位応答の振幅は $1/2 \beta \omega_0^2$ と与えられる)。これは、両方法により得られた最悪入力 $f(t)$ が SDF 系に共鳴振動を起こし、定常状態にするのに十分な継続時間を持っていることを示している。特に、FDM による最悪入力 $f(t)$ は、われわれの常識からも推察できようが振幅レベルの上限值 $g_{bound}(t)$ に接する最大限の振幅レベル 1.0 で終始している。

Case 2 において、絶対最大応答値 $|x(t_{max})|$ は、Monte Carlo Method の場合に 1.011 cm, FDM の場合には 1.221 cm となった。両方法の $|x(t_{max})|$ の差および図-11 の $|x(t_{max})|$ の収束性等からわかるが、Monte Carlo Method では、さらに多くのシミュレーション回数が必要であろう。

両方法の最悪入力 $f(t)$ は、 $n(t)$ の δ_1 から δ_9 が共通のためによく似ている。しかし、FDM の $f(t)$ は図-13 の (c) に示されるように、振幅レベルの小さな区間と大きな区間の明白な違いがある。この区間の振幅レベルの大小はその区間の $f(t)$ と $|x(t_{max})|$ の関係から、 $|x(t_{max})|$ を最大とするように決定されている。

なお、コンピュータ演算時間に関しては、Case 1 において、Monte Carlo Method は FDM の約 12 倍、Case 2 においても約 6 倍要した。FDM は Monte Carlo Method よりも解の精度およびコンピュータの演算時間の点ですぐれている。しかし、Case 2 において、FDM の解析に設計変数として δ_{10} を加えたために、目的関数および拘束条件の非線形性が増大し、コンピュータ演算時間の比は Case 1 よりも小さくなっている。

6. 考 察

応答スペクトルの上限値を検討するために、最悪入力 $f(t)$ に対し、例題と同様の拘束条件、すなわち継続時間および振幅レベルの拘束条件に、式 (34) で示される実際の強震データの包絡線を簡略化したものを、またパワースペクトルの拘束条件に対し、Case 1 として式 (35) で示される SDF 系の固有円振動数のみを対応させたもの、Case 2 として式 (36) で示される固有円振動数を中心として $(\omega_0 - \pi/2, \omega_0 + \pi/2)$ の範囲で一様な有限ホワイトノイズを与えた。

上の拘束条件のもとで、SDF 系の動特性(固有周期)を変化させることにより変位応答スペクトルを算出し

た。さらに、上限値を改良するために、Case 3 のパワースペクトルとして、G.W. Housner が強震記録の分析から提案した数学モデル^{11),12)} を近似した多治見の数学モデルを用いて上限値を求めてみた。図-14 は Case 3 のパワースペクトルである。

図-15 に、変位応答の理論的上限值(数学理論のみから求まるもの)、Case 1, 2 および Case 3 による上限値、実際地震記録として El Centro 地震(N-S 成分, 1952 年 5 月 18 日) および Taft 地震(E-S 成分, 1952 年 7 月 21 日) の数値結果を示す。

図-15 において、Case 1 および Case 2 の数値結果は、Monte Carlo Method により、200 回のシミュレーションを行い、その数値結果を参考として FDM に

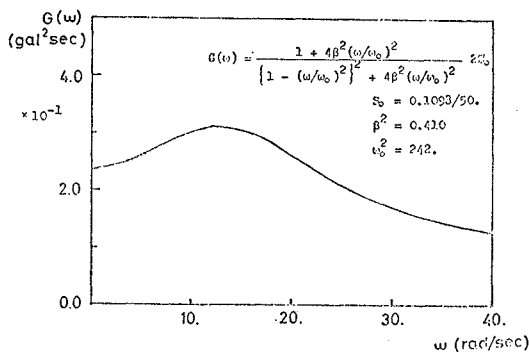


図-14 パワースペクトル $G(\omega), \omega \geq 0$ (Case 3)

