

不規則地震動に対する構造物の最大応答の 推定法について*

ON ESTIMATION OF THE MAXIMUM RESPONSE OF STRUCTURES SUBJECTED TO RANDOM EARTHQUAKE MOTION

亀 田 弘 行**

By Hiroyuki Kameda

1. 緒 論

土木構造物に作用する外力の多くは時間的に不規則に変動し、またその波形を確定関数として予測することが困難である。地震力はその典型的な例であるが、このような不規則外力に対する構造物の応答特性を把握し、その設計法を確立するためには、構造物の非破壊確率¹⁾(いわゆるリアビリティ関数)を求めておくことが重要となる。非破壊確率を求めるに際しては、外力の不規則性のほかに、構造物の破壊基準の設定、構造要素および構造系全体としての強度のばらつきなど、多くの項目に関する評価が必要となるが、本研究では、その中の重要な問題の一つとして、不規則な地震動を受ける構造物の最大応答の確率分布を取り扱った。

構造物または構造部材の最大応答量(変位, 変形量, 応力など)をある許容値以下に収めようとする設計法において、構造物自体に関する物理量のばらつきを無視すれば、最大応答の確率分布はそのまま非破壊確率を表わす重要な確率量であるが¹⁾、一般にその厳密解を求めることはきわめて困難である。したがって、最大地震応答の確率分布に関する従来の研究も、結局は何らかの形で近似解を導いているようである。この問題では、Rosenblueth と Bustamante の先駆的な研究²⁾が著名であるが、そこでは地震動は white noise に限定されている。Freudenthal と篠塚³⁾は、最大応答の確率分布の上・下界を導いたが、それらは必ずしも実用的に十分に相接近した値を与えていない。また山田・竹宮⁴⁾は、Davenport⁵⁾、小松⁶⁾が耐風設計の問題で用いたのと同様に、任意の時刻における構造物の応答特性は、過去の応答から独立であるとして最大応答の確率分布の近似解を求め

たが、その精度については検討が行なわれていないようである。比較的減衰定数の小さい構造物の地震応答は強い周期性を示す結果、相異なる時刻での応答の間には高い相関が認められるから、かかる仮定で十分な精度が得られるパラメーター領域はかなり限定されるものと考えるのが妥当であろう。

一般に、この種の問題のように近似解しか求め得ない場合には、その精度を十分に検討して適用範囲を明らかにすることがぜひとも必要であり、さらに単一の解法を十分なパラメーター領域にわたって適用できない場合には、たとえば精度の悪化する領域を相補うような複数の解法を用意して、できるだけ高精度でかつ現象に忠実な解析を行ないうよう努めるのが良策であろう。このような観点から、本研究では最大応答の確率分布を求めるための二種の解法を考案した。すなわち、(1) 純出生過程の方程式を基礎として、相異なる時刻での応答間の相関をできるだけ考慮する方法、および(2) 応答包絡線の極値分布の理論を応用する方法である。数値計算により精度の検討を行なった結果、これらの解法を適宜選択適用することによって、地震動と構造物に関する諸特性の広い範囲に対して最大地震応答の確率分布を求めうることを示した。さらにこれらの結果に基づいて、最大地震応答の確率統計的性質を考察し、それより構造物の耐震設計への応用の手法に論及した。

本論文では、構造物の振動モデルは線形 1 自由度系に限定したが、最大応答の確率分布に関する解法は、非線形系および多自由度系にも適用しうるものである。

2. 地震動の確率モデル

構造物の最大地震応答を論ずる場合には、初期条件の影響を無視できない場合を考慮して、入力地震動の非定常性をも取り入れた非定常応答を取り扱うのが妥当と考えられる。そのために、地震時の地動加速度 $\ddot{z}(t)$ を次

* 土木学会第 25, 26 回年次学術講演会(昭. 45, 46)および第 11 回地震工学研究発表会(昭. 46)で発表。

** 正会員 工博 京都大学助教授 工学部交通土木工学教室

式で表わす^{7),8)}。

$$\ddot{z}(t) = \beta f(t; \tau) g(t) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 β は加速度の次元を持つ定数、 $f(t; \tau)$ は、最大値 1 なる正の無次元確定関数、 $g(t)$ は平均値ゼロで分散 1 なる無次元の正規定常確率過程である。 $f(t; \tau)$ は shape function と呼ばれ、 $\ddot{z}(t)$ の振幅強度の非定常性を示すもので、種々の形が考えられるが⁹⁾、ここでは次式⁹⁾を採用する。

$$f(t; \tau) = \frac{(1 + \xi)^{(1 + 1/\xi)}}{\xi} e^{-st} (1 - e^{-\xi st}) \dots\dots (2)$$

ここに、 ξ, s は $f(t; \tau)$ の形を決めるパラメーターであり、 τ は後述の等価継続時間である。式 (2) の $f(t; \tau)$ は、

$$t = t_m = \frac{1}{s \xi} \log(1 + \xi) \dots\dots\dots (3)$$

で最大値 1 となる。**Fig. 1** にこのような $f(t; \tau)$ の例を示した。

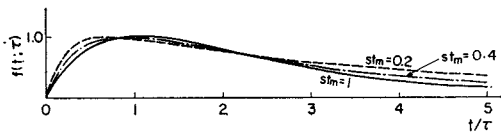


Fig. 1 Shape Function $f(t; \tau)$ of Earthquake Motion.

かくして設定された不規則地震動の継続時間を次のように定義する。すなわち、式 (1) で表わされる地動 $\ddot{z}(t)$ が、分散 β^2 なる定常確率過程 $\beta g(t)$ から時間 τ の部分を切出したものと最大加速度 α の期待値 $\alpha_m = E[\alpha]$ を等しくする場合、この τ を $\ddot{z}(t)$ の等価継続時

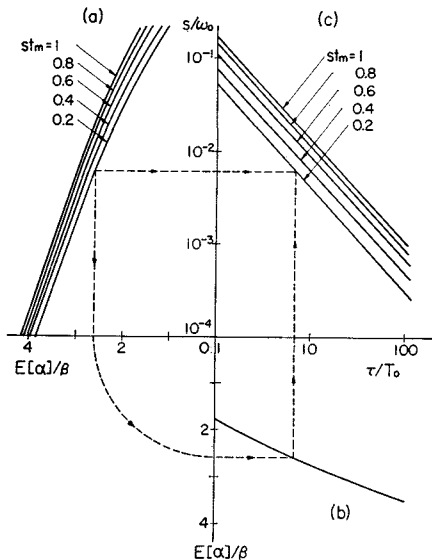


Fig. 2 Determination of the Equivalent Duration of Earthquake Motion.

