

長大つり橋主塔橋脚の振動特性と 地震応答解析に関する諸考察

SOME STUDIES ON THE VIBRATION AND EARTHQUAKE RESPONSE ANALYSIS
OF THE TOWER-PIER SYSTEM OF LONGSPAN-SUSPENSION BRIDGE

山田 善一*・後藤 洋三**
By Yoshikazu Yamada and Yozo Goto

1. 緒 言

現在わが国では本州四国連絡橋をはじめ多数の長大つり橋が計画されており、その一部は建設に着手されている。これら長大つり橋の設計には、わが国が地震国であるところから、耐震性の検討が十分に行なわれねばならない。従来、橋梁の耐震設計には震度法あるいは修正震度法が用いられてきた。しかし、長大つり橋のように巨大でフレキシブルな構造物の場合には、これらの静的な耐震計算法だけでなく、動的解析による耐震性の検討が必要である。そして今日までの研究から^{1),2)}、長大つり橋においては主塔橋脚が耐震的に重要な構造部分のひとつであり、その耐震性については動的な計算法によって十分な検討を行なう必要があることが明らかにされてきた。

さて、主塔橋脚は一般に海中の巨大な橋脚上に高いフレキシブルな塔が結合された構造である。この橋脚と塔はそれぞれ異なった振動特性を有するため、地震時に一体となって連成振動する場合には、特殊な問題が現われる。そのひとつは基礎条件の変化によって連成振動の特性が変化する問題で、塔と橋脚が同調振動する場合には塔部の応答が増幅される。他のひとつは減衰の問題で、塔部は小さく橋脚部は大きいという減衰分布の不均一性すなわち非比例減衰性が、連成振動の特性に複雑な影響を与える。

著者らは多質点系のモデルを設定し、非減衰自由振動のモード解析と非比例減衰分布の場合の複素固有値解析および地震応答解析を行なった。その結果、これらの特性を明らかにするとともに、実際の動的解析と関連するいくつかの結論を得た。以下にその解析過程と結果を報告する。

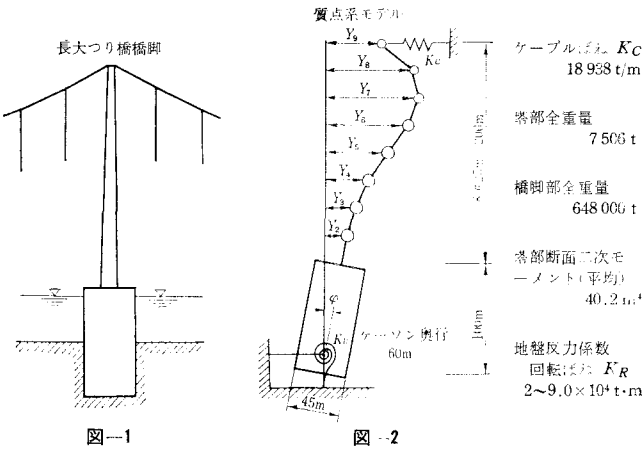
2. 記 号

本論文に用いた記号を以下に一括して説明する。

- $[M]$: 質量マトリックス
- $[C]$: 減衰マトリックス
- $[K]$: 剛性マトリックス
- $\begin{Bmatrix} y_t \\ y_p \end{Bmatrix}$: 変位ベクトル, y_t は塔部水平変位, y_p は橋脚の回転変位である。
- $\begin{Bmatrix} e \\ 0 \end{Bmatrix} z$: 地震加速度ベクトル, 0項は橋脚の回転変位項に対応する。
- $[V]$: モーダルマトリックス, モードベクトルより構成される。
- $[\backslash \)]$: ()内を対角要素とする対角マトリックス
- $\{q\}$: 各次固有振動の応答関数(時間関数)を示すベクトル
- h_i : i 次固有振動の減衰定数
- ω_i : 非減衰時の i 次固有振動数
- f_i : i 次固有振動に作用する地震外力
- $y_i^{(j)}$: i 次固有振動モードによる質点 j の変位
- α_i : i 次の複素固有値
- $\{\phi\}_i$: i 次の複素固有ベクトル(i 次の複素モード)
- $\{\bar{\phi}\}_i$: $\{\phi\}_i$ の共役複素ベクトル
- $\{\psi\}_i$: $\{\phi\}_i$ の実数部
- $\{\phi\}_i$: $\{\phi\}_i$ の虚数部
- $[\Phi]$: 複素モーダルマトリックス, 複素モード $\{\phi\}_i$ で構成される。
- $\{\xi\}$: 各次固有振動の複素応答関数(時間関数)を示すベクトル
- h_t : 塔部の減衰定数
- h_p : 橋脚基礎部の減衰定数

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工修 (株)大林組技術研究所



なる場合について検討を進める。すなわち
 $[V]^T [C] [V] = \widehat{[(2 h_i \omega_i)]} \dots\dots (3)$
 とすると次式を得る。

$$[I] \{\ddot{q}\} + \widehat{[(2 h_i \omega_i)]} \{\dot{q}\} + \widehat{[(\omega_i^2)]} \{q\} = -[V]^T [M] \begin{Bmatrix} e \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{z} \dots\dots (4)$$

式(4)の各行は1自由度の運動方程式である。静止状態から振動が始まった場合の解は次式で表わされる。

$$q_i(t) = -\frac{1}{\omega_i \sqrt{1-h_i^2}} \int_0^t f_i(\tau) e^{-\omega_i h_i(t-\tau)} \sin \omega_i \sqrt{1-h_i^2}(t-\tau) dt \dots\dots (5)$$

ただし

$$\{f(t)\} = -[V]^T [M] \begin{Bmatrix} e \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{z}(t)$$

である。

質点 j の最大変位量 $y_{\max}^{(j)}$ を求めるためには、次の自乗平均法か、絶対値の単純和による簡略法がよく用いられる。

$$y_{\max}^{(j)} = \sqrt{\sum_i (V_i^{(j)} q_{i \max})^2} \dots\dots (6)$$

$$y_{\max}^{(j)} = \sum_i \left| V_i^{(j)} q_{i \max} \right| \dots\dots (7)$$

$q_{i \max}$ は式(5)の数値積分結果から求められるが、一般には応答スペクトルから求めることが多い。

以上はよく知られたモーダルアナリシスによる解析過程である。しかし次章以下で述べるように、主塔橋脚についてはこの解法を無条件で適用することはできない。

3. 解析モデルと方程式およびモーダルアナリシス

(1) 解析モデル

本研究が対象とした長大つり橋の主塔橋脚を図-1に示した。本研究はこの主塔橋脚を図-2に示す質点系のモデルに置き換えている。

置き換えにあたり次の仮定を導入した。

- i) 塔を曲げ部材からなる多質点のはりに置換する¹⁾。
- ii) ケーブルによる塔頂の拘束を適当なばねで置換する²⁾。
- iii) 橋脚は完全な剛体でロッキング振動をすることを考える。
- iv) 地盤の拘束をばねで等価する。付加質量は考えない。

(2) 運動方程式とモーダルアナリシス

上記解析モデルの振動は多自由度系の運動方程式で表現される。減衰を粘性減衰項で代表させると、

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{y}_t \\ \ddot{y}_p \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{y}_t \\ \dot{y}_p \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} y_t \\ y_p \end{Bmatrix} = -[M] \begin{Bmatrix} e \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{z} \dots\dots (1)$$

