

アーチダムの震動解析

SEISMIC ANALYSIS OF ARCH DAMS

—Coupled Vibrations of Dam Body and Reservoir Water—

畑野 正*・中川 友康**

By Tadashi Hatano and Tomoyasu Nakagawa

1. 緒 言

アーチダムの震動解析は、ダムの形態や境界条件、ダムと貯水の連成系としての取扱いなどの複雑さから、これを精度高く行なうことはきわめて困難である。このため従来この種解析には大きな簡略化が前提とされている。著者の一人もかつてアーチダムの動的解析の一方法を提案¹⁾したが、実物アーチダムや模型による振動実験ならびに実物アーチダムの地震による震動観測から、ダムの震動を各次振動モードに分解して振動型をきめ、また実物ダムの振動減衰を求め、貯水の影響は仮想質量としてこれを取扱い、ダム基盤に入る地震加速度のスペクトラムを使用して統計的に組合せるのがその方法論であった。重力ダムについては著者の一人が古く貯水との連成振動の解²⁾を示したことがあり、また近年 Finite Element 法を利用した方法³⁾が発表されているが、いずれも二次元問題であり、アーチダムへの拡張は困難であるばかりでなく、その方法自体にも不備の点がある。

著者らはここにアーチダムと貯水との連成系としての基礎運動方程式から出発して、初期値問題として、アーチダムの震動解析を行なう方法を展開したい。堤体については任意の点におけるダム厚さ、水平曲率を自由に選ぶことができ、基盤との境界の形もまた任意に選ぶことができるようにしたい。振動現象を取扱うにあたっての重要問題の一つである減衰については、その要因のうちの最大のものである堤体材料の内部粘性をもって代表することとし、著者の一人が従来主張してきた粘弾性⁴⁾モデルを運動方程式に適用することとしたい。ダムと貯水との連成系としての取扱いは、著者がすでに指摘した⁵⁾とおり最も正確な方法である波動方程式を出発点とすることとし、かつ池底の音圧反射条件を材質に応じて任意

に選ぶことができるようにしたい。

上述のごとく一般化されたアーチダムの運動方程式と波動方程式を用いて、実際の複雑な境界条件を満足する解を得るため、これら方程式を差分法として Finite Difference 法により数値的に逐次の解を境界条件に合致させながら求めることとしたい。

2. 基礎方程式

(1) アーチダムの基礎方程式

Fig. 1 に示す円柱座標系 $x=r\theta$, y をとり、ダムの

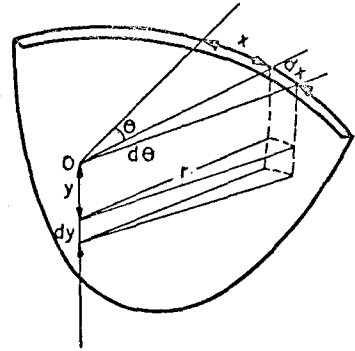


Fig. 1

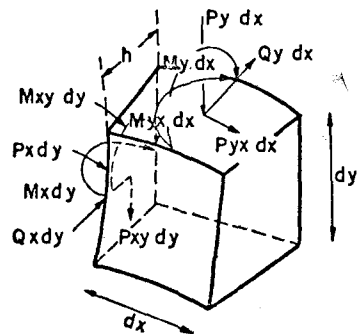


Fig. 2

* 正会員 工博 電力中央研究所技術第一研究所

** 電力中央研究所情報処理研究センター

厚さを $h(x, y)$ とし, 半径方向の相対変位 w と切線方向相対変位 v を考え, Fig. 2 に示す微小体積 $dx \cdot dy \cdot h$ につき運動方程式をたて適当な簡易化を行なって次式を得る。ただしこの場合動荷重によるもののみを考え, 鉛直方向の力および鉛直方向変位は考えないものとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{P_x}{r} &= -P_I + \frac{r_c}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &+ \frac{r_c}{g} h a_w - \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{Q_x}{r} \\ &= \frac{r_c}{g} h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{r_c}{g} h a_v \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x &= -\frac{r_c}{g} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= -\frac{r_c}{g} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.1)$$

ここに P_I : 堤体に対する貯水による動水圧
 a_w, a_v : 半径および切線方向地盤地震加速度
 r_c : 堤体単位体積重量

変位と力・モーメントとの関係を次のごとく表わす。

$$\left. \begin{aligned} P_x &= E_0 h \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{w}{r} \right) \\ M_x &= -N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_y &= -N \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{xy} &= M_{yx} = -N(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{N}{2r} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.2)$$

ここに E_0, μ : 堤体材料の動的弾性係数およびポアソン比

$$N = \frac{E_0 h^3}{12(1-\mu^2)}$$

式(2.2)を式(2.1)に代入し変位によるダムの基礎方程式を導くにあたり, 次のごとくダムの代表長さをを用いて変数変換を行ない, かつ係数の表現を整理する。

$$\left. \begin{aligned} x &= L \cdot \xi, L: \text{アーチダムの代表長さ} \\ y &= L \cdot \eta, \\ h &= H \cdot \beta_h(\xi, \eta), H: \text{アーチダムの代表厚さ} \\ r &= R \cdot r_r(\xi, \eta), R: \text{アーチダムの代表半径} \\ d_c &= \frac{E_0 H^2 g}{12 L^2 r_c} (\text{sec}^{-2}), e = \frac{L}{R}, \\ c_c^2 &= \frac{E_0 g}{r_c L^2} (\text{sec}^{-2}), b = \frac{r_0}{r_c} \frac{1}{H \beta_h} (\text{m}^{-1}), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3)$$

ここに r_0 : 水の単位体積重量。

以上により次の基礎方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{d_0}{\beta_h} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\beta_h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\beta_h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\beta_h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} + c_c^2 \left[\frac{e^2}{r_r^2} w - \frac{e}{r_r} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] &= b \frac{P_I g}{r_0} - a_w \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c_c^2 \frac{1}{\beta_h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\beta_h \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \\ &- c_c^2 \frac{e}{\beta_h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\beta_h}{r_r} w \right) - a_v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.4)$$

堤体材料たるコンクリートについて Fig. 3 のごとき工学モデル⁴⁾をとれば, 応力とひずみとの比 E_0 ⁵⁾は次式のごとく表わすことができる。

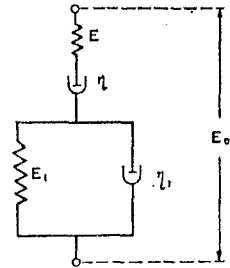


Fig. 3

$$E_0 = E \frac{p^2 + p E_1 / \eta_1}{p^2 + p(E/\eta_1 + E_1/\eta_1 + E/\eta) + E E_1 / \eta \eta_1} \dots\dots\dots(2.5)$$

ここに p : 微分演算子 $\frac{d}{dt}$

$$\left. \begin{aligned} \text{いま, } \alpha_1 + \beta_1 &= E/\eta_1 + E_1/\eta_1 + E/\eta \\ \alpha_1 \beta_1 &= E E_1 / \eta_1 \eta \\ r_1 + \delta_1 &= E/\eta_1 + E/\eta \\ \beta_1 r_1 + \alpha_1 \delta_1 &= E E_1 / \eta_1 \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.6)$$