間とする。これを求める手順を **Fig. 2** に示した。著者らはさきに、比較的広帯域の確率過程である地震動の最大加速度を求める解法を論じたが⁷⁾、**Fig. 2** (a) はその方法によって式 (1) で与えられる地動の最大加速度の期待値 $E[\alpha]$ を求めた結果であり、**Fig. 2** (b) は、同様の方法から求めた定常過程 $\beta g(t)$ の $E[\alpha]$ である。いずれの場合にも $g(t)$ のスペクトル密度には文献 7) と同じ形を用いており、 T_0 は卓越周期、 ω_0 は卓越円振動数である。これらの結果から、 $\ddot{z}(t)$ の等価継続時間 τ とパラメーター s, t_m (式 (3) によって ξ) との関係が **Fig. 2** (c) のように求められる。同図から、 s/ω_0 と τ/T_0 の間には次のような関係があることがわかった。

$$s/\omega_0 = C(\tau/T_0)^{-1.09} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 C は **Table 1** に示される定数である。本論文では、すべて $st_m = 0.4$ 、 $\xi = 4.047$ 、 $C = 0.077$ を用いる。

Table 1 Parameters to Characterize the Shape Function.

st_m	ξ	C
1.0	0.0	0.166
0.8	0.539	0.136
0.6	1.579	0.108
0.4	4.047	0.077
0.2	13.30	0.050

構造物の応答解析では、入力のスペ

クトル密度のピークの高さを独立なパラメーターで自由に調節できるのが望ましい。以下の解析では $g(t)$ のスペクトル密度として次式を用いる。

$$S_g(\omega) = \frac{4 h_0}{\pi \omega_0} \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\{1 - (\omega/\omega_0)^2\}^2 + 4 h_0^2 (\omega/\omega_0)^2} \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 ω_0 は卓越円振動数である。式 (5) の $S_g(\omega)$ は、white noise に対する線形 1 自由度系の相対速度応答のスペクトル密度に相似であって、 h_0 はその場合の減衰定数に相当するが、ここではそのような物理的なアナロジーではなく、式 (5) によれば $S_g(0) = 0$ となり、また $\omega = \omega_0$ で最大値 $S_g(\omega_0) = 1/(\pi h_0 \omega_0)$ となることから同式の形を採用する。本研究では、後述の平均応答スペクトルの形状などから、すべて $h_0 = 0.9$ とするが、この値はあくまで暫定的なものであり、実際には種々の地震動の特性によって変化すべきものである。

式 (5) の $S_g(\omega)$ を用いると、**Fig. 2** の $E[\alpha]$ を求める際に ω に関する積分が発散するという問題が生ずるが⁷⁾、これは構造物の応答を解析する過程で解消する性質のものであるので、ここでは簡単のため、等価継続時間 τ の算定にはすべて **Fig. 2** を用いることにする。

3. 線形 1 自由度系の r.m.s. 応答および応答間の相関係数

構造物が線形 1 自由度系で表わされる場合には、地動加速度 $\ddot{z}(t)$ に対する構造物の相対変位応答 $y(t)$ は、

ここで添字 l, m, s は、 l -パネル、 m -パネル、リブに対する量であることを示し、 φ_s はリブのねじれ角を示す。 EI, EI_m, GK, r_s, A はそれぞれリブをはり柱と評価したときの等価な z 方向への曲げ剛性、曲げねじれ剛性、サンブナンのねじれ剛性、極2次半径、断面積を示し、 $\bar{\sigma}_s$ はリブに作用する平均軸圧縮応力を示す。下添字 t は $\bar{\sigma}_s$ がリブに作用しているときのそれぞれの接線係数であることを示す。

Fig. 1c に示すようにリブを軸圧縮力 $P=A\bar{\sigma}_s$ と分布横力 q 、分布トルク m_T を受けるはり柱と考えて取扱う。このはり柱に作用する分布横力とトルクはそれぞれ板パネルからのモーメントと等価せん断力の差により与えられる。

$$q = (V_y)_m - (V_y)_l, \quad m_T = (M_y)_l - (M_y)_m \quad \dots\dots\dots(8. a, b)$$

式(4)を導いた場合と同様にして l -パネル、 m -パネル、リブともに x 方向のたわみを半波の正弦曲線で仮定する。

$$w_l = f(y) \sin \frac{\pi}{a} x, \quad w_m = g(y) \sin \frac{\pi}{a} x, \\ w_s = \delta_s \sin \frac{\pi}{a} x \quad \dots\dots\dots(9. a \sim c)$$

リブのねじれに関する成分を無視し、式(7.d)で $m_T=0$ とおくと式(6),(8),および式(9)により、リブと板パネルの結合連続条件式(7)は未知関数 $f(y), g(y), \delta_s$ を用いて次のように表わせる。

$$f(s) = g(s) = \delta_s, \quad f'(s) = g'(s) \quad \dots\dots(10. a, b) \\ \left\{ (EI)_t \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 - A\bar{\sigma}_s \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \right\} f(s) = k_3 D_0 \{ f''(s) - g''(s) \}, \quad f''(s) = g''(s) \quad \dots\dots(10. c, d)$$

ここで s はリブの位置の y 座標である。 l -パネルの $f(y)$ と m -パネルの $g(y)$ に関し無補剛板に対する差分方程式(4)が成立し、それぞれの板パネルのリブと接する非載荷辺での境界条件が式(10)で与えられる。式(10)を差分表示し式(4)と連立させて解くとリブの位置する差分点 i における差分方程式だけが式(4)と異なり、次のように与えられる。

$$C_{3,i} \cdot Y_{i-2} + C_{4,i} \cdot Y_{i-1} + D_{3,i} \cdot Y_i + C_{2,i} \cdot Y_{i+1} + C_{1,i} \cdot Y_{i+2} = D_i \cdot \lambda^2 \cdot Y_i \quad \dots\dots\dots(11)$$

ただし $D_{3,i}, D_i$ は次のように与えられる。

$$D_{3,i} = C_{3,i} + \frac{1}{k_{2,i}^2} \cdot S_1 \cdot C_{1,i} \cdot C_{5,i}, \\ D_i = C_i + \frac{1}{k_{2,i}^2} \cdot S_2 \cdot C_{1,i} \cdot C_{5,i} \quad \dots\dots\dots(12. a, b)$$

ここで、 $C_{j,i} (j=1 \sim 5), C_i$ および λ は式(5)で与えられる。 S_1, S_2 はリブの影響を表す係数で次式で与えられる。

$$S_1 = \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{b}{a} \right)^4 \frac{\pi^4}{n^3} \cdot \eta \cdot r,$$

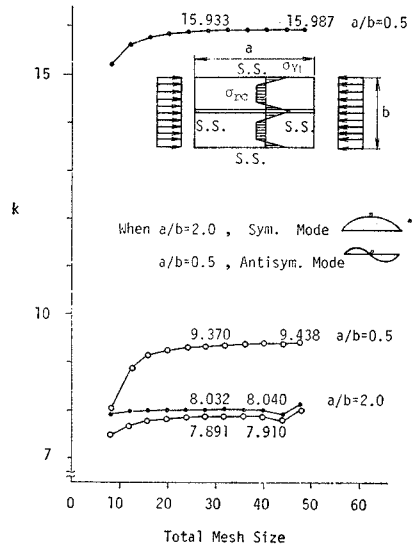


Fig. 2 Convergence of Finite Difference Analysis; $\delta=0.2, \gamma=10.0$; $\bullet-\bullet-\bullet$: free of residual stress, $-O-O-$: with residual stress, $\sigma_{rc}/\sigma_Y=0.5$ and $\sigma_{cr}/\sigma_Y=0.5$

$$S_2 = 12 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{\pi^2}{n^2} \xi \cdot \delta \quad \dots\dots\dots(13. a, b)$$