となる。モーダルマトリックス $[V]$ を用い、

$$\begin{Bmatrix} y_t \\ y_p \end{Bmatrix} = [V] \{q\}$$

と変換すると次式を得る。

$$[I] \{\ddot{q}\} + [V]^T [C] [V] \{\dot{q}\} + \widehat{[(\omega_i^2)]} \{q\} = -[V]^T [M] \begin{Bmatrix} e \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{z} \dots\dots (2)$$

ここにモーダルマトリックスは次の関係を満足する。

$$[V]^T [M] [V] = [I], [V]^T [K] [V] = \widehat{[(\omega_i^2)]}$$

式(2)の減衰項は一般に対角行列でない。この問題は5章でくわしく検討するとして、ここでは対角行列に

4. 主塔橋脚の振動特性とむち打ち振動

(1) 基礎条件の変化と同調振動

長大つり橋主塔橋脚の設計にあたっては、建設地点の状況に応じ地盤反力係数、橋脚高さなどを多様に想定した検討が行なわれる。これら基礎条件の変化が振動特性に与える影響を明らかにするため、図-2のモデルについて地盤反力係数ならびに橋脚高さをおのおおの変化させ固有振動の解析を行なった。

図-3は縦軸に振動数を取り、横軸に地盤反力係数を平方根座標で取って固有振動数をプロットし、振動数曲線を作成したものである。同図中点線は橋脚のみを取り出した場合のロッキングの振動数曲線で、斜めの直線となる。一点鎖線は主塔のみを取り出した場合(すなわち橋脚固定)の振動数曲線で、基礎条件に無関係な直線である。全体の振動数曲線(実線)はこの二つの直線群のいずれかに漸近するか、漸近的に交差しており、直線の交点(領域 B, D)では曲線同士が接近する現象を示す。

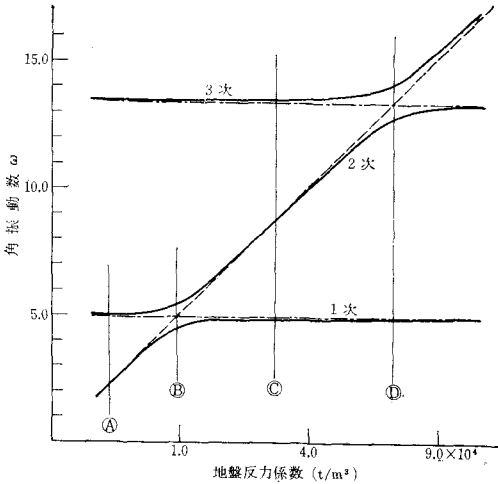


図-3 地盤反力係数～振動数曲線

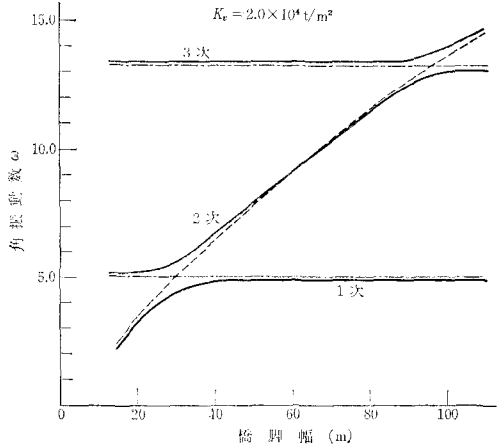


図-4 橋脚幅～振動数曲線

図-4 は橋脚幅を横軸に取った場合で、各振動数曲線の傾向ならびに曲線相互の関連は図-3と同様である。

図-5 は図-3の4領域(A, B, C, D)に対する固有振動モードを示している。領域Aでは1次モードが橋脚主体のモードであり、2次以上は主塔主体のモードである。領域Bでは1次と2次のモードは主塔と橋脚が連成したモードであり、3次以上は主塔主体のモードである。領域Cでは2次モードが橋脚主体のモードであり、領域Dでは2次と3次のモードが主塔と橋脚の連成モードとなる。このように、領域A, Cでは塔と橋脚の連成振動を示すモードは現われませんが、領域B, Dでは連成モードが2個現われる。これは、塔と橋脚おのおの固有振動数が接近し塔の振動が橋脚の振動に同調した現象を示すもので、橋脚の質量と剛性が塔にくらべて非常に大きいという構造的特徴に起因するものである。

(2) むち打ち振動 (Whip Effect) とモーダルアナリシス

塔と橋脚が同調振動する場合をさらに検討する。まず

領域Bにおける1次と2次のモードをみると(図-5), 位相が逆になるが、橋脚と塔上部の波形はほぼ等しい。したがって2つのモードが同符号で重なり合うと(図-6(a))橋脚のみが大きく振れる波形となり、逆符号で重なり合うと(図-6(b))主塔のみが大きく振れる波形となる。この重なり合いの符号関係は、対応する応答関数の位相関係で決定される。図-7は、減衰が2%の場合における1次と2次の応答関数 $q_{i=1,2}$ の地震応答計算結果を示している。固有振動数のわずかな差によって位相関係がずれていくために、応答の前半では橋脚が大きく振れ、後半では塔が大きく振れるようになる。この現象は、振動が橋脚から塔へ伝播されていく現象であるためにむち打ち振動と呼ばれており、塔上部の振幅が増幅されて大きくなるので、耐震上好ましくないと考えられている^{3,4)}。

図-8は減衰が10%の場合の計算結果である。二つの応答関数が逆位相に移行した時点では、その絶対値は減衰され小さな振動になっている。したがって塔部における振幅の増幅は起こらない。5章で詳細に述べるが、領域Bで1次と2次の固有振動に大きな減衰が作用する状態は、橋脚部に大きな減衰が作用する状態に対応している。このような場合には、むち打ち振動は発生しない。

図-9はモーダルアナリシスによる計算結果と式(1)の直接数値積分による計算結果を比較したものである。モーダルアナリシスの結果には、式(6)の自乗平均法と式(7)の絶対値加算法による結果を示した。減衰が小さい場合では、直接積分結果とモーダルアナリシスの結果

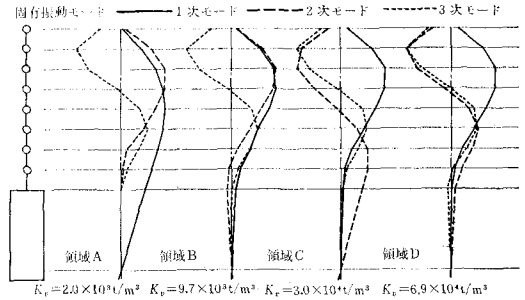
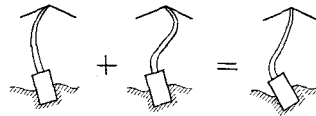