とおけば,

$$E_0 = E - E \left(\frac{r_1}{p + \alpha_1} + \frac{\delta_1}{p + \beta_1} \right) \dots\dots\dots(2.7)$$

となり, 次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} E_0 w &= \left[E - E \left(\frac{r_1}{p + \alpha_1} + \frac{\delta_1}{p + \beta_1} \right) \right] w \\ &= E \left\{ w - r_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 \tau} w d\tau - \delta_1 e^{-\beta_1 t} \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_0^t e^{\beta_1 \tau} w d\tau \right\} \\ E_0 v &= E \left\{ v - r_1 e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 \tau} v d\tau - \delta_1 e^{-\beta_1 t} \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_0^t e^{\beta_1 \tau} v d\tau \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.8)$$

したがって新しい変数 W, V を

$$\left. \begin{aligned} W &= w - r_1 \int_0^t e^{-\alpha_1(t-\tau)} w d\tau - \delta_1 \int_0^t e^{-\beta_1(t-\tau)} w d\tau \\ V &= v - r_1 \int_0^t e^{-\alpha_1(t-\tau)} v d\tau - \delta_1 \int_0^t e^{-\beta_1(t-\tau)} v d\tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.9)$$

と定義すると, 基礎方程式(2.4)は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mathfrak{R}[W, V] &= \frac{g}{\tau_0} b P_I - a_w \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mathfrak{M}[W, V] - a_v \end{aligned} \right\} \dots (2.10)$$

$$P = \frac{\tau_0}{g} \frac{\partial f}{\partial t} \dots (2.14)$$

基礎方程式を解くに当たって境界条件は次のごとくとする。

i) 池底において

水中圧力波が池底に入射すれば、境界面上における水粒子の速度 v_B と圧力 P_B の間に次式⁵⁾が成立する。

$$P_B = \frac{\tau_0}{g} C_0 \beta_B v_B \dots (2.15)$$

ここに $\beta_B = \frac{\tau_B}{g} C_B \left/ \frac{\tau_0}{g} C_0 \right.$

τ_B, C_B : 池底材料の単位体積重量および同材料中の音速

池底面における貯水池内部方向に向う法線を n_B とすれば式(2.15)は速度ポテンシャル f を用いて次のごとく表わすことができる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} - C_0 \beta_B \frac{\partial f}{\partial n_B} = 0 \dots (2.16)$$

ii) 貯水池自由表面において

貯水池の自由表面においては圧力が0になることから周知の次の条件が得られる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + g \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \dots (2.17)$$

iii) 貯水池の上流部において

貯水池内に生じた圧力波は池内に伝播するが、数値計算上貯水池の長さを適当な有限値に区切ってこの範囲内の計算を行なう必要がある。

このため池内に仮定の鉛直断面をとり、水中圧力波はこの断面で反射せず完全に透過するという境界条件をとるものとする。このことは式(2.16)において β_B を1とおけば満足されるから次のごとく表わすことができる。ただし n_B と y の正の方向は逆である。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C_0 \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \dots (2.18)$$

(3) 連成系の基礎方程式

アーチダムと貯水の連成条件は、ダム壁面におけるこれと垂直な方向 n_I への堤体の変位速度 $\phi(x, y, z, t)$ と、同じ点における貯水水粒子の n_I 方向の速度成分 $-\frac{\partial f}{\partial n_I}$ とが等しいことである。今、アーチダムの上流壁面がほぼ鉛直に近いことを前提とすれば

$$\phi = -\frac{\partial w}{\partial t} - \int a_w dt$$

とおくことができる。また、ダム面上における動水圧 P_I を式(14)をもって表現し直すものとする。

以上によりアーチダムと貯水の連成系の基礎方程式は結局次式のごとく表現される。

ここに

$$\mathfrak{R}[W, V] = \frac{d}{\beta_h} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\beta_h^3 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \left(\beta_h^3 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\beta_h^3 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) \right\} + c^2 \left\{ \frac{e^2}{\tau_r^2} W - \frac{e}{\tau_r} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right\}$$

$$\mathfrak{M}[W, V] = \frac{c^2}{\beta_h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\beta_h \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) - c^2 \frac{e}{\beta_h} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\beta_h}{\tau_r} W \right)$$

$$d = \frac{EH^2g}{12L^4\tau_c}, \quad c^2 = \frac{Eg}{\tau_c L^2}$$

ダムの振動減衰には、上述の堤体材料の内部粘性のほかに基礎地盤、貯水への振動エネルギーの逸散等が考えられるが、前者についてはダム基礎において完全固定の条件をとり、地下逸散の影響は堤体材料の内部粘性の数値を具体的に定めるとき、実物ダムの起振実験による結果を参考にして考慮⁹⁾に入れることとする。貯水池中への逸散については、後述のごとく計算上の貯水池上流端境界において水中圧力波が完全に透過するという条件を用いて満足させることとする。

したがって、ダムにおける境界条件は次のごとくとするものとする。

i) ダムと基盤との接点において

$$\left. \begin{aligned} w=0, v=0 \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (2.11)$$

ここに境界から内部に向う法線を n とする。

ii) ダム上端の自由端において

$$\left. \begin{aligned} M_y = 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial \eta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (2.12)$$

(2) 貯水池における基礎方程式

ダムに対する貯水の動的影響を表現するには、すでに述べたごとく種々の方法があるが、波動方程式を出発点として、これから計算される動水圧を以てし、境界条件としては貯水池底においてその材質に応じて定まる音圧反射条件を満足し、池表面においては自由水面の条件を満足させるようにすることが最も精確である⁵⁾。

したがって速度ポテンシャル f による直角座標における波動方程式を以て基礎方程式とする。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C_0^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) = C_0^2 \Delta f \dots (2.13)$$

ここに $C_0^2 = \frac{gK_0}{\tau_0}$, K_0 : 水の体積弾性率

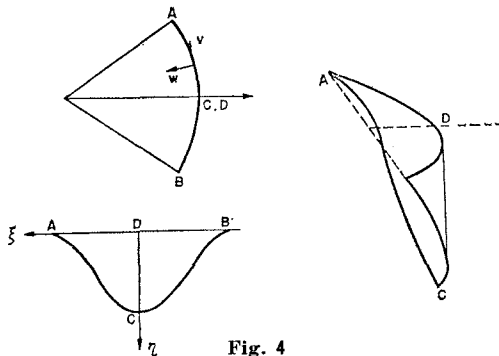
動水圧はまた次式で表現される。

アーチダム：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Re [W, V] &= b \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_I - a_w \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \Re [W, V] - a_v \end{aligned} \right\} \dots(2.19)$$

貯水： $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C_0^2 \Delta f$

連続条件： $\frac{\partial f}{\partial n_I} = \frac{\partial w}{\partial t} + \int a_w dt$



実際の数値計算を行なう場合、 f の代わりに $F = \frac{\partial f}{\partial t}$ を用うれば取扱いが容易となるので、上式ならびに境界条件を以下のごとく書き換える。

アーチダム：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Re [W, V] &= b F_I - a_w \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \Re [W, V] - a_v \end{aligned} \right\} \dots(2.20)$$