ここで ν はポアソン比である。 r, δ は弾性時のリブの剛比、面積比、 η はリブの接線剛性を弾性時の剛性に割った値、 ξ はリブの平均圧縮応力を降伏応力に割った値で次のように与えられる。

$$r = \frac{EI}{bD}, \quad \delta = \frac{A}{bt}, \quad \eta = \frac{(EI)_t}{EI}, \quad \xi = \frac{\bar{\sigma}_s}{\sigma_Y} \quad \dots\dots\dots(14. a \sim d)$$

ここで D は板の曲げ剛性で、 $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ で与えられる。リブがない場合には $S_1=S_2=0$ となり式(11)は式(4)と一致する。

式(4)と式(11)を用いて残留応力を有するリブ付板の非弾性座屈問題を解くことができる。純圧縮を受ける中央に一本のリブを持つリブ付板の弾性座屈強度についての数値計算の精度を調べた結果を Fig. 2 に示す。この図で横軸はリブ付板の幅方向の全体の分割数、たて軸は座屈係数 k で次のように定義する。

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 t} \quad \dots\dots\dots(15)$$

板パネルに発生している残留応力として Fig. 2 の挿入図に示すように非載荷辺とリブ軸の位置で降伏応力に等しい値の引張残留応力が生じ、その中間部で一定の圧縮残留応力が生じている分布形を仮定した。残留応力を有する場合の結果は圧縮残留応力 σ_{rc} の値が降伏応力の $\frac{1}{2}$ 、座屈応力が降伏応力の $\frac{1}{2}$ のときでの値でリブ内に存在する残留応力の影響は考慮されていない。

$$+e_0\{(1+\xi)s, s, t\}$$

$$e_0(s_1, s_2, t) = e^{-(s_1+s_2)t} - e^{-2h_n\omega_n t}$$

$$A = (1+\xi)^{(1+1/\xi)}/\xi, \lambda(s_1) = h_n - s_1/\omega_n$$

このようにして算出された $\sigma_y(t), \sigma_z(t), \rho_{yz}(t), \rho_{yy}(t_1, t_2), \rho_{yz}(t_1, t_2)$ の例を Fig. 3, 4 に示した。Fig. 3 において、 $\sigma_y(t), \sigma_z(t)$ が最大となる時刻は、地震動の強度 $f(t; \tau)$ が最大となる時刻 t_m より遅れて現われており、この傾向は、 τ/T_0 が小さいか T_n/T_0 (T_n は固有周期) が大きくて地震動が相対的に衝撃的なほど、また減衰定数 h_n が小さくて初期条件の影響が長時間に及ぶほど著しいことが注目される。この時間差の大小は、次節以降で述べる最大応答の確率分布の近似解法の精度に影響を与える。さらに、 $\sigma_y(t)$ の大きさを表わす一つの尺度として、 $\sigma_y(t)$ の最大値 $\sigma_{y\max}$ の例を Fig. 5 に示した。

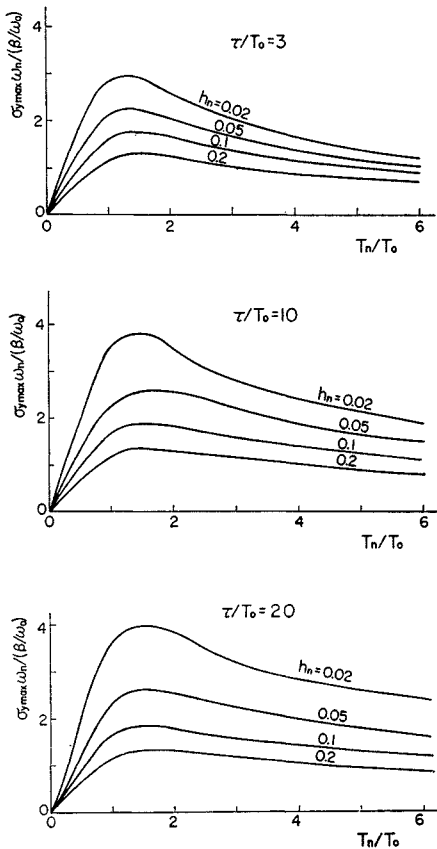


Fig. 5 Maximum r.m.s. Response.

4. 最大応答の確率分布

(1) 純出生過程による解法

地震応答 $y(t)$ の絶対最大値を Y とすると、 Y の確

率分布 $\phi(Y)$ は次式のように表わすことができる。

$$\phi(Y) = P[\max|y(t)| \leq Y; 0 \leq t < \infty] \dots\dots(12)$$

式(12)は、純出生過程の微分方程式の一つで表現され、それを解くと次の形の解をうる^{7), 13)}。

$$\phi(Y) = a_0(Y) \exp\left\{-\int_0^\infty c_0(Y, t) dt\right\} \dots\dots(13)$$

ただし、

$$a_0(Y) = P[|y(0)| \leq Y]$$

$$c_0(Y, t) dt = \frac{P[|y(t+dt)| > Y \cap \max|y(t')| \leq Y; 0 \leq t' \leq t]}{P[\max|y(t')| \leq Y; 0 \leq t' \leq t]} \dots\dots(14)$$

式(13)の $\phi(Y)$ は、最大応答の確率分布の厳密解を表わすが、同式右辺の $c_0(Y, t)$ を求めることが困難なために、このままでは $\phi(Y)$ を計算することができない。そこで、 $c_0(Y, t)$ を近似的に表わすことを試みる。式(14)は連続な t' について満足されねばならないが、いま

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r < t$$

なる r 個の時刻についてのみ同式を満足するような確率量 $\bar{c}_0(Y, t)$ を考える。すなわち

$$\bar{c}_0(Y, t) dt = \frac{P\left[\{|y(t+dt)| > Y \cap |y(t)| \leq Y\} \cap \left\{\bigcap_{k=1}^r |y(t_k)| \leq Y\right\}\right]}{P\left[|y(t)| \leq Y \cap \left\{\bigcap_{k=1}^r |y(t_k)| \leq Y\right\}\right]} dt \dots\dots(15)$$

ただし、

$$Q_1(Y, t) dt = P\left[\{|y(t+dt)| > Y \cap |y(t)| \leq Y\} \cap \left\{\bigcap_{k=1}^r |y(t_k)| \leq Y\right\}\right]$$

$$Q_2(Y, t) = P\left[|y(t)| \leq Y \cap \left\{\bigcap_{k=1}^r |y(t_k)| \leq Y\right\}\right]$$

かかる $\bar{c}_0(Y, t)$ を $c_0(Y, t)$ の近似的表現として用いると、式(12)の近似式として次式をうる。

$$\phi(Y) \cong a_0(Y) \exp\left\{-\int_0^\infty \bar{c}_0(Y, t) dt\right\} \dots\dots(16)$$

式(15)の $Q_1(Y, t), Q_2(Y, t)$ は次式のように表わされる^{11), 13)}。

$$Q_1(Y, t) = \frac{\sigma_v}{\sigma_t} \int_{-Y/\sigma_t}^{Y/\sigma_t} d\xi_1 \int_{-Y/\sigma_t}^{Y/\sigma_t} d\xi_2 \dots \int_{-Y/\sigma_t}^{Y/\sigma_t} \left\{ \int_{-\infty}^{\xi_t} |\xi_t| \phi_{1n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, -\frac{Y}{\sigma_t}, \xi_t) d\xi_t \right. \\ \left. + \int_0^\infty \xi_t \phi_{1n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \frac{Y}{\sigma_t}, \xi_t) d\xi_t \right\} d\xi_r \dots\dots(17)$$

$$Q_2(Y, t) = \int_{-Y/\sigma_t}^{Y/\sigma_t} d\xi_1 \int_{-Y/\sigma_t}^{Y/\sigma_t} d\xi_2 \dots \int_{-Y/\sigma_t}^{Y/\sigma_t} d\xi_r$$

$$\int_{-Y/\sigma_t}^{Y/\sigma_t} \phi_{2n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_t) d\xi_t \dots\dots\dots(18)$$