図-5

(a) 同符号の場合



(b) 異符号の場合

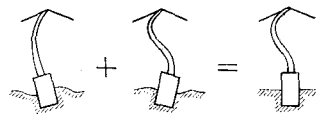


図-6

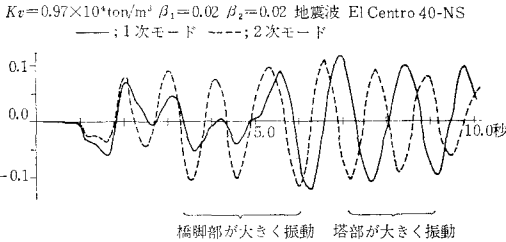


図-7 モード別地震応答

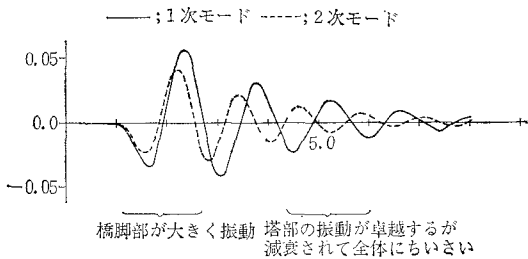


図-8 モード別地震応答

はよく一致しており、領域 B, D でむち打ち振動の影響が現われている。しかるに減衰の大きな場合では、領域 B, D で大きな相違が生じており、モーダルアナリシスの結果はむち打ち振動の影響を過大に評価している。モーダルアナリシスにおけるこの誤差の原因は、応答関数の最大値のみに着目し位相関係を無視した重合を行なう点にあり、注意を要するところである。

5. 橋脚の減衰の影響と複素固有値解析

主塔橋脚の振動の減衰性を検討すると、塔部はフレキシブルな鋼構造であるので減衰定数にして1%前後の値が考えられるが、橋脚部は地盤の影響を受けるため10~30%という大きな値が相当すると考えられる。このように著しく不均一な減衰分布が主塔橋脚全体の振動特性にどのような影響を与えるか、明らかにしておく必要がある。またこのような解析は、実際の動的設計においてしばしば問題となる固有振動別の減衰定数の決定について、合理的な指針を与えるプロセスとなるものである。

(1) 減衰マトリックス[C]の対角化の条件

上記のような不均一な減衰分布を表わす減衰マトリックス

[C]を用いた場合、モード解析に必要な対角化の条件、すなわち式(3)の仮定が成立するとは限らない。

T. K. Caughey は対角化の必要十分条件式を与えており^{5),6)}、その式を一部書き換えると次式を得る。

$$[C] = \alpha [M]^{1/2} \{ [M]^{-1/2} [K] [M]^{-1/2} \}^{l/n} [M]^{1/2} \dots \dots \dots (8)$$

ここに $n=1 \sim \infty$, $l=0 \sim N-1$ (N は行列の次数) である。

式(8)の特殊な場合として次のものがあげられる。

$l/n=0$ の場合

$$[C] = \alpha [M], \quad h_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} \dots \dots \dots (9)$$

$l/n=1$ の場合

$$[C] = \alpha [K], \quad h_i = h \frac{\alpha\omega_i}{2} \dots \dots \dots (10)$$

$l/n=1/2$ の場合

$$[C] = \alpha [M]^{1/2} \{ [M]^{-1/2} [K] [M]^{-1/2} \}^{1/2} [M]^{1/2}, \quad h_i = \frac{\alpha}{2} \dots \dots \dots (11)$$

上式中 h_i は i 次固有振動の減衰定数である。

一方、振動実験などから得られた h_i の値を用い、対角化の条件を満足させて[C]を作成する方法を Clough が提案している⁷⁾。次式はその提案式を一部書き改めたものである。

$$[C] = [M][V][\sqrt{2h_i\omega_i}]^{-1}[V]^T[M] \dots \dots \dots (12)$$

さて、与えられた減衰マトリックス[C]が式(8)または式(12)で展開可能であれば、式(3)の対角化の

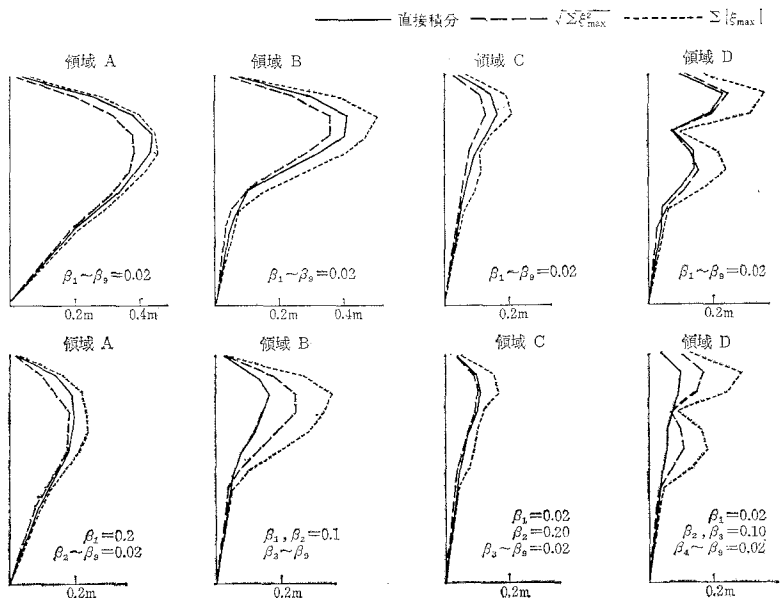


図-9 地震応答計算最大変位 (入力地震波 El Centro 40 NS 100 gal)

条件を満足する。しかし式 (8) または式 (12) の形から明らかなように、任意に構成した [C] を展開することは一般に不可能である。したがって減衰の不均一性による影響を解析するためには、従来のモード解析でなく次節で述べる複素固有値解析が必要となる。

(2) 複素固有値解析と複素応答解析

複素固有値解析では固有値の実数部と虚数部を求めるため、倍の未知数を持つ特性方程式が必要である。そこで式 (1) を次のように変換する⁸⁾。

$$\begin{bmatrix} 0 & , [M] \\ [M] & , [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_t \\ \dot{y}_p \\ y_t \\ y_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & , 0 \\ 0 & , [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_t \\ \dot{y}_p \\ y_t \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & , 0 \\ 0 & , -[M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{z} \dots\dots\dots (13)$$

ここで

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & , [M] \\ [M] & , [C] \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} -[M] & , 0 \\ 0 & , [K] \end{bmatrix}, [f] = \begin{bmatrix} 0 & , 0 \\ 0 & , -[M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{z} \dots\dots\dots (14)$$

とすると、式 (13) は次のように書き換えられる。

$$[A] \begin{Bmatrix} \dot{y}_t \\ \dot{y}_p \\ \dot{y}_t \\ \dot{y}_p \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} \dot{y}_t \\ \dot{y}_p \\ y_t \\ y_p \end{Bmatrix} = [f] \dots\dots\dots (15)$$

左辺 {f}=0 として自由減衰振動を考え、

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_t \\ \dot{y}_p \\ y_t \\ y_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha\phi \\ \phi \end{Bmatrix} e^{\alpha t} \text{ とおくと次式を得る。} \\ \alpha[A] \begin{Bmatrix} \alpha\phi \\ \phi \end{Bmatrix} e^{\alpha t} + [B] \begin{Bmatrix} \alpha\phi \\ \phi \end{Bmatrix} e^{\alpha t} = \{0\} \dots\dots\dots (16)$$

ここで [D]=[A]⁻¹[B] とし、e^{αt} を消去すれば、

$$\alpha[I] \begin{Bmatrix} \alpha\phi \\ \phi \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} \alpha\phi \\ \phi \end{Bmatrix} = \{0\} \dots\dots\dots (17)$$

となり特性方程式として次式を得る。

$$|\alpha[I] + [D]| = 0 \dots\dots\dots (18)$$

式 (18) を展開すると実係数の多項式が得られ、その根は一般に共役複素数である。N 自由度の振動問題では N 組の共役複素根が得られ、その根を式 (17) に代入すれば N 組の共役複素固有ベクトルが得られる。