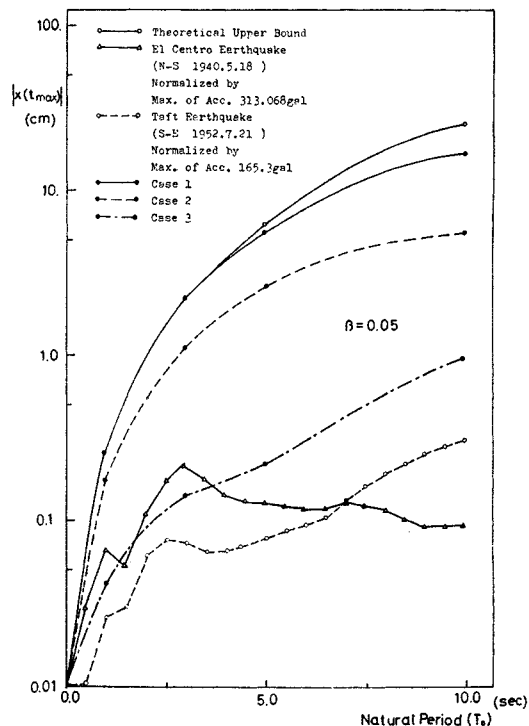
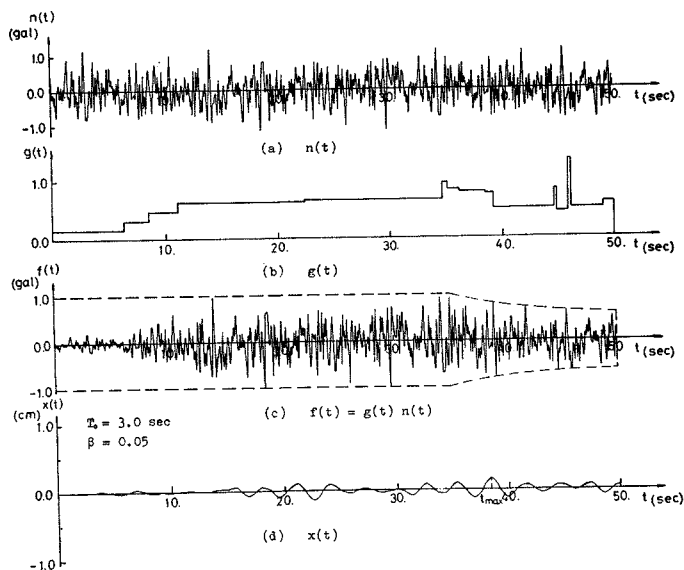


図-15 変位応答スペクトル曲線



図—16 Monte Carlo Method—Case 3

より求めたものである。また、Case 3 の数値結果は、Monte Carlo Method による 200 回のシュミレーション結果である。図—16 は、固有周期 $T_0=3.0$ sec、減衰定数 $\beta=0.05$ の SDF 系に対する Case 3 の数値結果を示す。図—16 の (a), (b), (c) および (d) は、それぞれ最悪入力 $n(t)$, $g(t)$, $f(t)=g(t)n(t)$ および SDF 系の応答 $x(t)$ である。

図—15 は、SDF 系の理論的変位応答の上限値が、入力に対し拘束条件を与えることにより、どの程度改良されるかを示している。

図—15 から、変位応答の上限値に対し、次のような考察ができればよい。

(1) Case 1 の変位応答の上限値は、短周期では理論的上限値⁽⁹⁾ $(1/2 \omega_0^2 \beta)$ と変わらず、長周期において、わずかに小さくなる。これは、Case 1 の最悪入力 $f(t)$ が、短周期において SDF 系の共鳴振動を十分に定常状態にすることを示している。

(2) Case 2 の変位応答の上限値は、Case 1 の変位応答の上限値よりも常に小さく、長周期になるにしたがって、その差は大きくなる。これは、系の band width⁽⁹⁾ からも明白であり、Case 1 の改良が行われたことを示す。

(3) 実際地震記録の分析から得られたパワースペクトルの数学モデルである Case 3 は、Case 1 および Case 2 と比較して、その変位応答の上限値は大幅に改良されている。Case 3 の数値結果は、一般的な変位応答スペクトル曲線の傾向を示している。しかしながら、短周期においては、実際地震記録である El Centro 地震の変位応答を下回っている。長周期において、El