ただし,

$$\xi_i = y(t_i)/\sigma_i, \sigma_i = \sigma(t_i); i=1, 2, \dots, r$$

$$\xi_t = y(t)/\sigma_t, \dot{\xi}_t = \dot{y}(t)/\sigma_v, \sigma_t = \sigma_y(t), \sigma_v = \sigma_{\dot{y}}(t)$$

また $\phi_{1n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_t, \dot{\xi}_t)$, $\phi_{2n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r, \xi_t)$ は、それぞれの変数の確率密度関数である。

式 (17), (18) 右辺の確率密度関数 ϕ_{1n} , ϕ_{2n} の形は任意であるが, 2. で設定した地震動 $\ddot{z}(t)$ の振幅分布を正規分布としたこと, および線形構造物では入力が正規過程であれば応答もまた正規過程となることを考慮すれば, ϕ_{1n} , ϕ_{2n} についても多次元正規分布の場合が特に重要である。正規分布の場合には, 式 (17), (18) 右辺の積分の回数を 1 回減ずることができ^{11), 13)}, $r=0, 1$ の場合にはさらに簡略化できる¹³⁾。

以上の解法は, 近似的であるが, 相異なる時刻での応答間の相関の影響を取り入れたもので, 考慮する時刻の数 r を増すほど精度が向上する^{13), 14)}。以下, $r=0$ の場合を第一近似, $r=1$ を第二近似と順次呼ぶことにする。応答 $y(t)$ が過去の応答経歴から独立であるとする従来の研究^{4), 5), 6)}は, $r=0$ なる第一近似として本解法に含まれる。

前節 3. で求めた応答の分散および相関係数を本節の近似解法に用いて, 最大応答の確率分布を求めた。本報告では $r=1$ なる第二近似を採用し, t_1 としては比較的

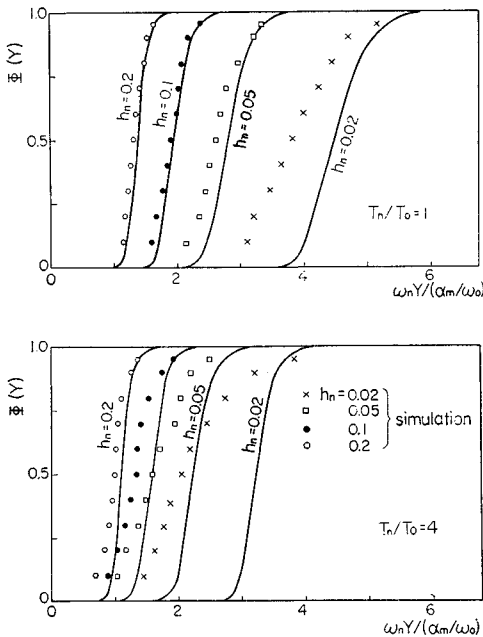


Fig. 6 Probability Distribution of the Maximum Earthquake Response Based on the Pure-Birth-Process Method ($\tau/T_0=3$).

精度が良い¹³⁾ $t_1=t-T_n/2$ を用いた。同時に, 電子計算機内のシミュレーションによって発生させた地震波に対する最大応答を運動方程式の数値積分によって求め, その累積頻度分布から最大応答の確率分布の数値実験値を算出して, これを用いて理論値の精度を検討した。標本数は各場合につき 40 である。計算結果の一部を Fig. 6~8 に示した。シミュレーションの結果が厳密解に近

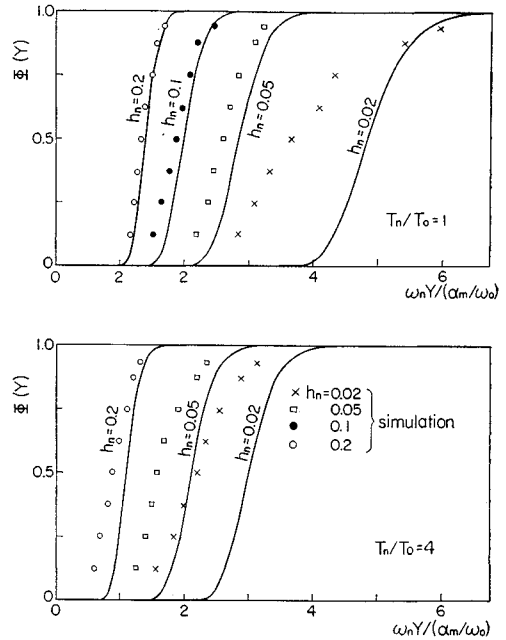


Fig. 7 Continued ($\tau/T_0=10$).

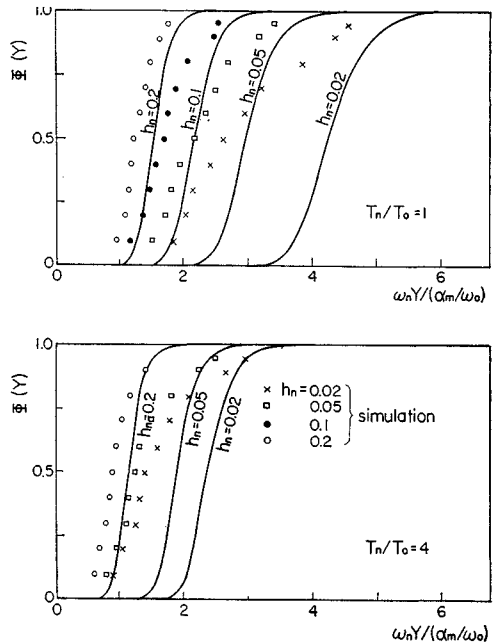


Fig. 8 Continued ($\tau/T_0=20$).

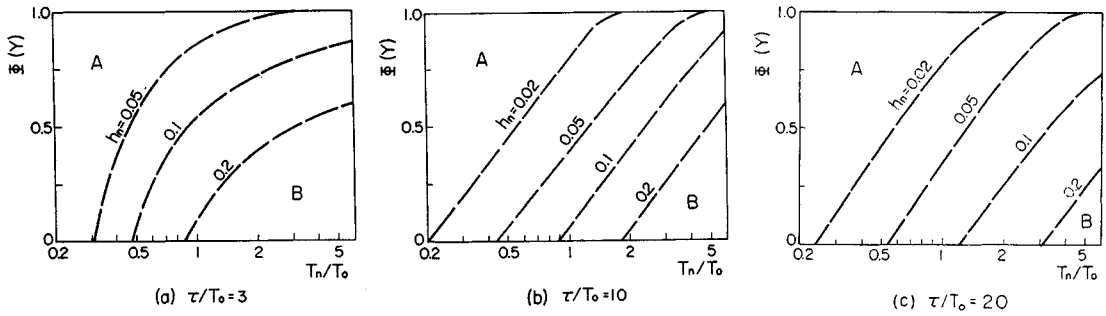


Fig. 9 Precision Zoning for the Pure-Birth-Process Method.