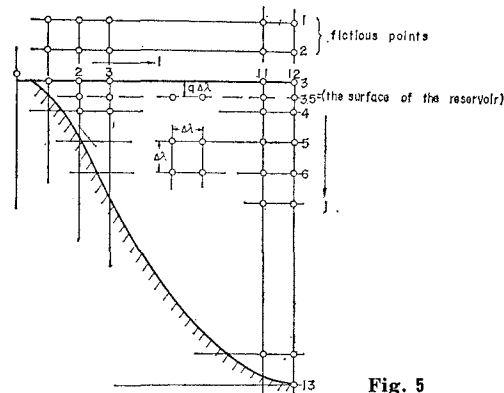
貯水： $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = C_0^2 \Delta F$

連続条件： $\frac{\partial F}{\partial n_I} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a_w$

池底： $\frac{\partial F}{\partial t} - C_0 \beta_B \frac{\partial F}{\partial n_B} = 0$

自由表面： $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + g \frac{\partial F}{\partial z} = 0$

上流部： $\frac{\partial F}{\partial t} + C_0 \frac{\partial F}{\partial y} = 0$



なお貯水池空虚の場合、すなわちアーチダム単体の場合の震動を表現する基礎方程式は式(2.20)の第1式から動水圧の項を省略したものと、同式の第2式で与えられ、境界条件は式(2.11)、(2.12)で与えられる。

3. 差分化

連成系の基礎方程式(2.20)を境界条件式(2.11)、(2.12)および式(2.21)の下で初期値問題として解くための差分近似式を以下に導く。

(1) 格子点の設定

ダムにおける座標を Fig. 4 のごとく定め、ダム面を ξ, η 方向にそれぞれ等間隔 $\Delta l = L \cdot \Delta \lambda$ に分割すれば Fig. 5 に示すダム上の格子点を得る。 $j=1$ および 2 は仮想点を示す。 $j=3.5$ は $j=3$ および 4 の間の任意の高さに湛水面を設定するための格子点とする。

貯水池中に格子点を設定するに当たり、ダムのごく近辺のみでは、ダム上の格子点 i, j 上における F の値を含む差分式を考えるのが便利であるので、Fig. 6 に示すごとくダム面 I および池中の曲面 II, III のみに円柱座標を適用してこの上に格子点を設定し、曲面 III から外側の池中には三次元直角座標により格子点を設定する。曲

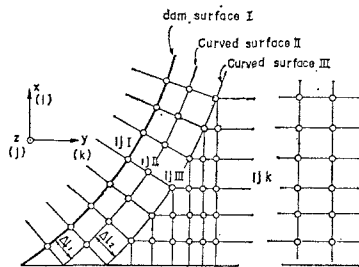


Fig. 6

面 II, III の位置は Fig. 6 に示す $\Delta l_1, \Delta l_2$ により定める。すなわちダム面上の $i=1$ 点からダム面に垂線をたて、貯水池岸までの長さを Δl_1 とし、交点を通るダム面に平行な曲面を曲面 II とする。

また $i=2$ 点を通る垂線の岸までの長さを $\Delta l_1 + \Delta l_2$ とし、垂線と岸との交点を通る曲面を曲面 III とする。曲面 II, III 上の格子点をそれぞれ ij_{II}, ij_{III} とし、ダム面 I 上の格子点の半径方向延長線と、曲面 II, III との交点をとる。曲面 III より上流の水中心点は Fig. 6 のごとく不等間隔の直角座標により各格子点を定める。鉛直 z 方向の分割は $j=3.5$ を湛水面とし、 $j \geq 4$ については Δl の等間隔とする。

(2) w, v, W, V および F の表現

ダム上格子点の変位を次のごとく表わす。

$$\left. \begin{aligned} w_{ij}^n &= w(i \Delta \lambda, j \Delta \lambda, n \Delta t) \\ v_{ij}^n &= v(i \Delta \lambda, j \Delta \lambda, n \Delta t) \\ W_{ij}^n &= W(i \Delta \lambda, j \Delta \lambda, n \Delta t) \\ V_{ij}^n &= V(i \Delta \lambda, j \Delta \lambda, n \Delta t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

記法の便宜上次のベクトル表示を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}^n &= (w_{ij}^n), \vec{v}^n = (v_{ij}^n) \\ \vec{W}^n &= (W_{ij}^n), \vec{V}^n = (V_{ij}^n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.2)$$

湛水面を $j=3.5$ としているので $j=3$ と $j \geq 4$ の格子点では運動方程式が異なるゆえ式 (3.2) をさらに次のごとく表現する。ただし v, V には区別の必要がない。

$$\left. \begin{aligned} \vec{w}^n &= (\vec{w}_3^n, \vec{w}_4^n) \\ \vec{W}^n &= (\vec{W}_3^n, \vec{W}_4^n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.3)$$

ここに \vec{w}_3^n は w_{is}^n を要素とするベクトルを表わし \vec{w}_4^n は $w_{ij}^n, j \geq 4$ を要素とするベクトルを表わす。 \vec{W}_3^n, \vec{W}_4^n も同様である。

貯水における F を次のごとく表現する。

$$\left. \begin{aligned} F_{ijI} &= F(i \Delta x, j \Delta z, n \Delta t). \text{ダム面 I 上} \\ F_{ijII} &= F(i \Delta x, j \Delta z, n \Delta t). \text{曲面 II 上} \\ F_{ijIII} &= F(i \Delta x, j \Delta z, n \Delta t). \text{曲面 III 上} \\ F_{ijk} &= F(i \Delta x, j \Delta z, k \Delta y, n \Delta t). \text{貯水池中} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.4)$$

$j \geq 4$ においてベクトル表示を導入して次のごとく表わす。

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_I^n &= (F_{ijI}^n) \\ \vec{F}_{II}^n &= (F_{ijII}^n) \\ \vec{F}_{III}^n &= (F_{ijIII}^n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.5)$$

(3) 半径方向変位に関する差分式

連成系の基礎方程式(2.20)の第1式第4式から、 $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ を消去し、かつ式(3.6)の近似を用いれば、式(3.7)が得られる。

$$\frac{\partial F}{\partial n_I} = \frac{1}{\Delta l_1} (F_{II} - F_I) \dots\dots\dots(3.6)$$

$$(1 + \Delta l_1 b) F_I = F_{II} + \Delta l_1 \mathcal{E} [W, V] \dots\dots\dots(3.7)$$

$\mathcal{E} [W, V]$ を Fig. 7 の格子点の上で次のごとく近似する。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_d [W, V]_{i,j} &= \frac{d}{\beta_{hi,j} (\Delta \lambda)^4} \left[\left\{ \alpha_{i+1,j} + \alpha_{i-1,j} + \alpha_{i,j+1} \right. \right. \\ &+ \alpha_{i,j-1} + 8 \alpha_{i,j} + \frac{1}{8} (\alpha_{i+1,j+1} + \alpha_{i-1,j-1} + \alpha_{i+1,j-1} \\ &+ \alpha_{i-1,j+1}) \left. \right\} W_{i,j} + \{-2(\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i,j})\} W_{i+1,j} \\ &+ \{-2(\alpha_{i,j} + \alpha_{i-1,j})\} W_{i-1,j} \\ &+ \left\{ \alpha_{i+1,j} - \frac{1}{8} (\alpha_{i+1,j+1} + \alpha_{i+1,j-1}) \right\} W_{i+2,j} \end{aligned}$$