さて、j 組目の共役複素固有値と、固有ベクトルを

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j &= -h_j\omega_j + i\omega_j, \bar{\alpha}_j = -h_j\omega_j - i\omega_j \\ \{\phi\}_j &= \{\psi\}_j + i\{\theta\}_j, \{\bar{\phi}\}_j = \{\psi\}_j - i\{\theta\}_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

とする。自由減衰振動時に j 次モードによって生じる実際の変形は式 (19) を用いて次式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} y_t \\ y_p \end{Bmatrix}_j = [\{\psi\}_j \pm i\{\theta\}_j] e^{(-h_j \pm i)\omega_j t} \dots\dots\dots (20) \\ = 2 e^{-h_j\omega_j t} [\{\psi\}_j \cos \omega_j t - \{\theta\}_j \sin \omega_j t] \dots\dots\dots (21)$$

ひとつの質点 (l) の実変形に注目すると、

$$y_j^{(l)} = 2 e^{-h_j\omega_j t} \cdot X_j^{(l)} \cdot \cos(\omega_j t + \theta_j^{(l)}) \dots\dots (22)$$

となる。ここに

$$X_j^{(l)} = \sqrt{\psi_j^{(l)2} + \theta_j^{(l)2}}, \theta_j^{(l)} = \tan^{-1} \left(\frac{\theta_j^{(l)}}{\psi_j^{(l)}} \right) \dots\dots\dots (23)$$

である。式 (23) の X_j^(l) は振幅を、θ_j^(l) は位相角を示している。すなわち複素モードでは各質点の運動に位相差が生じることになる。また式 (19) と式 (22) から明らかなように、複素固有値の虚数部は角振動数を与え実数部を虚数部で除した値は減衰定数を与える。

次に複素モードを用いて強制振動の応答解析を行なう場合を検討する。j 次固有振動の複素応答関数を ε_j とすると、強制振動時の応答は次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_t \\ \dot{y}_p \\ y_t \\ y_p \end{Bmatrix} = \sum_j \begin{Bmatrix} \alpha\phi \\ \phi \end{Bmatrix} \varepsilon_j + \sum_j \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}\bar{\phi} \\ \bar{\phi} \end{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_j = [\phi] \{\varepsilon\} \dots\dots\dots (24)$$

式 (24) で式 (15) を変換し前から [φ]^T をかける。

$$[\phi]^T [A] [\phi] \{\varepsilon\} + [\phi]^T [B] [\phi] \{\varepsilon\} = [\phi]^T [f] \dots\dots\dots (25)$$

モードの直交性から [A], [B] とも対角化されて次式を得る。

$$[\lambda] \{\varepsilon\} + [\mu] \{\varepsilon\} = [\phi]^T [f] \dots\dots\dots (26)$$

複素モードの直交性は実数モードの場合と同様に証明される。式 (26) の各行は独立しており、ε_j は各行ごとに数値積分を行なうことによって求めることができる。

(3) 複素固有値の数値解法

式 (18) の根は複素数であるため、一般的な固有値解法である Jacobi 法あるいは Power 法は使えない。著者らは式 (18) を一度多項式に展開し、Newton Raphson 法による Iteration で、その根を求める方法を取った。演算には、倍長計算を用い、精度の向上に努めている。

(4) 解析に用いた減衰マトリックス [C] について

構造物の減衰特性に対応するマトリックス [C] の形状については、十分な解析が行なわれていない。そこで物理的根拠からではなく、橋脚部の減衰の影響を比較検討する上で便利なところから、Cauchy の対角化条件式 (8) をもとにした次式を [C] として用いた。すなわち

$$[C] = [\tilde{M}]^{1/2} \{[\tilde{M}]^{-1/2} [\tilde{K}] [\tilde{M}]^{-1/2}\}^{1/2} [\tilde{M}]^{1/2} \dots\dots\dots (27)$$

ただし $[\tilde{M}]$, $[\tilde{K}]$ は次式から決定する。

$$[\tilde{M}] = 2\beta_t \omega_1 [M] + 2(\beta_p - \beta_t) \omega_1 \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} \dots\dots(28)$$

$$[\tilde{K}] = \frac{2\beta_t}{\omega_1} [K] + \frac{2(\beta_p - \beta_t)}{\omega_1} \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \dots\dots(29)$$

ここに $\begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix}$: 基礎の慣性項のみのマトリックス

$\begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$: 地盤の回転ばねのみのマトリックス

ω_1 : 全体の1次固有振動数

β_t, β_p : 主塔、橋脚がそれぞれ単独で存在する場合の減衰定数

式(27)で β_p に大きな値が入ると橋脚に大きな減衰が作用する状態が表現される。 $\beta_t = \beta_p$ の場合は式(11)と一致する。

なお式(28)と式(29)を質量比例形ならびに剛性比例形の減衰マトリックスとして使い、比較検討を行なった。

(5) 複素固有値解析による主塔橋脚の振動特性解析

4章と同様に地盤反力係数をパラメーターに取った解析を行なう。まず式(27)の減衰マトリックスを用い、主塔の減衰定数を一定の $h_t = 2\%$ とし、橋脚の減衰定数を $h_p = 10\%, 20\%, 30\%$ とした3ケースについて複素固有値解析を行なった。図-10は $h_p = 10\%$ の場合の地盤反力係数と固有振動数の関係を示したもので、縦軸に振動数を、横軸に地盤反力係数を平方根座標で取っている。図-10を4章の図-3と比較すると、領域B, Dでの曲線の接近傾向が顕著になっていることがわかる。図-11は $h_p = 20\%$ の場合の結果で、上記の接近傾向がさらに顕著となり、領域Dでは接近してきた曲線が交差する。図-12は $h_p = 30\%$ の場合で、領域B, Dでも曲線の交差が起こる。図-13は $h_p = 10\%$ の場合の地盤反力係数と各固有振動の減衰定数の関係を示したもので、縦軸に減衰の値を取っている。同図から、領域