Centro 地震または Taft 地震の 2 倍程度の変位応答となっている。

(4) Case 2 の変位応答の上限値は、El Centro 地震および Taft 地震と比較して、短周期 0.0~2.0 sec では、最高 5 倍程度であるが、長周期 5.0~10.0 sec では、20 倍から 50 倍と大きく開いている。実際地震入力に対しては、Case 2 の拘束条件が長周期において、非常に安全側であることがわかる。

(5) したがって、理論的変位応答の上限値を経験的に過去の実際地震記録から改良する場合、Case 2 と Case 3 の間で、合理的にパワースペクトルをモデル化する必要がある。

7. あとがき

本論文は、耐震設計における応答スペクトルの上限値解析の基礎的研究である。地震動強さを示すパラメータ α には最大加速度を用いた。

はじめに、SDF 系に対し、入力の振幅レベル、継続時間およびパワースペクトルを拘束条件とする最悪入力の解析を最適制御問題として設定した。次に、2つの最適化手法、すなわち FDM と Monte Carlo Method による解析方法を示し、両方法の適用性を例題を通じ、検討した。

最後に、入力の振幅レベル、継続時間およびパワースペクトルの拘束条件に対し、簡単なモデルを想定して、応答スペクトルの理論的上限値がいかに改良されるかを示した。これらは 6. で検討されている。

本論文では、実用に供するまでの応答スペクトルの上限値は求められていない。しかし、耐震設計において、応答スペクトルの上限値を用いるというアプローチの基礎的な裏付けは十分に与えられた。

さらに、応答スペクトルの上限値解析の今後の課題として次のものがあげられよう。

(1) 実際地震データから得られる拘束条件の厳密性と妥当性の検討。

(2) 実際地震データから得られる新たな拘束条件の検討。

(3) 本論文では、地震動強さを示すパラメータとして最大加速度を用いたが、さらに地震動の母集団を規定する適切なパラメータが存在しないかどうか。そのパラメータが見出されれば、そのパラメータの定義は、最悪入力に対する拘束条件の一つとなる。

最後に、本研究を行うに際し、多くの方々の御協力を

得た。首都高速道路公団および(株)長大橋設計センターの先輩諸兄に深く感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 星谷・森河・友沢・高月：応答スペクトルの正規化に関する2, 3の考察, 1973年度土木学会年次学術講演概要集, Oct. 1973.
- 2) 星谷：構造物の安全性評価と問題点, 季刊カラム, No. 50, 1973.
- 3) 土木学会：長大橋梁の安全性に関する調査研究報告書, 応答スペクトルの正規化について, Mar. 1973.
- 4) Drenick, R.F. : Model-Free Design of Aseismic Structures., ASCE, Vol. 96, No. EM 4, Aug. 1970.
- 5) Shinozuka, M. : Maximum Structural Response to Seismic Excitations., ASCE, Vol. 96, No. EM 5, Oct. 1970.
- 6) Fox, R.L. : Optimization Methods for Engineering Design., Addison Wesley, 1970.
- 7) Shreider, Yu.A. : The Monte Carlo Method., Pergaman Press, 1966.
- 8) グネジェンコ：確率論教程Ⅱ., 森北出版, 1970.
- 9) Jennings, P.C., Housner, G.W. & Tsai, N.C. : Simulated Earthquake Motions for Design Purpose., Proc. 4th WCEE. 1968.
- 10) Meirovitch, L. : Analytical Methods in Vibrations., Macmillan Co., 1967.
- 11) Housner, G.W. & Jennings, P.C. : Generation of Artificial Earthquakes., J. of EM Div. ASCE, Feb. 1964.
- 12) Tajimi, M. : A Statistical Method of Determining the Maximum Response of a Building Structure during an Earthquake., Proc. 2nd WCEE, 1960.

【Appendix 1】 定常部 $n(t)$ のパラメータ

$n(t)$ がパワースペクトル $G(\omega)$ を有するように, 各パラメータ; a_j, ω_j および $\delta_j(j=1, \dots, m)$ を決定する。

$n(t)$ の自己相関関数 $R_n(\tau)$ は, 次式で与えられる。

$$R_n(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T n(t) n(t+\tau) dt \dots\dots\dots (A1-1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m a_j^2 \cos(\omega_j \tau) \dots\dots\dots (A1-2)$$

パワースペクトル関数は,

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m a_j^2 \{ \delta(\omega - \omega_j) + \delta(\omega + \omega_j) \}$$