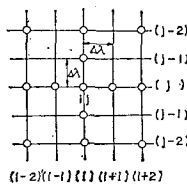


Fig. 7

$$\begin{aligned} &+ \left\{ \alpha_{i-1,j} - \frac{1}{8} (\alpha_{i-1,j-1} + \alpha_{i-1,j+1}) \right\} W_{i-2,j} \\ &+ \{-2(\alpha_{i,j+1} + \alpha_{i,j})\} W_{i,j+1} + \{-2(\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j-1})\} \\ &\cdot W_{i,j-1} + \left\{ \alpha_{i,j+1} - \frac{1}{8} (\alpha_{i+1,j+1} + \alpha_{i-1,j+1}) \right\} W_{i,j+2} \\ &+ \left\{ \alpha_{i,j-1} - \frac{1}{8} (\alpha_{i-1,j-1} + \alpha_{i+1,j-1}) \right\} W_{i,j-2} \\ &+ \frac{1}{8} \{ \alpha_{i+1,j+1} W_{i+2,j+2} + \alpha_{i-1,j-1} W_{i-2,j-2} \\ &+ \alpha_{i+1,j-1} W_{i+2,j-2} + \alpha_{i-1,j+1} W_{i-2,j+2} \} \\ &+ c^2 \left[-\frac{e}{2 r_{ri,j} \Delta \lambda} (V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) + \frac{e^2}{r_{ri,j}^2} W_{i,j} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(3.8)$$

ここに、 $\alpha_{i,j} = \beta_{hi,j}^3$ とする。

簡単のためこれを次のごとくベクトル表示する。

$$\mathcal{E}_d [\vec{W}, \vec{V}] = \left[\frac{d}{(\Delta \lambda)^4} A_{W1} + c^2 e^2 A_{W2} \right] \vec{W} - \frac{c^2 e}{2 \Delta \lambda} A_V \vec{V} \dots\dots\dots(3.9)$$

A_{W1}, A_{W2}, A_V : $\mathcal{E}_d [W, V]$ に対応する係数行列。
式(3.7)に式(3.9)を代入し、 (i, j) 点上の F_I, F_{II} の値として次式を得る。

$$\vec{F}_I = (I + \Delta l_1 B)^{-1} [\vec{F}_{II} + \Delta l_1 \mathcal{E}_d [\vec{W}, \vec{V}]]_4 \dots\dots(3.10)$$

B : $j \geq 4$ において $b_{ij} = \frac{r_0}{r_c H \beta_{hi,j}}$ を対角要素にもつ対角行列、 I : 単位行列

$[\mathcal{E}_d [\vec{W}, \vec{V}]]_4$: $\mathcal{E}_d [\vec{W}, \vec{V}]$ の要素のうち $j \geq 4$ のもののみをとり出した部分ベクトル

以上から、 $j \geq 4$ の格子点につき式(2.20)の第1式から次のごとき w の差分式が得られる。

$$\begin{aligned} \vec{w}_4^{n+1} - 2 \vec{w}_4^n + \vec{w}_4^{n-1} + \Delta t^2 (I + \Delta l_1 B)^{-1} [\mathcal{E}_d [\vec{W}^n, \vec{V}^n]]_4 \\ = \Delta t^2 B (I + \Delta l_1 B)^{-1} \vec{F}_{II}^n - \Delta t^2 [\vec{Y}_w]_4 \dots(w-1) \end{aligned}$$

$[\vec{Y}_w]_4$: i により定まる a_{wi} を要素とするベクトル。

次に式(2.9)を差分表示する。なお数値計算の項で述べるように実際の堤体材料では式(2.6)の η の値が E_1, η_1, E の値に比し著しく大きいことから β_1 および δ_1 をともに0にみなして計算するものとする。したがって式(2.9)は次のようになる。

$$W_{i,j}^{n+1} = w_{i,j}^{n+1} - \tau_1 \int_0^{(n+1)\Delta t} e^{-\alpha_1((n+1)\Delta t - \tau)} w d\tau$$

今 $\bar{w}_{i,j}^n = \int_0^{n\Delta t} e^{-\alpha_1(n\Delta t - \tau)} w d\tau$ とすると

$$\begin{aligned} \bar{w}_{i,j}^{n+1} &= \int_0^{n\Delta t} e^{-\alpha_1((n+1)\Delta t - \tau)} w d\tau \\ &+ \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} e^{-\alpha_1((n+1)\Delta t - \tau)} w d\tau \\ &= e^{-\alpha_1 \Delta t} \bar{w}_{i,j}^n + \frac{1}{\alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 \Delta t}) w_{i,j}^{n+1} \\ &= K_1 \bar{w}_{i,j}^n + K_2 w_{i,j}^{n+1} \end{aligned}$$

したがって次式を得る。

$$W_{i,j}^{n+1} = (1 - \tau_1 K_2) w_{i,j}^{n+1} - \tau_1 K_1 \bar{w}_{i,j}^n \dots (W-1)$$

ここに $K_1 = e^{-\alpha_1 \Delta t}$, $K_2 = \frac{1}{\alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 \Delta t})$, $j \geq 4$

ダムの頂部すなわち $j=3$ 点における差分式を求める。式 (w-1) から動水圧の項を去除くと次式が得られる。

$$\begin{aligned} \vec{w}_3^{n+1} - 2w_3^n + w_3^{n-1} + \Delta t^2 [\vec{\mathcal{E}}_d [\vec{W}^n, \vec{V}^n]]_3 \\ = -\Delta t^2 [\vec{Y}_w]_3 \dots \dots \dots (w-2) \end{aligned}$$

頂部における W については式 (W-1) から次式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{w}_{i3}^{n+1} = K_1 \bar{w}_{i3}^n + K_2 w_{i3}^{n+1} \\ W_{i3}^{n+1} = (1 - \tau_1 K_2) w_{i3}^{n+1} - \tau_1 K_1 \bar{w}_{i3}^n \dots (W-2) \end{aligned}$$

次にダムと基盤との境界付近の変位の表現を求め。前述のごとく境界面において完全固定を条件とするから、この点の変位および境界線に垂直方向の変位の微分を0とする。Fig. 8

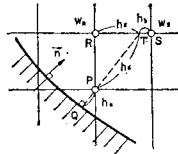


Fig. 8

において P 点の変位を Q 点における固定条件を満足した上で R, S の二点の変位の大きさと表わすことを考える。 P を通る境界線への垂直線 PQ と格子線との交点を T とし、 P, T における変位を Q を中心とした変位の Taylor 展開により表わし次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} w_P &= w_Q + h_c w_Q' + \frac{h_c^2}{2} w_Q'' + \dots \\ w_T &= w_Q + (h_c + h_d) w_Q' + \frac{(h_c + h_d)^2}{2} w_Q'' + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.11)$$

w_P を w_R, w_S からの線形補間により表わせば、結局次の関係を得る。

$$w_P = \left(\frac{h_c}{h_c + h_d} \right)^2 w_T = \left(\frac{h_c}{h_c + h_d} \right)^2 \left(\frac{h_b}{\Delta \lambda} w_R + \frac{h_a}{\Delta \lambda} w_S \right) \dots \dots \dots (w-3)$$

$$W_P = \left(\frac{h_c}{h_c + h_d} \right)^2 \left(\frac{h_b}{\Delta \lambda} W_R + \frac{h_a}{\Delta \lambda} W_S \right) \dots (W-3)$$