いものと考え、これらの計算結果から、純出生過程による近似解は、 T_n/T_0 が大きいほど、また τ/T_0 と h_n が小さいほど精度が低下することがわかる。その原因としては次のような事項が考えられる。i) h_n が小さくなると、かなり隔った時刻(たとえば T_n の数倍)の間でも応答間に比較的高い相関があり、本節の近似解法でも十分な精度を期待できない。ii) τ/T_0 が小さいか、 T_n/T_0 が大きくなると、地震動が構造物に対して衝撃的に作用することになり、Fig. 3 において $\sigma_y(t)$ が最大値 $\sigma_{y\max}$ となる時刻には、外力強度を表わす $f(t;\tau)$ はすでにかなり減少していることから、それ以後の応答には、減衰自由振動の影響が強いと考えられる。したがって、この部分も最大応答値に貢献すると考える本解法では、最大応答を過大に推定する結果となる。

以上の結果において、たとえば Fig. 7 の $\tau/T_0=10$ 、 $T_n/T_0=1$ 、 $h_n=0.05$ の場合を許容しうる誤差の限度とすれば、純出生過程による解法を適用しうる範囲は大概 Fig. 9 の A 領域で示される。たとえば、Fig. 9 (b) において、 $h_n=0.1$ 、 $T_n/T_0=2$ であれば、この解法は $\phi(Y) > 0.4$ の範囲で適用可能である。ただし、Fig. 9 はあくまで精度の一つの目安を示すもので、実際の精度は同図の曲線の両側で連続的に変化していることはいうまでもない。

(2) 応答包絡線の極値による解法

純出生過程による近似解法の精度が低下するパラメーター領域では、他の方法によって最大応答の確率分布を求めることが必要となるが、精度低下の原因として前述した事項のうち、 T_n/T_0 が大きいか τ/T_0 が小さくて、構造物に対して地震動が相対的に衝撃的である場合には、 $\sigma_y(t)$ が最大値 $\sigma_{y\max}$ をとる時刻前後の応答のみが最大応答に関与し、それ以後の応答は主として自由振動によるものとして無視できるような解法が望ましい。ここではそのために、応答包絡線の極値分布に関する理論を応用する。

不規則外力に対する構造物の応答は、多くの場合固有

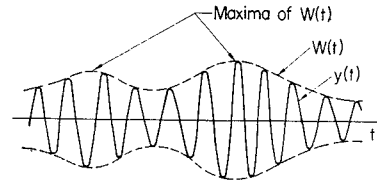


Fig. 10 Illustration of Amplitude $y(t)$, Envelope $W(t)$ and Peak Envelope (Maxima of $W(t)$).

周期に近い周期で振動する狭帯域の確率過程で表わされ、Fig. 10 のように、振動周期に比較してゆるやかに変動する包絡線 $W(t)$ を持つが、 $W(t)$ の極値*は、それが発生した時刻前後での応答 $y(t)$ の絶対最大値とみなしてよい。前述のように、応答の r.m.s. 強度 $\sigma_y(t)$ が最大となる比較的短い時間領域で発生するような最大応答を論ずるのがここでの目的であるから、 $\sigma_y(t) = \sigma_{y\max}$ となる時刻の近傍における $W(t)$ の極大値が地震動に対する最大応答を表わすものとする。

狭帯域の確率過程における包絡線の極値の分布はすでに Rice¹⁵⁾ によって取り扱われ、正規定常過程に対する解が与えられている。本研究では構造物の応答は非定常過程であるが、ここで問題にしているような $\sigma_y(t)$ が最大値をとる時刻前後では、 $\sigma_y(t)$ はきわめてゆるやかに変化し、 $\rho_{yy}(t)$ は 0 に近い値となるから、 $y(t)$ はほぼ定常過程とみなしてよいと考えられる。このような論拠により、包絡線の極値分布に関する Rice の結果を構造物の応答に適用解析した結果、最大応答の確率密度関数 $\phi(Y)$ として次式が得られた。

$$\phi(Y) \equiv \phi_E(Y) = p(Y) \int_0^\infty p(Y) dY \dots\dots (19)$$

ただし、

$$p(Y) = \frac{1}{4 \sigma_{ym}} \left\{ \frac{32 a^2 Z^3}{a^2 - 1} \left(\frac{Y}{\sigma_{ym}} \right)^3 \right\}^{1/2} \exp$$

* 本論文冒頭脚注の講演発表では $W(t)$ の極値を peak envelope と称したが、 $y(t)$ の極値と混用されやすいので、本論文においては、この表現は図面の説明にのみ用い、本文中では応答包絡線の極値と呼ぶことにする。

$$\left\{ -a^2 Z^2 \left(\frac{Y}{\sigma_{ym}} \right)^2 \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n A_n}{\Gamma \left(\frac{n}{2} + \frac{7}{4} \right)} \left(\frac{Y}{\sigma_{ym}} \right)^n$$

.....(20)

$$A_n = \begin{cases} 1; & n=0 \\ n+1 + \sum_{m=1}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\dots\left(m-\frac{1}{2}\right)}{m!} (n-m+1)b^m; & n \geq 1 \end{cases}$$

$$b = \frac{1}{2}(3-a^2), \quad a = \frac{\sqrt{b_1} \sigma_{ym}}{b_2}, \quad Z = \frac{b_2}{\sqrt{2(\sigma_{ym}^2 b_1 - b_2^2)}}$$

$$b_k = \int_0^{\infty} (\omega - \omega_n)^k S_y(\omega) d\omega; \quad k=2, 4$$

$\Gamma(x)$ はガンマ関数である。

これらの結果から、最大応答の確率分布は次式で与えられる。

$$\phi(Y) \cong \phi_E(Y) = \int_0^Y \phi_E(Y) dY \quad \text{.....(21)}$$

式 (20) の σ_{ym} は、応答レベルが最大となる時刻前後における r.m.s. 応答 $\sigma_y(t)$ の代表値であり、後述の数値計算結果 (Fig. 12~14) において Y の大きい領域で理論解とシミュレーションの結果とを一致させるといふ基準を用いた結果、Fig. 11 によって σ_{ymax} から換算すればよいことがわかった。また、式 (20) の計算に必要な $S_y(\omega)$ は、応答 $y(t)$ のスペクトル密度に一致すべきものであるが、式 (19), (20) は、固有振動数 ω_n に関して対称なスペクトル密度に関してのみ成り立つ¹⁵⁾ から、 $S_y(\omega)$ の近似的表現として次式を用いる。

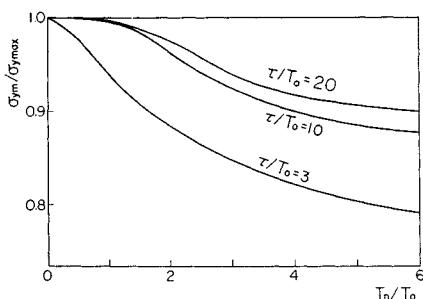


Fig. 11 Reduction Factor to Determine σ_{ym} .