\dots\dots\dots (A1-3)

ゆえに, $\omega \geq 0$ で定義されるパワースペクトル $G(\omega)$ を $G(\omega) = 2S(\omega)$ として,

$$G(\omega) = 2S(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m a_j^2 \delta(\omega - \omega_j) \dots\dots\dots (A1-4)$$

$G(\omega)$ に関する ω の上下限値を ω_u, ω_l とし,

$$d\omega = (\omega_u - \omega_l) / m \dots\dots\dots (A1-5)$$

$$\omega_j = \omega_l + (j-1/2)d\omega \dots\dots\dots (A1-6)$$

とすれば,

$$G(\omega) \cong \sum_{j=1}^m G(\omega_j) d\omega \delta(\omega - \omega_j) \dots\dots\dots (A1-7)$$

とおけるので, 式 (A1-4) および (A1-7) より

$$a_j^2 = 2G(\omega_j) d\omega \dots\dots\dots (A1-8)$$

すなわち, $n(t)$ は要求されるパワースペクトル $G(\omega)$ $\omega \geq 0$ を用いて, 式 (A1-8) より計算した $a_j(j=1, \dots, m)$ を用いて求めることができる。 $\delta_j(j=1, \dots, m)$ は $f(t)$ を最悪入力とするような未知の定数 ($0 \leq \delta_j < 2\pi$) となる。

【Appendix 2】 $I_{kj}(\delta_j, t_{n+1})$ の計算

式 (32) の $I_{kj}(\delta_j, t_{n+1})$ は次のようになる。

$$I_{kj}(\delta_j, t_{n+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin(\omega_j \tau + \delta_j) h(t_{n+1} - \tau) d\tau$$

\dots\dots\dots (32)

$$= \cos \delta_j \times I_{skj}(t_{n+1}) + \sin \delta_j \times I_{ckj}(t_{n+1})$$

\dots\dots\dots (A2-1)

ここで,

$$I_{skj}(t_{n+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin \omega_j \tau \times h(t_{n+1} - \tau) d\tau$$

\dots\dots\dots (A2-2)

$$I_{ckj}(t_{n+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \cos \omega_j \tau \times h(t_{n+1} - \tau) d\tau$$

\dots\dots\dots (A2-3)

さらに,

$$I_{skj}(t_{n+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sin \omega_j \tau \times \frac{e^{-\beta\omega_n(t_{n+1}-\tau)}}{\omega} \cdot \sin\{\bar{\omega}(t_{n+1}-\tau)\} d\tau \dots\dots\dots (A2-2)'$$

$$= \frac{e^{-\beta\omega_n t_{n+1}}}{\omega} \{ \sin \bar{\omega} t_{n+1} \times {}_1I_{skj} - \cos \bar{\omega} t_{n+1} \times {}_2I_{skj} \}$$

\dots\dots\dots (A2-4)

ここで,

$${}_1I_{skj} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\beta\omega_n \tau} \sin \omega_j \tau \cos \bar{\omega} \tau d\tau \dots\dots\dots (A2-5)$$

$${}_2I_{skj} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\beta\omega_n \tau} \sin \omega_j \tau \sin \bar{\omega} \tau d\tau \dots\dots\dots (A2-6)$$

また,

$$I_{ckj}(t_{n+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \cos \omega_j \tau \times \frac{e^{-\beta\omega_n(t_{n+1}-\tau)}}{\omega} \cdot \sin\{\bar{\omega}(t_{n+1}-\tau)\} d\tau \dots\dots\dots (A2-3)'$$

$$= \frac{e^{-\beta\omega_n t_{n+1}}}{\omega} \{ \sin \bar{\omega} t_{n+1} \times {}_1I_{ckj} - \cos \bar{\omega} t_{n+1} \times {}_2I_{ckj} \}$$

\dots\dots\dots (A2-7)

ここで,

$${}_1I_{ckj} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\beta\omega_n \tau} \cos \omega_j \tau \cos \bar{\omega} \tau d\tau \dots\dots\dots (A2-8)$$

$${}_2I_{ckj} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\beta\omega_n \tau} \cos \omega_j \tau \sin \bar{\omega} \tau d\tau \dots\dots\dots (A2-9)$$