境界条件式 (2.12) は仮想点 $j=1, 2$ およびダム上の点 $j=3, 4$ の変位を使って次のごとく表わせる。

$$\left. \begin{aligned} w_{i,2} &= 2w_{i,3} - w_{i,4} \\ w_{i,1} &= 3w_{i,2} - 3w_{i,3} + w_{i,4} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (w-4)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{i,2} &= 2W_{i,3} - W_{i,4} \\ W_{i,1} &= 3W_{i,2} - 3W_{i,3} + W_{i,4} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (W-4)$$

次に後の計算に必要な基盤内の

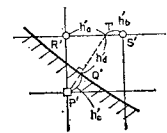


Fig. 9 Fig. 9 に示す仮想点 P' に関する表現を上と同様の方法で求めておく。

$$w_{P'} = \left(\frac{h_c'}{h_d'} \right)^2 \left(\frac{h_b}{\Delta \lambda} w_{R'} + \frac{h_a'}{\Delta \lambda} w_{S'} \right) \dots (w-5)$$

$$W_{P'} = \left(\frac{h_c'}{h_d'} \right)^2 \left(\frac{h_b'}{\Delta \lambda} W_{R'} + \frac{h_a'}{\Delta \lambda} W_{S'} \right) \dots (W-5)$$

(4) 切線方向変位に関する差分式

連成系の基礎方程式 (2.20) の第2式を差分化する。格子点 i, j 上の $\mathfrak{M}[W, V]$ を次の式を用いて近似させるものとする。

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_d[W_{ij}, V_{ij}] = c^2 \left\{ \frac{1}{(\Delta \lambda)^2} (V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}) \right. \\ \left. + \frac{1}{4(\Delta \lambda)^2} \frac{\beta_{h,i+1,j} - \beta_{h,i-1,j}}{\beta_{h,i,j}} (V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) \right\} \\ - c^2 e \left\{ \frac{1}{2\Delta \lambda} \frac{1}{\beta_{h,i,j}} \left(\frac{\beta_{h,i+1,j}}{\tau_{r,i+1,j}} - \frac{\beta_{h,i-1,j}}{\tau_{r,i-1,j}} \right) W_{i,j} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\Delta \lambda} \frac{1}{\tau_{r,ij}} (W_{i+1,j} - W_{i-1,j}) \right\} \dots \dots \dots (3.12) \end{aligned}$$

ベクトル表示により次のごとく表現する。

$$\mathfrak{M}_d[\vec{W}, \vec{V}] = \frac{c^2}{(\Delta \lambda)^2} B_V \vec{V} - \frac{c^2 e}{2\Delta \lambda} B_W \vec{W} \dots (3.13)$$

B_V, B_W : 式 (3.12) に対する係数行列

以上から式 (2.20) の第2式は次式のごとくなる。

$$\begin{aligned} \vec{v}^{n+1} = 2\vec{v}^n - \vec{v}^{n-1} + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta \lambda)^2} B_V \vec{v}^n - \frac{c^2 e(\Delta t)^2}{2\Delta \lambda} B_W \vec{w}^n \\ - (\Delta t)^2 \vec{Y}_v \dots \dots \dots (v-1) \end{aligned}$$

\vec{Y}_v : ダム上の i により定まる a_{vi} を要素とするベクトル

式 (2.9) の差分表示は半径方向変位の場合と同様に次のごとくなる。

$$\begin{aligned} \bar{v}_{i,j}^{n+1} = K_1 \bar{v}_{i,j}^n + K_2 v_{i,j}^{n+1} \\ V_{i,j}^{n+1} = (1 - \tau_1 K_2) v_{i,j}^{n+1} - \tau_1 K_1 \bar{v}_{i,j}^n \dots (V-1) \end{aligned}$$

ダムと基盤との境界付近の変位の表現を境界点における固定の条件を使って求める。すなわち Fig. 10 において P 点の変位 v_P を Q, R, S

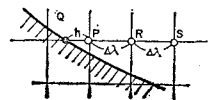


Fig. 10

三点の変位から補間により内挿して定め、このとき Q 点の変位を0とする。これから次式を得る。

$$v_P = \frac{2h}{\Delta \lambda + h} v_R - \frac{h}{2\Delta \lambda + h} v_S \dots \dots \dots (v-2)$$

$$V_P = \frac{2h}{\Delta \lambda + h} V_R - \frac{h}{2\Delta \lambda + h} V_S \dots \dots \dots (V-2)$$

(5) 貯水における F に関する差分式

連成系の基礎方程式 (2.20) の第3式の差分式を以下のごとく導く。

第3式の左辺を次の式で近似する。

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)^n = \frac{1}{\Delta t^2} (F^{n+1} - 2F^n + F^{n-1}) \dots \dots (F-1)$$

第3式の右辺については以下のごとく区分して表現する。

曲面Ⅱ上の ΔF は円柱座標を使用するから、次式を差分化する必要がある。

$$\Delta F = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Fig. 11 に示す格子点について次の差分式を得る。

$$\begin{aligned}
 (\Delta F)_{i,j,II}^n = & \frac{1}{r_0} \left\{ \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2(\Delta l_1 + \Delta l_2)} F_{i,j,III}^n - \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{\Delta l_1 \Delta l_2} F_{i,j,II}^n - \frac{\Delta l_2}{\Delta l_1(\Delta l_1 + \Delta l_2)} F_{i,j,I}^n \right\} \\
 & + \left\{ \frac{2}{\Delta l_2(\Delta l_1 + \Delta l_2)} F_{i,j,III}^n - \frac{2}{\Delta l_1 \Delta l_2} F_{i,j,II}^n + \frac{2}{\Delta l_1(\Delta l_1 + \Delta l_2)} F_{i,j,I}^n \right\} + \frac{1}{r_0^2 (\Delta \theta)^2} \\
 & \cdot \left\{ F_{i+1,j,II}^n - 2 F_{i,j,II}^n + F_{i-1,j,II}^n \right\} + \frac{2}{\Delta z_2(\Delta z_1 + \Delta z_2)} F_{i,j+1,II}^n - \frac{2}{\Delta z_1 \Delta z_2} F_{i,j,II}^n + \frac{2}{\Delta z_1(\Delta z_1 + \Delta z_2)} F_{i,j-1,II}^n \\
 & \dots \dots \dots (F-1 a)
 \end{aligned}$$

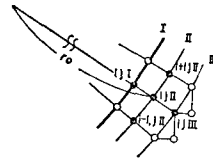


Fig. 11

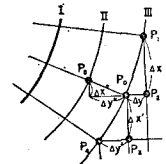


Fig. 12

$\Delta z_1, \Delta z_2$: それぞれ $j-1, j$ 間および $j, j+1$ 間の差分幅

曲面Ⅲ上の ΔF を Fig. 12 の P_0 点すなわち格子点 ij Ⅲ について求めるにあたり、まず水平面上についてまわりの5点 P_h ($h=1, \dots, 5$) を使って

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \approx \sum_{h=0}^5 A_h F_h$$