$$S_y(\omega) \cong \bar{S}_y(\omega) = \frac{\sigma_{ym}^2}{\pi h_n \omega_n} \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{\Gamma(1/4)}{2\pi h_n} \right)^4 \left(\frac{\omega}{\omega_n} - 1 \right)^4 \right\} \quad \text{.....(22)}$$

式 (22) の $\bar{S}_y(\omega)$ は、 $\omega = \omega_n$ の近傍で $S_y(\omega)$ と同様に 4 次曲線的に変化すること、式 (22) から求められる応答分散値が σ_{ym}^2 に一致すること、ピークの高さが

$$\bar{S}_y(\omega_n) = S_y(\omega_n) = \sigma_{ym}^2 / (\pi h_n \omega_n)$$

となることを条件として定めたものである。式 (22) の $S_y(\omega)$ を用いることにより、式 (20) の諸定数は次式

のように求められる。

$$b_2 = \frac{\sigma_{ym}^2 r^3 \omega_n^2}{2\pi h_n} \Gamma \left(\frac{3}{4} \right), \quad b_4 = \frac{\sigma_{ym}^2 r^5 \omega_n^4}{2\pi h_n} \Gamma \left(\frac{5}{4} \right),$$

$$r = 2\pi h_n / \Gamma \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$Z = 0.43195, \quad a^2 = 2.1884, \quad b = 0.40578$$

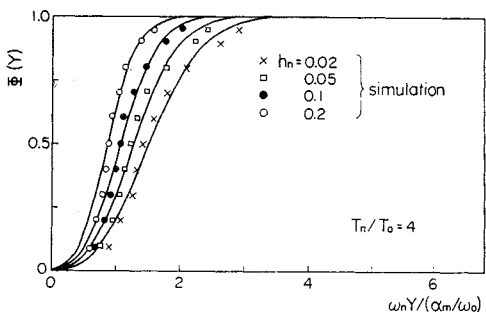
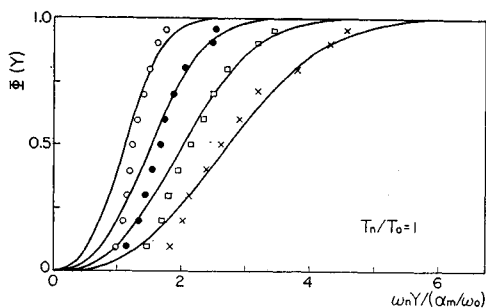


Fig. 12 Probability Distribution of the Maximum Earthquake Response Based on the Peak Envelope Method ($\tau/T_0=3$).

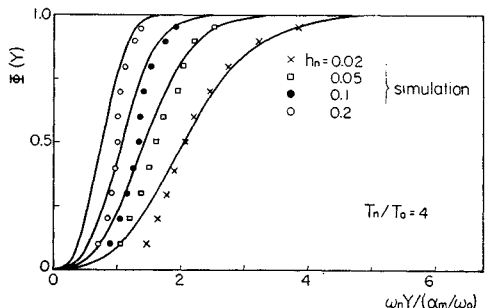
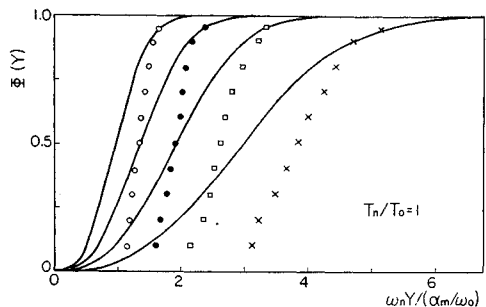


Fig. 13 Continued ($\tau/T_0=10$).

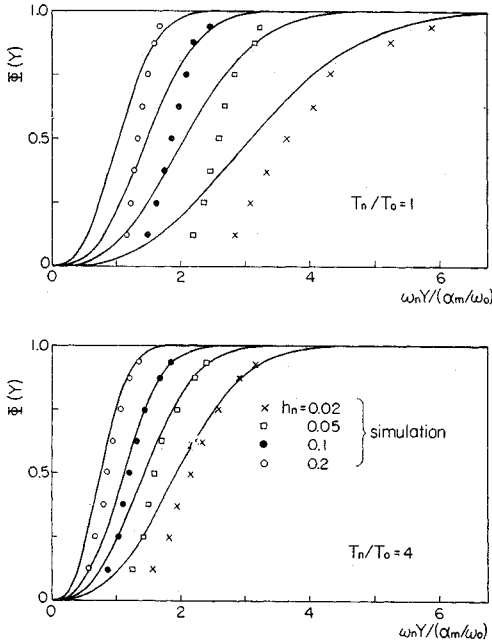


Fig. 14 Continued ($\tau/T_0=20$).

以上のようにして応答包絡線の極値の理論から最大応答の確率分布の近似解が求められたが、式 (21) に対する数値計算結果の一部を、シミュレーションの結果とともに Fig. 12~14 に示した。また、Fig. 9 と同様にして応答包絡線の極値による解法の適用範囲を示したのが Fig. 15 の A 領域である。Fig. 6~8 と Fig. 12~14、または Fig. 9 と Fig. 15 を比較すると、純出生過程による解法の精度が低下する範囲では応答包絡線の極値による解法の精度が良く、逆に純出生過程による解法の精度が良い範囲、すなわち応答 $y(t)$ が全継続時間にわたってランダムな性質を有する場合には、応答包絡線の極値による解法の精度が悪化することがわかる。すなわち、比較的短周期の構造物に定期的な地震動が作用する場合ほど純出生過程による解法、比較的長周期の構造物に衝撃的な地震動が作用する場合ほど応答包絡線の極値による解法が優れているといえる。

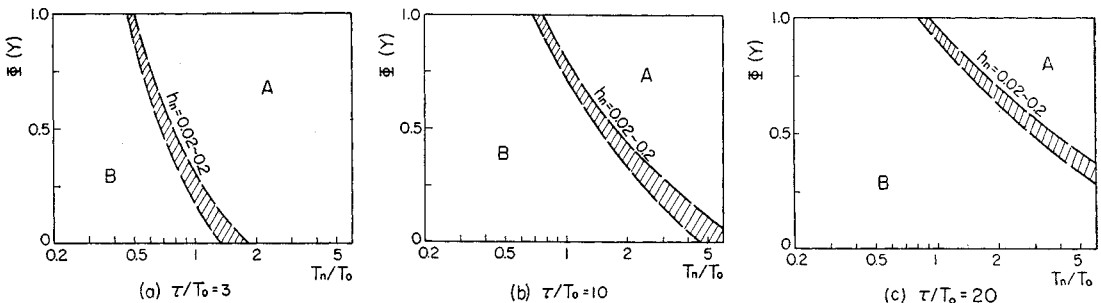


Fig. 15 Precision Zoning for the Peak Envelope Method.