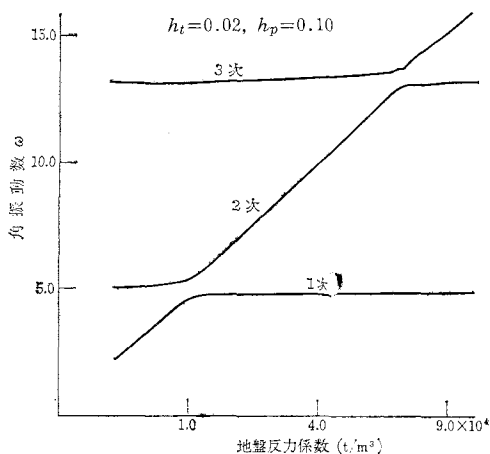


図-10

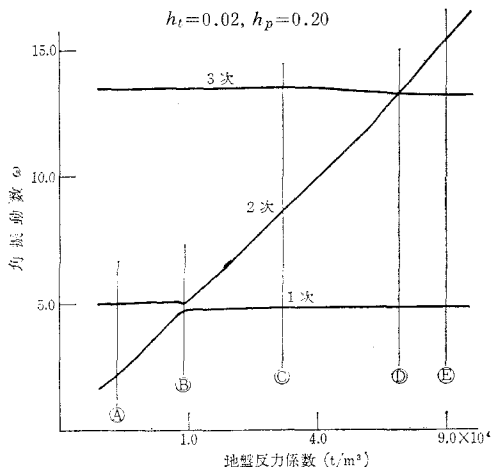


図-11

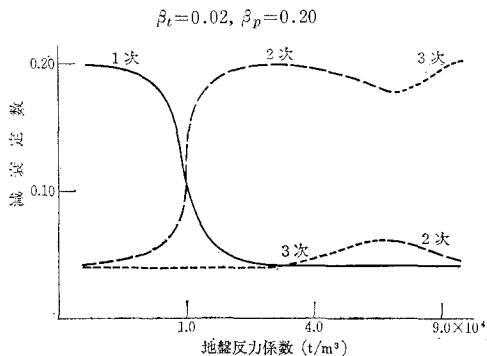


図-12

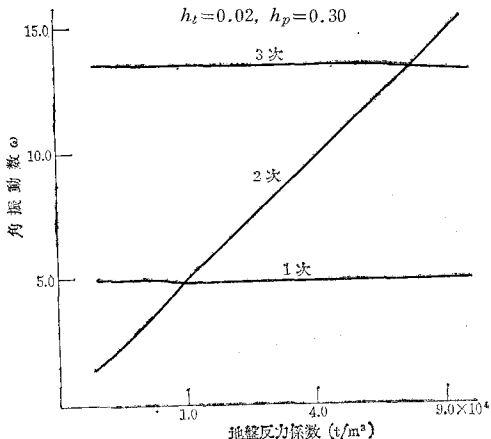


図-13

Aで1次, Cで2次, Eで3次の各曲線が10%近くの値となり, 領域B, Dでそれらの曲線が交代することがわかる。図-10と図-13を対応すると, 領域A, C, Eでそれぞれ10%に近い減衰を有する固有振動は振動数曲線の斜線部に対応しており, 橋脚のロッキングの影響を受けたものであることがわかる。図-14は $h_p=20\%$ の場合の減衰定数曲線である。この場合領域Dでの曲線交代は生じない。対応する振動数曲線(図-11)は領域Dで交差しており, 相互に反転する対応関係にあることがわかる。図-15は $h_p=30\%$ の場合で, 各曲線はフラットになり大きな変化はみられなくなる。30%に近い1本の減衰定数曲線は図-12の振動数曲線の連続した一斜線(橋脚のロッキングに支配されたもの)に対応している。

振動数曲線が交差し減衰定数曲線が交差しないということは, その交点において振動数は同一であるが減衰定数が異なり(すなわち複素固有値は重根でない)モードの直交性が満足している2つの固有振動が存在していることを示している。

以上は式(27)の減衰マトリックスを用いた場合であるが, 図-16は質量比例形式(28)の場合で振動数の増加に逆比例して減衰定数が減少している。図-17は剛性比例形式(29)の場合で振動数に比例して減衰定数が増

加しており, いずれもよく知られた傾向が裏付けられている。また, 各曲線の起伏と交差の状態ならびにそれらの橋脚部ロッキング振動との関係も先の図-10から図-15で明らかになった傾向と同一である。

次に, 複素モードに関する検討を振動数曲線と減衰定数曲線に対応させて行なう。図-18から図-22は橋脚部の減衰 $h_p=20\%$ とし地盤反力係数を代表的な5個の値(図-11における領域A~E)にとって複素モードを求めた結果である。各図中左側に複素振幅の最大値を, 右側に対応する各質点の位相を橋脚頭部を基準にして円座標で示した。減衰の影響により振幅と位相が変化するとみられるモードは領域Bで1次と2次, Cで2次, Dで2次と3次, Eで3次となっており, 領域B, Dで特にその傾向が著しい。変化が現われるモードに共通の特徴は領域Aを例外として橋脚部の振幅が相対的に大きいことであり, 橋脚のロッキングの影響を受けていることである。

さて, 地盤反力係数を領域Bにとり橋脚部の減衰定数を10%, 20%, 30%と増加させて複素モードを求めた結果を図-23から図-25に示す。10%と20%の結果から橋脚部の減衰の増加は位相に大きな影響を与えていることがわかる。しかし, 30%の場合には振幅にも急激な変化が起こる。すなわち, 橋脚が大きく振れるモード

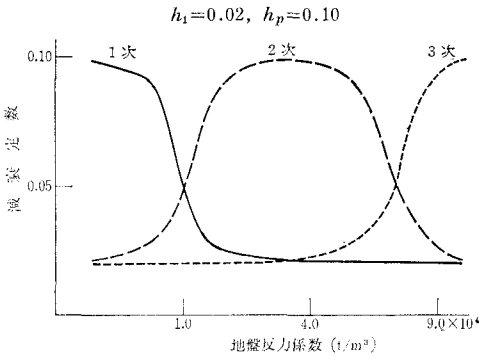


図-14

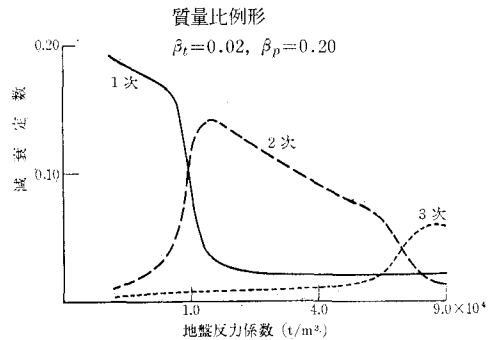


図-15

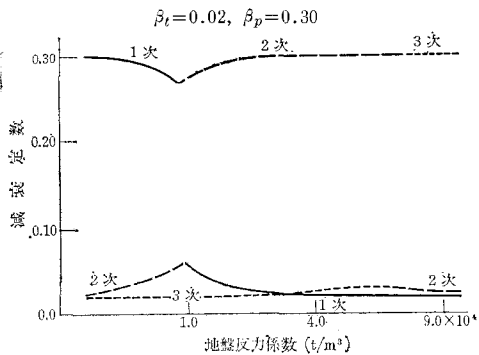


図-16

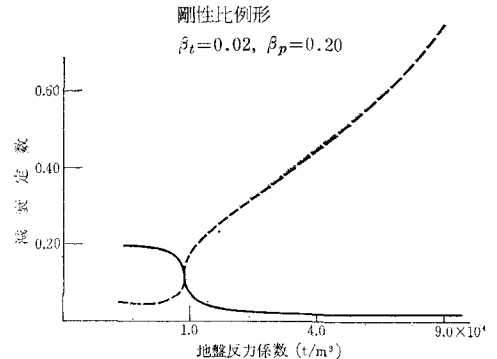


図-17

は2次モードの1個に限られ、他のモードは橋脚固定に近いモードとなる。この現象は 図-21 にもみられ、振動数曲線が接近から交差に転じる変化に対応したものである。さらに、次節で述べる応答計算結果と対応して検討すると、この現象は橋脚部の減衰の性格が橋脚の振動を減衰する作用から拘束する作用に変化したことを示していることがわかる。

(6) 地震入力による複素応答計算結果

地震時の応答は式(26)に基づく複素応答計算から求めた。式(26)の各行は独立しているが実部と虚部があるため2元連立となる。数値積分法としては、Runge-Kuttaの2元連立一階微分方程式の解法を用いた。応答時の変位は式(24)の変換を各積分時刻ごとに行なうことにより求めた。

橋脚部の減衰定数を10%、20%、30%の3段階に取り地盤反力係数を5種の値(A~E)にとった15ケースについて複素応答計算を行なった。入力地震波はEl Centro 40 NS, 同 EW, Taft 52 NS, 同 EW, Olimpia 49 EWの5波で、おのおのを最大100 galに統一して用いていた。以下 図-26 に示している値はこの5種の地震波に対する最大応答値を平均したものである。