と近似する。ここに係数 A_h を以下のごとく求める。すなわち F_h を F_0 を中心に Taylor 展開して二階の微分項までとり次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 F_1 &= F_0 + \Delta x F_x + \Delta y F_y + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 F_{xx} + \Delta x \cdot \Delta y \cdot F_{xy} + \frac{1}{2} (\Delta y)^2 F_{yy} \\
 F_2 &= F_0 + \Delta y F_y + \frac{1}{2} (\Delta y)^2 F_{yy} \\
 F_3 &= F_0 - \Delta x' F_x + \frac{1}{2} (\Delta x')^2 F_{xx} \\
 F_4 &= F_0 - \Delta x' F_x - \Delta y' F_y + \frac{1}{2} (\Delta x')^2 F_{xx} + \Delta x' \Delta y' F_{xy} + \frac{1}{2} (\Delta y')^2 F_{yy} \\
 F_5 &= F_0 + \Delta x'' F_x - \Delta y'' F_y + \frac{1}{2} (\Delta x'')^2 F_{xx} - \Delta x'' \Delta y'' F_{xy} + \frac{1}{2} (\Delta y'')^2 F_{yy}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.14)$$

$F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}$ を未知数として次の解を得る。

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_{xx} \\ F_{xy} \\ F_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y & \frac{1}{2} (\Delta x)^2 & \Delta x \Delta y & \frac{1}{2} (\Delta y)^2 \\ 0 & \Delta y & 0 & 0 & \frac{1}{2} (\Delta y)^2 \\ -\Delta x' & 0 & \frac{1}{2} (\Delta x')^2 & 0 & 0 \\ -\Delta x' & -\Delta y' & \frac{1}{2} (\Delta x')^2 & \Delta x' \Delta y' & \frac{1}{2} (\Delta y')^2 \\ \Delta x'' & -\Delta y'' & \frac{1}{2} (\Delta x'')^2 & -\Delta x'' \Delta y'' & \frac{1}{2} (\Delta y'')^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_1 - F_0 \\ F_2 - F_0 \\ F_3 - F_0 \\ F_4 - F_0 \\ F_5 - F_0 \end{pmatrix} = [q_{ih}] \begin{pmatrix} F_1 - F_0 \\ F_2 - F_0 \\ F_3 - F_0 \\ F_4 - F_0 \\ F_5 - F_0 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (3.15)$$

以上から次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 F_{xx} + F_{yy} &= \sum_{h=1}^5 (q_{3h} + q_{5h}) F_h - \sum_{h=1}^5 (q_{3h} + q_{5h}) F_0 \\
 A_0 &= - \sum_{h=1}^5 A_h
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.16)$$

ゆえに係数 A_h は式(3.16)で求められることになる。

曲面Ⅲ' 上の ΔF は結局次のごとく表わされる。

$$\begin{aligned}
 (\Delta F)_{i,j,III}^n = & \sum_{h=0}^5 A_h F_h^n + \frac{2}{\Delta z_2(\Delta z_1 + \Delta z_2)} F_{i,j+1,III}^n - \frac{2}{\Delta z_1 \Delta z_2} F_{i,j,III}^n \\
 & + \frac{2}{\Delta z_1(\Delta z_1 + \Delta z_2)} F_{i,j-1,III}^n \dots \dots \dots (F-1 b)
 \end{aligned}$$

曲面Ⅲより上流側における ΔF は不等間隔の直角座標 Fig. 13 を用いて次のごとく表わす。

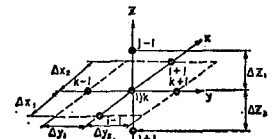


Fig. 13

$$\begin{aligned}
 (\Delta F)_{ijk}^n = & \left(\frac{2}{\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)} F_{i+1,j,k}^n - \frac{2}{\Delta x_1 \Delta x_2} F_{i,j,k}^n + \frac{2}{\Delta x_1(\Delta x_1 + \Delta x_2)} F_{i-1,j,k}^n \right) \\
 & + \left(\frac{2}{\Delta y_2(\Delta y_1 + \Delta y_2)} F_{i,j,k+1}^n - \frac{2}{\Delta y_1 \Delta y_2} F_{i,j,k}^n + \frac{2}{\Delta y_1(\Delta y_1 + \Delta y_2)} F_{i,j,k-1}^n \right) \\
 & + \left(\frac{2}{\Delta z_2(\Delta z_1 + \Delta z_2)} F_{i,j+1,k}^n - \frac{2}{\Delta z_1 \Delta z_2} F_{i,j,k}^n + \frac{2}{\Delta z_1(\Delta z_1 + \Delta z_2)} F_{i,j-1,k}^n \right) \dots\dots\dots (F-1 c)
 \end{aligned}$$

次にダム面 I 上の F については、すでに得られた式 (3.10) をそのまま用いることができる。

$$\vec{F}_I^n = (I + \Delta L_1 B)^{-1} \left\{ \vec{F}_I^{n-1} + \Delta L_1 [\vec{g}_d[\vec{W}^n, \vec{V}^n]]_d \right\} \dots\dots\dots (F-2)$$

式 (F-2) は基盤付近のダム上の点における F の値の算定には使えないので式 (2.20) の第 4 式を差分化した次式から求めるものとする。

$$\begin{aligned}
 F_{i,j,1}^{n+1} = & F_{i,j,1}^n - \Delta L_1 \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} (w_{i,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^n + w_{i,j}^{n-1}) \right. \\
 & \left. + [\dot{Y}_w]_i \right\} \dots\dots\dots (F-3)
 \end{aligned}$$

自由表面の条件式 (2.21) の第 2 式は次のごとく差分化できる。

$$F_{i,3.5,k}^{n+1} = 2 F_{i,3.5,k}^n - F_{i,3.5,k}^{n-1} - \frac{(\Delta t)^2 g}{\Delta z} (F_{i,3.5,k}^n - F_{i,4,k}^n) \dots\dots\dots (F-4)$$

池底における境界条件式 (2.21) の第 1 式は、池底付近において式 (F-1 a), (F-1 b), (F-1 c) を適用するに必要な Fig. 14 に示す境界外の仮想点 T における F の値を決定するときの条件として導入するものとする。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial n_B} = & \frac{1}{h_a + h_b} (F_P - F_T) = \frac{1}{C_0 \beta_B} \frac{\partial F_S}{\partial t} \\
 = & \frac{1}{C_0 \beta_B} \left(\frac{h_b}{h_a + h_b} \frac{\partial F_P}{\partial t} + \frac{h_a}{h_a + h_b} \frac{\partial F_T}{\partial t} \right) \dots\dots\dots (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\text{今 } \tau_P = \frac{h_b}{C_0} \equiv k_P \Delta t, \tau_T = \frac{h_a}{C_0} \equiv k_T \Delta t \dots\dots (3.18)$$

とすれば式 (3.17) は次のごとくなる。

$$\begin{aligned}
 F_P^n - F_T^n = & \frac{1}{\beta_B} (F_P^n - F_P^{n-k_P}) \\
 & + \frac{1}{\beta_B} (F_T^n - F_T^{n-k_T}) \dots\dots\dots (3.19)
 \end{aligned}$$

以上から池底の境界条件を満足した差分式として次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 F_P^{n+1} = & \frac{h_b'}{h_a' + h_b'} F_Q^{n+1} + \frac{h_a'}{h_a' + h_b'} F_R^{n+1} \\
 F_T^{n+1} = & \left(1 + \frac{1}{\beta_B} \right)^{-1} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\beta_B} \right) F_P^{n+1} + \frac{1}{\beta_B} F_P^{n+1-k_P} \right\}
 \end{aligned}$$