5. 最大地震応答の推定法について

前節で論じた最大応答の確率分布 $\phi(Y)$ は、不規則地震動に対する構造物の最大応答について、最も一般的な確率統計的情報を与えるものであり、これに基づいて、実際の耐震設計に関連する種々の確率量を導くことができる。1. で述べたように、最大応答の確率分布は、それ自体が構造物の非破壊確率に密接に関連した重要な確率量であるが、最大地震応答の特性を包括的に把握し、その結果を耐震設計に結びつけて行くためには、これらの結果をより簡潔な図表で表示して、考察を容易にするのが望ましいと考えられる。本節では、このような目的のため、 $\phi(Y)$ から求められる二、三の確率量から最大地震応答の確率統計の性質を考察し、その推定法を論ずる。

(1) 平均応答スペクトル

最大地震応答の期待値 $E[Y]$ に対して

$$S_D = E[Y], S_V = \omega_n S_D, S_A = \omega_n^2 S_D \dots\dots(23)$$

とおき、 S_D, S_V, S_A と固有周期 T_n との関係を図示した結果は、実地震波に対する応答解析の分野で発達してきた平均応答スペクトルに対応するもので、それぞれ変位応答スペクトル、速度応答スペクトル、加速度応答スペクトルを表わす。

前節の解法のうち、純出生過程による解法から $E[Y]$ を求めるためには、次式を用いればよい。

$$E[Y] = \int_0^{\infty} \{1 - \phi(Y)\} dY \dots\dots(24)$$

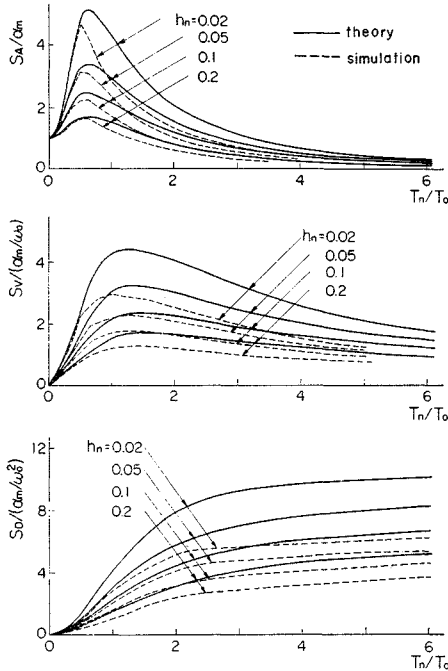
また、応答包絡線の極値による解法からは次の結果が得られた。

$$E[Y] \cong \int_0^{\infty} Y \phi_E(Y) dY = 2.5038 \sigma_{ym} \dots\dots(25)$$

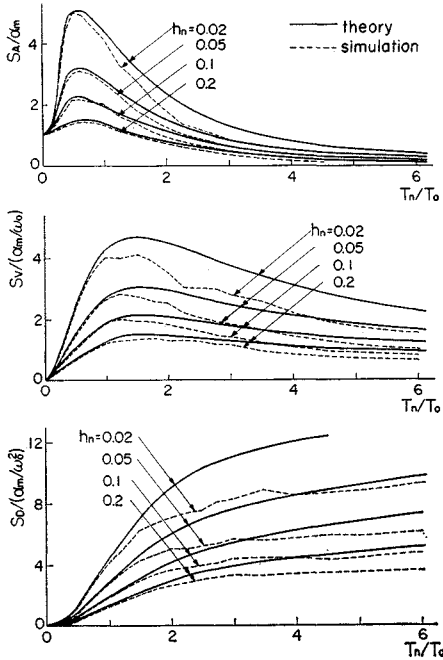
このようにして得られた平均応答スペクトルをシミュレーションの結果とともに無次元表示したのが Fig. 16, 17 で、Fig. 16 は純出生過程による解法、Fig. 17 は応答包絡線の極値による解法の結果である。両図を比

較すると、これら二種の解法の精度は、当然のことながら、前節で論じたのと同様の傾向で変化することがわかる。

次に Fig. 16, 17 において、地震動の継続時間 τ の



(a) $\tau/T_0=3$



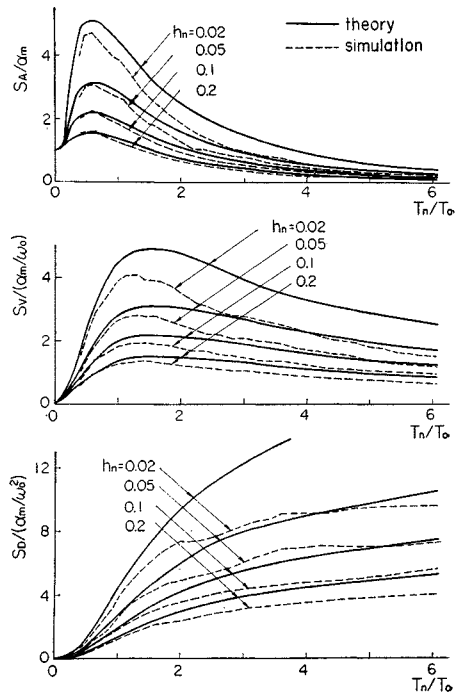
(b) $\tau/T_0=10$

増大とともに平均最大応答が増加している。この傾向は全体としてはあまり著しくないが、たとえば $h_n=0.02$ の場合で $T_n/T_0 > 1$ なる長周期構造物に $\tau/T_0=3$ 程度の地震動が作用した場合には、明らかに $\tau/T_0=10, 20$ の場合より低い応答値となっている。このことは、衝撃的な地震動が長周期構造物に作用しても、応答が十分に大きくなる前に地震動が終息することを意味しており、これは実地震に対する応答解析の結果とも一致する¹⁰⁾。また、減衰定数 h_n との関係については、 h_n が小さいほど初期条件による拘束が長時間におよぶ¹⁴⁾結果、継続時間の影響を受けやすいものと考えられる。

さらに Fig. 16, 17 で、特定の固有周期 T_n に対する平均最大応答は、当地震動の卓越周期 T_0 の影響を受ける。最近、栗林・岩崎・辻¹⁷⁾により、平均応答スペクトルを地盤種別によって分類する試みが行なわれているが、地盤条件と T_0 の間に密接な関係があるとされていることをあわせ考えれば、この分野でのデータの集積の必要性を本節の結果からも確認できるであろう。

(2) 最大応答の変動係数

平均応答スペクトルは動的設計にしばしば用いられ、将来の地震観測結果の集積とともに上記(1)で論じたような諸特性が明らかになるにしたがってその有用性はさらに増大するであろうが、構造物の耐震安全性を明確



(c) $\tau/T_0=20$

Fig. 16 Mean Response Spectra Based on the Pure-Birth-Process Method.

にするためには、最大応答の平均値のみでなく、そのばらつきをも考慮に入れた議論が必要である。ここでは、次式で与えられる最大応答の変動係数 C_v を用いてこの問題を論ずる。すなわち、

$$C_v = \sigma_Y / E[Y] = \{E[Y^2] - (E[Y])^2\}^{1/2} / E[Y] \quad \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 σ_Y は最大応答の標準偏差である。

式 (26) 中の自乗平均 $E[Y^2]$ は、純出生過程による解法を用いるときは、

$$E[Y^2] = 2 \int_0^\infty dY \int_Y^\infty \{1 - \phi(Y')\} dY' \quad \dots\dots\dots (27)$$

から算出すればよく¹¹⁾、一方応答包絡線の極値による解法を用いる場合には、次式から求められる。

$$E[Y^2] \cong \int_0^\infty Y^2 \phi_E(Y) dY = 7.3269 \sigma_{ym}^2 \quad \dots (28)$$