領域Aの結果では、橋脚の減衰が増加することによりロッキングの振幅は減少するが主塔のモーメントは変化しないことが特徴である。この領域では1次モードがロッキングを主とするモードであり、2、3次モードは主塔の振動を主とするモードである。前節の解析で明らかのように橋脚部の減衰の影響は1次モードに集中し2、3次モードにはあまり影響しない。したがって減衰が増加しても主塔の最大モーメントには大きな変化が現われないことになる。

領域Bの結果では、橋脚の減衰が10%の場合にむち打ち振動が生じている。しかし減衰が大きくなるとその影響は減少しており4章で述べた結論が裏付けられる。

領域Cの結果では、減衰の増加による振幅とモーメントの変化は小さい。この領域では橋脚のロッキングが主となるモードは2次モードであり、橋脚部の減衰の影響は2次モードに集中して現われる。したがって橋脚の減衰が10%以上では2次モードの応答は減衰されて卓越せず、橋脚のロッキングは小さいが低次で応答しよい1次モードが卓越していると考えられる。

領域Dの結果では10%の減衰の場合に2次モードと3次モードの連成によるむち打ち振動の発生が若干みられる。しかし減衰が増加するとその影響は小さくなる。

領域Eの結果は領域Dの結果と類似している。これはEの領域における地盤反力係数がDの値に近くむち打ち振動の発生する領域内であることを示している。この場

合も減衰の増加とともにその影響は小さくなる。

各領域に共通なことは、橋脚部の減衰が30%になると、最大モーメントの形と値がほぼ同一になることである。これは大きな減衰による拘束効果によって橋脚が固定状態に近くなり、いずれの領域においても主塔の基準振動モードが卓越してきたことによる。

領域Bの30%と領域Dの20%、30%の場合は振動数曲線の交点での計算結果である。これらの応答計算は振動数が一致する2つの固有振動を含んで行なわれているわけであるが、複素固有値としては重根でないので数値計算上特別な取扱いをする必要はない。

(7) 非比例減衰を有する場合の近似解法

複雑な複素固有値解析を実際の設計における動的解析に適用していくことは一般に困難である。そこで、主塔橋脚のように不均一な減衰分布(非比例減衰)を有する構造物については近似計算から減衰定数を求め、従来からのモード解析に適用していく方法を検討した。

まず、非減衰自由振動のモード解析から求められたモードマトリックスを[V]とし、

$$[V]^T[C][V]=[C] \dots\dots\dots (30)$$

とする。[C]は一般に対角行列にならず、その非対角要素は不均一な減衰によるモード間の連成を意味する。この連成を無視して0とする近似を行ない、各モードの減衰係数として[C]の対角要素 c_i だけを用いる。すなわち、

$$[V]^T[C][V]=\text{diag}(c_i)$$

と近似する。従来のモード解析では

$$[V]^T[C][V]=\text{diag}(2\beta_i\omega_i)$$

であるから近似減衰定数 \tilde{h}_i として次式を得る。

$$\tilde{h}_i = \frac{\tilde{c}_i}{2\tilde{\omega}_i} \dots\dots\dots (31)$$

ただし $\tilde{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - h_i^2}$ である。

さて、複素固有解析から得られた減衰定数と上記の近似減衰定数 \tilde{h}_i を比較し、表-1 から表-3 にまとめて示した。一般に近似がよく成立していることがわかるが表-2の領域Dにおける2次と3次、表-3の領域Bにおける1次と2次、および領域Dの2次と3次においては近似が成立していない。いずれの場合も振動数曲線が交差する領域の場合である。橋脚の減衰の作用は複素固有値解析によると橋脚のロッキングが大きい一方のモードに集中しており、近似解法では二つのモードに分かれている。

次に、この近似の減衰定数を用いて(6)で行なった複素応答計算と同一の入力条件による応答計算を行なった。その結果を 図-26 に点線で示している。点線は実線と一般によく一致しており、先に指摘した減衰定数の