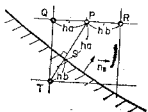


Fig. 14

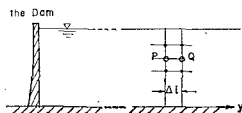


Fig. 15

$$\left. + \frac{1}{\beta_B} F_T^{n+1-k_T} \right] \dots\dots\dots (F-5)$$

Fig. 14 における S 点が格子上の点であり基盤中の仮想点 T との距離が ΔL かつ P が R に一致したときは上式は簡単になる。すなわち

$$\tau = \frac{\Delta L}{C_0} = k \Delta t \dots\dots\dots (3.20)$$

とすれば式 (2.21) の第 1 式から次の関係が得られる。

$$F_T^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{\beta_B} \right) F_S^{n+1} + \frac{1}{\beta_B} F_S^{n+1-k} \dots\dots (F-5')$$

最後に式 (2.21) の第 3 式を差分化する。Fig. 15 において池中の沿直な仮想境界面上の P 点と y 方向に ΔL 離れた Q 点を考えれば式 (F-5') における β_B をとけばよいから結局次式を得る。

$$F_Q^{n+1} = F_P^{n+1-k} \dots\dots\dots (F-6)$$

$$\text{ここに } k = \frac{\Delta L}{C_0 \Delta t}$$

(6) 貯水池空虚時ダム単体の振動差分式

貯水がない場合の差分式は式 (w-1) において動水圧に関する項を取り去ったもの (w-1 emp.) と (W-1), (w-3), (W-3), (w-4), (W-4), (w-5), (W-5) および (v-1), (V-1), (v-2), (V-2) で与えられる。

(w-1 emp.) は次のごとくである。

$$\vec{w}^{n+1} - 2\vec{w}^n + \vec{w}^{n-1} + \Delta t^2 \vec{g}_d[\vec{W}^n, \vec{V}^n] = -\Delta t^2 \vec{Y}_w \dots\dots\dots (w-1 \text{ emp.})$$

(7) 差分式系の安定条件

以上導いてきた差分式系を用いて数値計算を行なうに当たり、時間きざみ Δt をいかに選べば安定の解が得られるかを厳密に検討することは困難であるが、物理的な意味を考慮して簡略化したモデルにつき考察した結果、近似的に次の二条件を得た。

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta t \leq & \frac{\Delta x}{C_0} \\
 \Delta t \leq & \min \left\{ \frac{2}{\sqrt{\frac{32 d(\bar{\beta})^2}{(\Delta L)^4} + c^2 e^2 \left(\frac{1}{\bar{\beta}} \right)^2}}, \frac{\Delta L}{C \sqrt{1 + \frac{1}{8} \bar{\beta}}} \right\} \dots\dots\dots (3.20)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここに } (\bar{\beta})^2 = & \max_{(ij)} \max \{ \beta_{h,i,j}^2, \beta_{h,i+1,j}^2 / \beta_{h,i,j}^2, \\
 & \beta_{h,i-1,j}^2 / \beta_{h,i,j}^2, \beta_{h,i,j+1}^2 / \beta_{h,i,j}^2, \\
 & \beta_{h,i,j-1}^2 / \beta_{h,i,j}^2, \beta_{h,i+1,j+1}^2 / \beta_{h,i,j}^2, \\
 & \beta_{h,i-1,j+1}^2 / \beta_{h,i,j}^2, \beta_{h,i,j+1}^2 / \beta_{h,i,j}^2 \}
 \end{aligned}$$

$$\beta_{h,i-1,j-1} / \beta_{h,i,j}$$

4x: 最小 mesh 間隔

$$\bar{r} = \min_{(i,j)} \{r_{rij}\}, \quad \bar{\beta} = \max_{(i,j)} \left| \frac{\beta_{h,i+1,j} - \beta_{h,i-1,j}}{\beta_{h,i,j}} \right|$$

4. 計算例

Fig. 16 に示す高さ 100 m のアーチダムにつき計算を行なって見る。物性値として次の値を採る。

$$\gamma_c = 2.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \gamma_0 = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$C_0 = 1400 \text{ m/sec}$$

$$E = 3.2 \times 10^9 \text{ kg/m}^2, \quad E_1 = 1.25 \times 10^{10} \text{ kg/m}^2,$$

$$\eta_1 = 6.5 \times 10^8 \text{ kg-sec/m}^2, \quad \eta = 3 \times 10^{13} \text{ kg-sec/m}^2$$

上にあげた粘弾性定数は、著者がかつてコンクリート供試体につき実際に求めた値⁷⁾で、相当大きな応力下の数値であるため、この値をそのまま使用すれば実物ダムにおいて観測された振動減衰⁴⁾すなわち振動エネルギーの地下逸散を含めた相当大きな減衰を示すことになる。

池底の音圧反射条件を示す β_B の値を 5 と 1 の二者を選んで見る。5 は池底材料が岩盤の場合、1 は池底に土の微粒子が堆積して音圧をほとんど吸収⁵⁾すると思えら

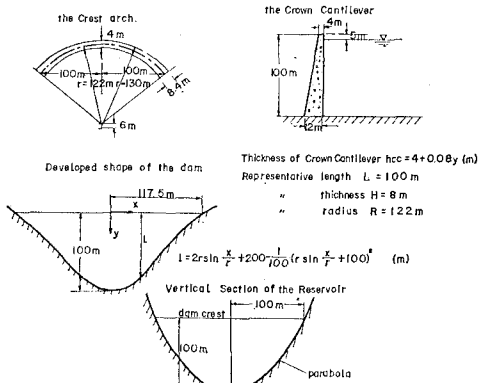


Fig. 16

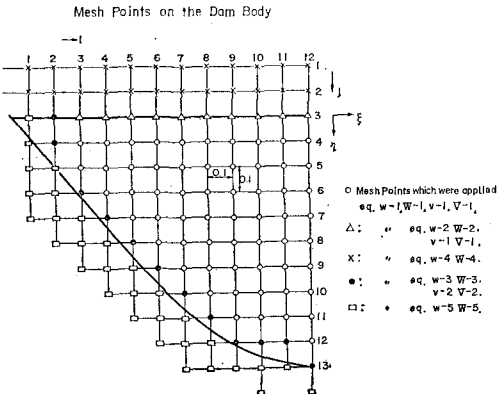


Fig. 17

れる場合を想定している。地盤地震加速度として本例では次のごとき正弦波を考える。自然地震波 $e(t)$ をとるときは、 $ag \sin \frac{2\pi}{T}t$ を $e(t)$ におきかえればよい。

$$a_w = ag \cos \theta \sin \frac{2\pi}{T}t, \quad a_v = ag \sin \theta \sin \frac{2\pi}{T}t$$