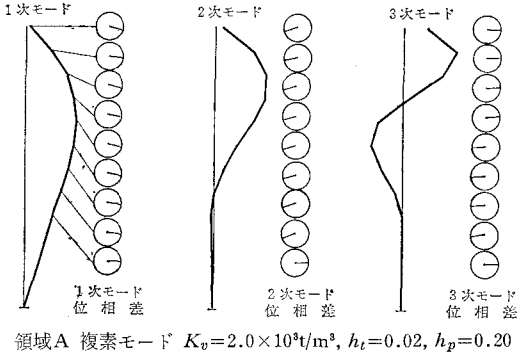


図-18

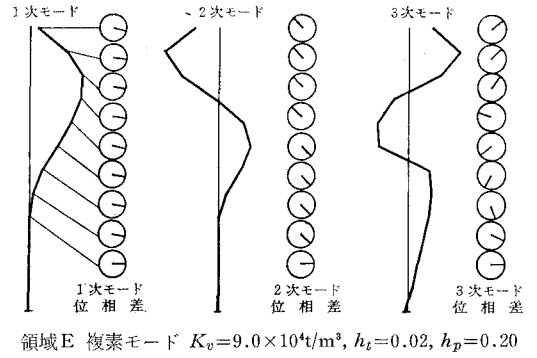


図-22

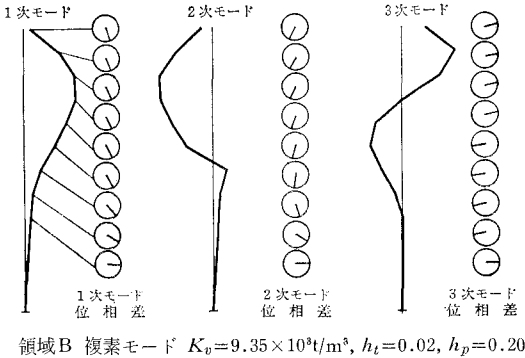


図-19

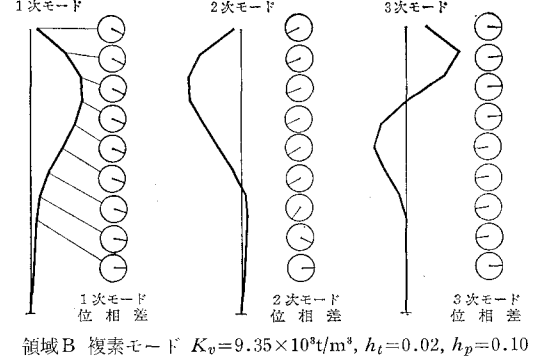


図-23

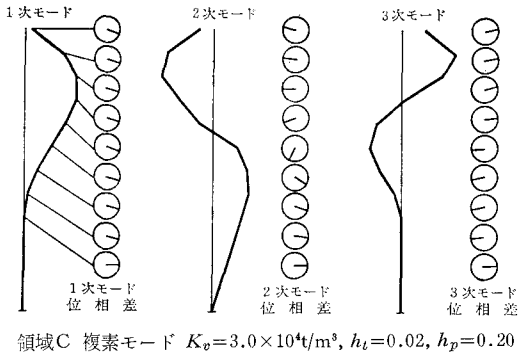


図-20

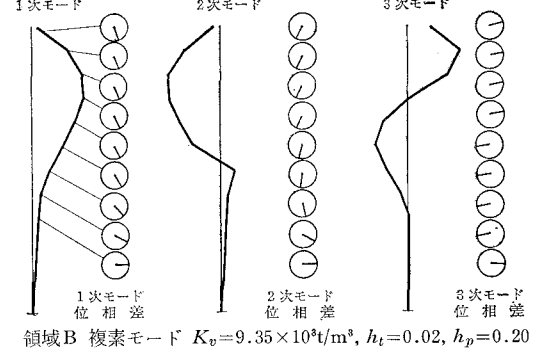


図-24

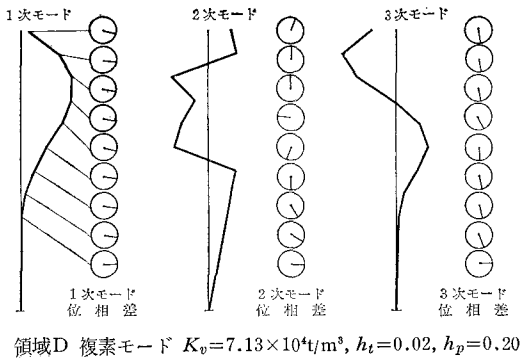


図-21

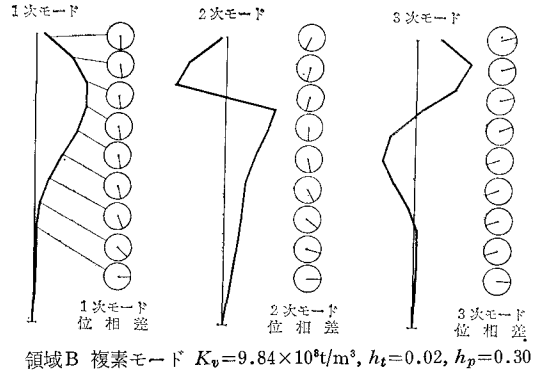
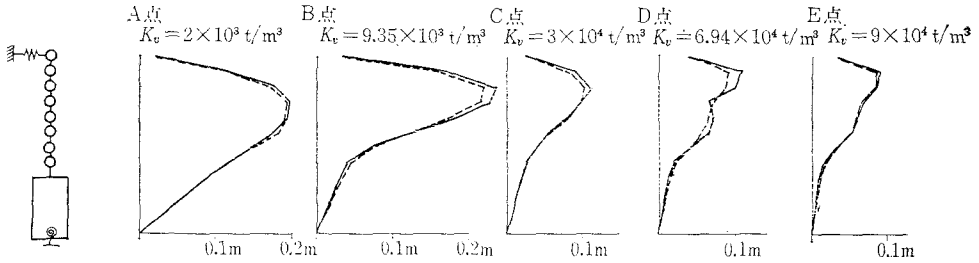


図-25

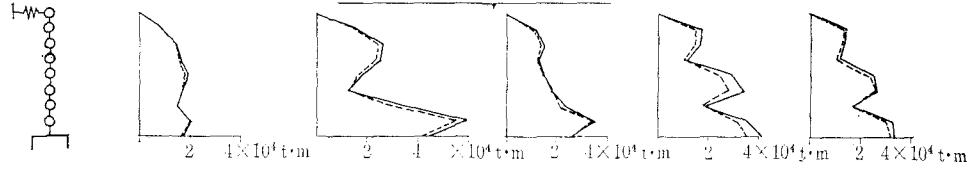
応答計算結果 入力地震波 5波(最大100gal)平均 ———複素応答 - - - - -近似応答

$h_t=0.02, h_p=0.10$

最大変位

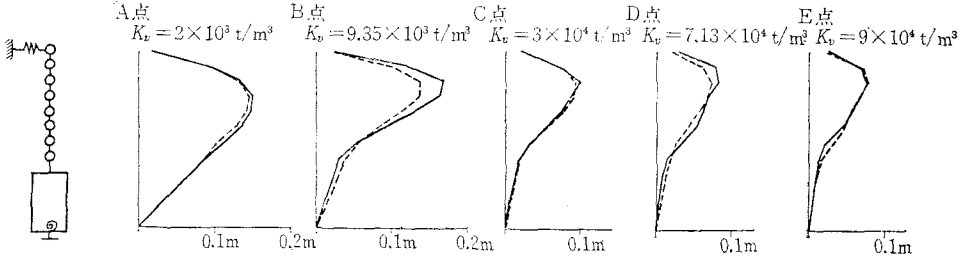


最大モーメント

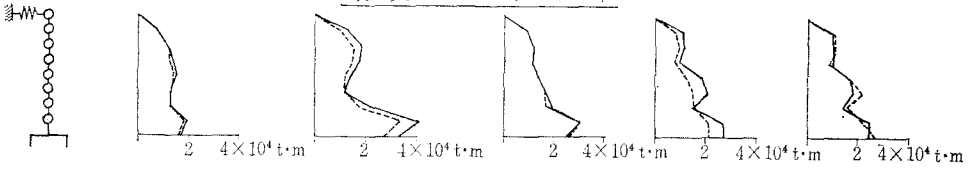


$h_t=0.02, h_p=0.20$

最大変位

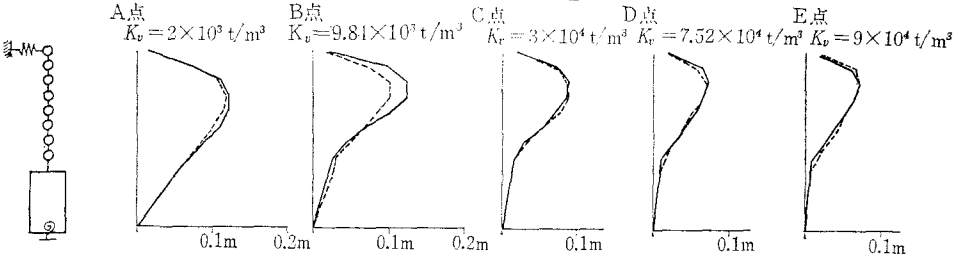


最大モーメント



$h_t=0.02, h_p=0.30$

最大変位



最大モーメント

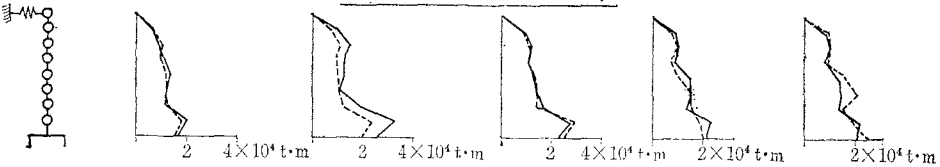


図-26

表-1 減衰定数の比較 $\beta_t=0.02, \beta_p=0.10$

	領域 A $K_v=2.0 \times 10^3 \text{ t/m}^3$		領域 B $K_v=9.35 \times 10^3 \text{ t/m}^3$		領域 C $K_v=3.0 \times 10^4 \text{ t/m}^3$		領域 D $K_v=6.94 \times 10^4 \text{ t/m}^3$	
	厳密解	近似解	厳密解	近似解	厳密解	近似解	厳密解	近似解
1 次	0.0961	0.0961	0.0594	0.0594	0.0210	0.0210	0.0202	0.0202
2 次	0.0220	0.0220	0.0594	0.0593	0.0972	0.0971	0.0596	0.0596
3 次	0.0202	0.0202	0.0204	0.0204	0.0214	0.0215	0.0596	0.0595
4 次	0.0201	0.0201	0.0201	0.0201	0.0202	0.0202	0.0204	0.0204
5 次	0.0200	0.0200	0.0200	0.0200	0.0201	0.0201	0.0201	0.0201

表-2 減衰定数の比較 $\beta_t=0.02, \beta_p=0.20$

	領域 A $K_v=2.0 \times 10^3 \text{ t/m}^3$		領域 B $K_v=9.35 \times 10^3 \text{ t/m}^3$		領域 C $K_v=3.0 \times 10^4 \text{ t/m}^3$		領域 D $K_v=7.13 \times 10^4 \text{ t/m}^3$	
	厳密解	近似解	厳密解	近似解	厳密解	近似解	厳密解	近似解
1 次	0.1939	0.1937	0.1094	0.1090	0.0221	0.0222	0.0241	0.0204
2 次	0.0242	0.0244	0.1094	0.1089	0.1969	0.1962	0.0340	0.0965
3 次	0.0204	0.0204	0.0209	0.0209	0.0229	0.0233	0.1871	0.1222
4 次	0.0201	0.0201	0.0202	0.0202	0.0204	0.0204	0.0208	0.0209
5 次	0.0200	0.0200	0.0201	0.0201	0.0201	0.0201	0.0202	0.0202

表-3 減衰定数の比較 $\beta_t=0.02, \beta_p=0.30$

	領域 A $K_v=2.0 \times 10^3 \text{ t/m}^3$		領域 B $K_v=9.35 \times 10^3 \text{ t/m}^3$		領域 C $K_v=3.0 \times 10^4 \text{ t/m}^3$		領域 D $K_v=7.52 \times 10^4 \text{ t/m}^3$	
	厳密解	近似解	厳密解	近似解	厳密解	近似解	厳密解	近似解
1 次	0.2978	0.2970	0.0645	0.1399	0.0229	0.0235	0.0206	0.0206
2 次	0.0262	0.0267	0.2711	0.1788	0.3037	0.3012	0.0282	0.1050
3 次	0.0205	0.0205	0.0213	0.0214	0.0205	0.0251	0.3013	0.2164
4 次	0.0201	0.0201	0.0203	0.0203	0.0205	0.0206	0.0212	0.0215
5 次	0.0201	0.0201	0.0201	0.0201	0.0202	0.0202	0.0203	0.0203

近似が成立しない振動数曲線の交差領域においても大きな相違はみられない。この領域では減衰定数ばかりでなく非減衰振動モードも複素モードと大きく相違しているため、両者が相乗されて近似が成立するわけである。

領域 B, D は他の 3 領域に比較して誤差が大きい。この領域は複素モードに減衰の影響が大きく現われる領域であり、非減衰モードを用いる近似計算は橋脚部の減衰による橋脚拘束効果を適切に表現していない。すなわち非減衰モードを用いる限り橋脚のロッキングを若干過大評価し主塔の振動を過小評価する。したがって領域 B, D で従来のモード解析を適用する場合にはこの点を考慮しておく必要がある。

6. まとめと結論

以上の研究結果の要約と結論は次のとおりである。

(1) 主塔橋脚は、主塔固有振動周期と橋脚のロッキング固有振動周期が互いに接近すると同調振動を起し振動数の接近した 2 個の主塔橋脚連成振動モードを持つ。互いの周期が隔っている場合には連成振動モードを持たない。

(2) 同調振動する場合はむち打ち振動により主塔の

応答が増幅される。ただし橋脚部の減衰が 20% 以上になるとむち打ち振動は生じないと考えてよい。この場合の応答をモーダルアナリシスで解析するためには応答関数の位相関係を考慮しておく必要がある。

(3) 橋脚部に大きな減衰が作用する場合を厳密に解析するためには複素固有値解析を行なう必要がある。

(4) 複素固有値解析から得られる固有振動数は、橋脚部の減衰がパラメーターに加わるため複雑な性質を示す。橋脚部の減衰が大きいと (1) で述べた同調振動の領域で 2 個のモードの振動数が一致する場合も起こる。

(5) 複素固有値解析から求めた減衰定数を検討すると、橋脚部の減衰が大きい場合は橋脚部が大きく振れるモードの振動に大きな減衰が作用することがわかる。

(6) 複素固有値解析から振幅と位相を持つ複素モードが求められる。非比例減衰は振幅と位相に影響するが位相への影響がより大きい。また、(1) で述べた同調振動の領域ではより大きな影響が現われる。

(7) 複素応答計算から、橋脚の減衰が大きい場合には減衰によって橋脚が拘束され、主塔の基準振動モードの応答が卓越することが明らかになる。

(8) 5. (7) で述べた近似減衰定数を用いる応答計算によれば、複素応答計算による厳密解に対し近似度のよい解を得ることができる。したがって、この近似減衰定数を用いることにより減衰分布の不均一性を考慮した動的解析を簡略に行なうことが可能である。ただし、この方法は減衰項による橋脚拘束効果を適確に表現できない場合があるので注意を要する。

以上に述べた結論は主塔橋脚などの構造物に動的解析を適用する上で問題となる点に若干の指針を与えたものである。しかし、本研究は多質点系のモデルで減衰をすべて粘性減衰で代表させた場合を論じたものであり、解析に用いた減衰係数マトリックスの形状も仮に想定したものである。橋脚部が大きな減衰作用を持つ原因のひとつは地盤の塑性的性質によるものであり、減衰の増加は地盤反力係数の変化をとまなうことになる。また他の原因として振動エネルギーの地下逸散によるものがあるが、よく知られているようにこの減衰は振動数の関数である。したがって、これらの問題も考慮に入れると橋脚部に作用する減衰の影響はさらに複雑になると考えられる。

本研究は複素固有値解析を実橋の振動試験結果の解析に適用するまでに至らなかった。模型の振動実験については土谷⁹⁾が解析を試みているが、実橋の解析については今後の研究課題である。実橋の振動試験から高次固有振動までのモードと減衰定数および測点間の位相に関するデータが得られれば、複素固有値解析は実橋の減衰機構を解明するひとつの手掛りとなるであろう。

参 考 文 献

- 1) Konishi, I. and Yamada, Y. : Earthquake Responses of a Long Span Suspension Bridge, Proc. Second W. C.E.E., Vol. II, 863~878 (1960).
- 2) Yamada, Y. : Elastic-Plastic Analysis of Suspension Bridge Towers Subjected to Earthquake Ground Motions, Mem. of the Faculty of Engineering, Kyoto Univ., Vol. 23, Part 3 (1961).
- 3) Biot, M. A. : Analytical and Experimental Methods in Engineering Seismology, Trans. of A.S.C.E., Paper, No. 2183, January (1942).
- 4) Penzien, J. and Chopra, A.K. : Earthquake Response of Appen-Dage on a Multi-Story Building, Proc. Third W.C.E.E., Vol. II, 476~487 (1965).
- 5) Caughey, T.K. : Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, June (1960).
- 6) Caughey, T.K. and O'Kelly, M.E.J. : Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, Sept. (1965).
- 7) Clough, Ray W. : Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, pp.441-486, The University of Alabama Press (1971).
- 8) Foss, K.A. : Co-Ordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, Sept.(1958).
- 9) 土谷忠温 : 長大つり橋タワーブアー系の減衰連成振動と耐震設計への応用, 京大工学部修士論文 (1971).

(1971.10.13・受付)
(1972. 8. 5・再受付)