ダム上の格子点は Fig. 17 のごとく選ぶ。

本例では左右対称のダムであり、対称としたの外力もで、堤体の半分のみを計算することとし、かつ基盤に近

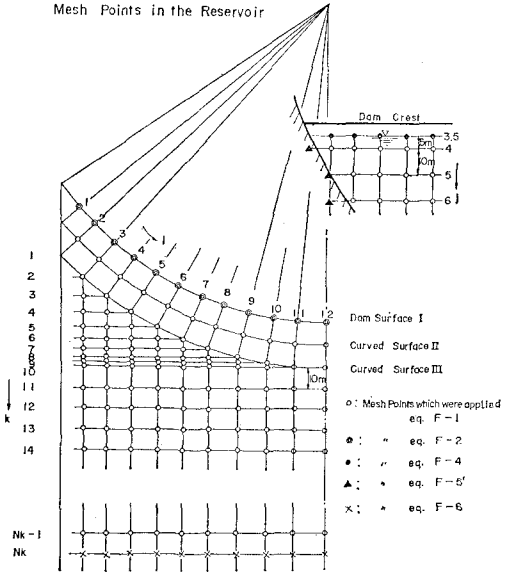


Fig. 18

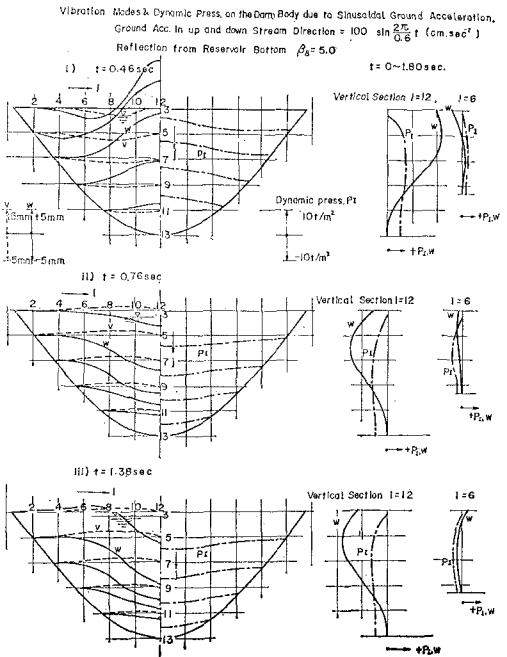


Fig. 19.1

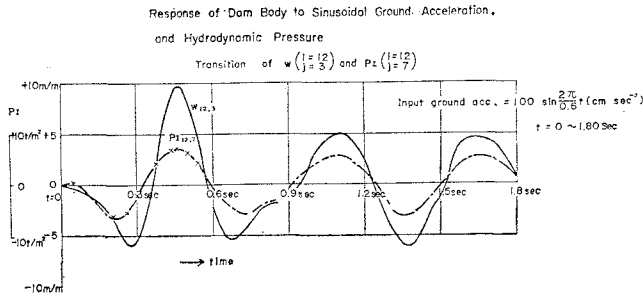


Fig. 19.2

て 100 m まで計算することとした。

地盤地震加速度の最大値を 100 gal とし、振動週期 0.6 sec および 0.2 sec のおのにつき静止の状態からそれぞれ 3 波の単弦加速度波を与えた結果 Fig. 19 および Fig. 20 の振動型および堤体上動水圧の分布を得た。安定解を得るための Δt の値は式 (3.20) により 0.001 sec を採用した。本例題は IBM 370-165 を使用して計算したのであるが、使用語数約 100 k 語 $\Delta t=0.001$ sec

を 0.18 sec で計算している。

地盤加速度週期 0.6 sec の場合は基本振動型と考えられる mode があらわれており模型実験¹⁾ や実物ダムの震動観測結果とよい一致を示している。

地盤加速度週期 0.2 sec の場合は前者と異なり高次の振動型を明りょうに示している。

いずれの場合もダム上動水圧の大きさならびに分布はその振動型に応じて適確に与えられている。

Vibration Modes & Dynamic Press. on the Dam Body due to Sinusoidal Ground Acceleration, Ground Acc. in up and down Stream Direction = $100 \sin \frac{2\pi}{0.2} t$ (cm sec⁻²) Reflection from Reservoir Bottom, $\beta_b = 1.0$ $t = 0 \sim 0.60$ sec

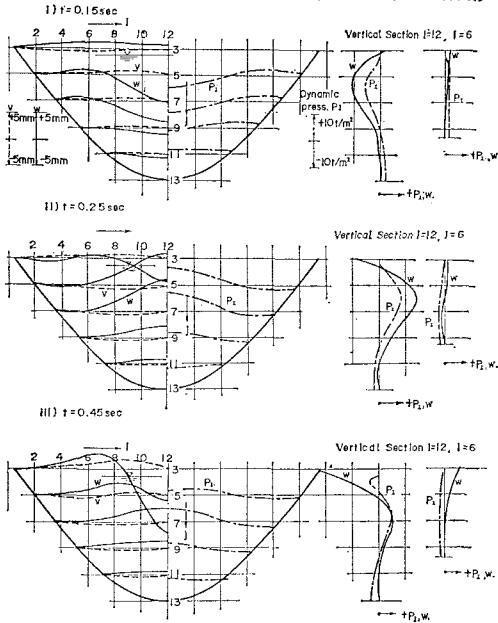


Fig. 20.1

5. 結 言

以上述べたところに従い、任意形状をもつアーチダムおよび貯水池につき、材質に応じた振動減衰および池底の音圧反射条件の下にきわめて精度高く震動解析を行なう道が開けた。

従来の模型実験などによる振動型の設定、起振実験による振動減衰の推定など多大の労力を要したアーチダムの耐震設計に比し、ここに展開した解析法を用いることにより著しく精度の高いかつ合理的な耐震設計を容易に行なうことができると考える。

参 考 文 献

- 1) 畑野・高橋：Stability of Arch Dam against Earthquakes, 5th Congress on Large Dams, 1955.
- 畑野：Aseismic Design Criteria for Arch Dams, 9th Congress on Large Dams, 1967.
- 2) 畑野：重力堰堤に作用する地震力の影響 (その 3), 土木学会論文集, 5 号, 1950.
- 3) Chopra, et al.: Earthquake Analysis of Reservoir-Dam Systems, 4th World Conference on Earthquake Engineering, 1969.
- 4) 畑野：粘弾性体の振動, 土木学会論文集 110, 1964.
- 5) 畑野：水の弾性による地震時動水圧の共振に関する吟味, 土木学会論文集, 129 号, 1966.
- 6) 畑野・渡辺：アースダムの震動解析, 土木学会論文集, 164 号, 1969.
- 7) 畑野：周期的圧縮荷重によるコンクリートの挙動, 土木学会論文集, 84 号, 1962.

(1972.6.16・受付)

い点の格子点も式 (F-5') を用いるよう図のように選ぶこととした。

貯水池における格子点は Fig. 18 のごとくとした。ダムと同様左右対称とし、貯水池の長さも $N_b=20$ とし

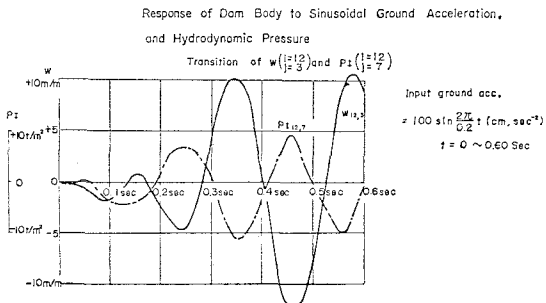


Fig. 20.2