C_v の数値計算結果とシミュレーションの結果を Fig. 18 に示した。同図からわかるように、純出生過程による解法 (p.b.p.m.) では C_v の値は 0.1~0.15 程度、応答包絡線の極値による解法 (p.e.m.) では $C_v = 0.41083$ の定数となる。シミュレーションの結果はほぼこれら二種の値の間で変化しているが、近似解法の精度に関するこれまでの議論と同様に、 T_n/T_0 が小さいか τ/T_0 が大きいほど純出生過程による結果に近く、逆の場合には応答包絡線の極値による結果に近い値を示している。

これらの計算結果は、平均応答スペクトルを耐震設計に用いる場合、その安全性の評価を一律に行なえないことを示している。構造物の耐震安全性は、終局性状を含めた多くの要素から総合的に評価されるものであるが、いま問題を単純化して、最大応答のみでその評価を行な

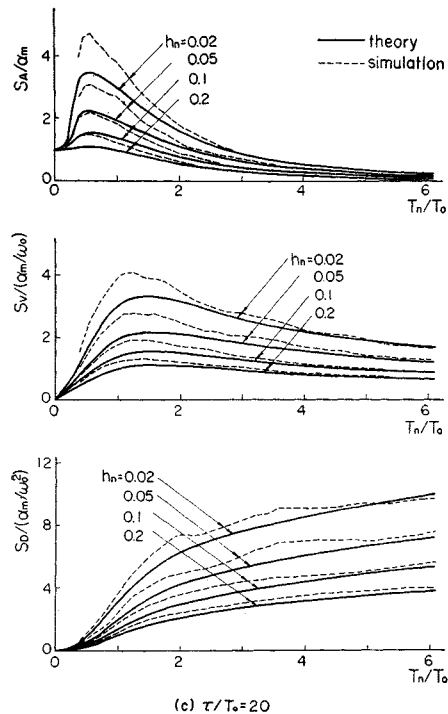
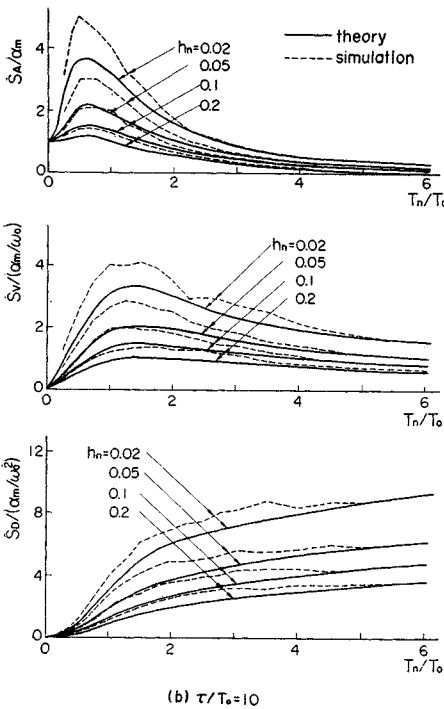
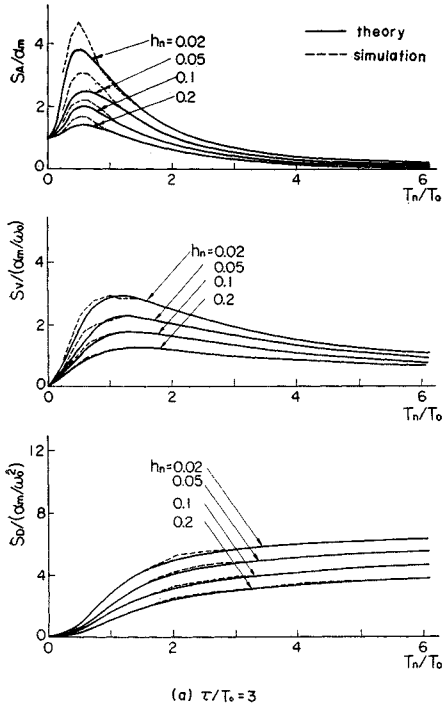


Fig. 17 Mean Response Spectra Based on the Peak Envelope Method.

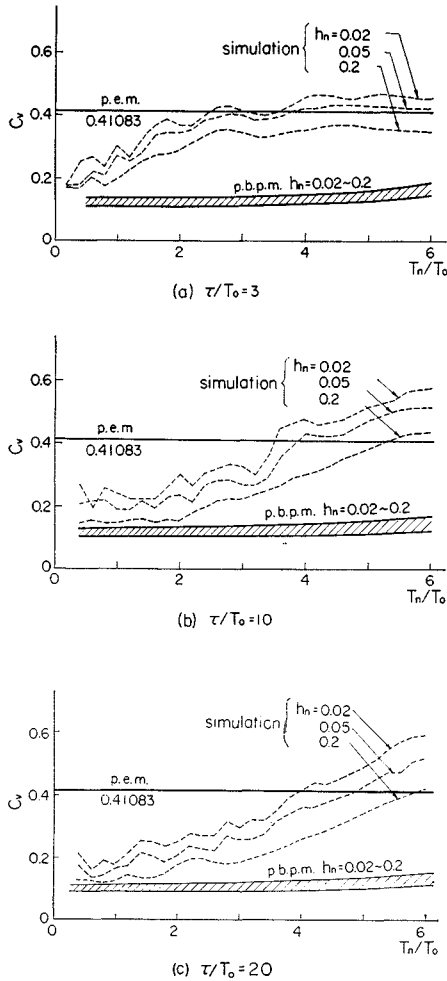


Fig. 18 Relative Dispersion Spectra of the Maximum Response (p.b.p.m.: pure-birth-process method, p.e.m.: peak envelope method).

うものと考え、平均応答スペクトルを用いて耐震設計を行なったとしても、その結果得られる構造物の非破壊確率は、固有周期によって、また地震動の継続時間によって変化することになる。

以上の議論に関して、固有周期の影響については片山¹⁸⁾が実地震記録の応答スペクトルから **Fig. 18** と同様の傾向を結論として導いている。これに加えて本節の結果は、この問題を不規則振動論の側面から一般化し、理論的根拠を示すものと考えられる。

(3) 一定の非超過（非破壊）確率に対する最大応答

構造物の耐震設計において、最大応答が一定の許容値を越えない確率（非超過確率）を非破壊確率と考え、これを安全性の基準として採用する場合、要求される非超過確率に対して最大応答の許容値が決定され、設計計算

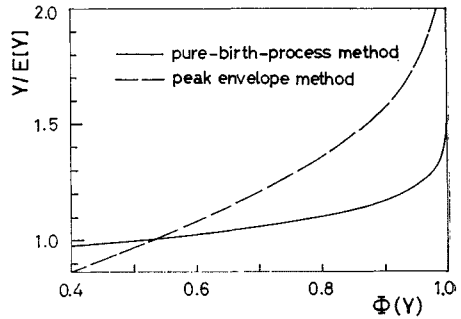


Fig. 19 Maximum Response Relative to Its Mean Value vs. the Non-Excess Probability.

が行なわれることになる。その際、許容最大応答値は、平均応答スペクトルにある係数を掛けて求めるようにしておくのが便利であるが、上記(2)の所論から、少なくとも線形構造物に関しては、この係数は構造物の固有周期により、また地震動の継続時間によって変化する。その典型的な場合として、前節 4. の二つの近似解法から得られた結果を示したのが **Fig. 19** である。純出生過程による解法の結果は $h_n=0.05$, $T_n/T_0=1$, $\tau/T_0=10$ に対するものであるが、最大応答とその平均値の比 $Y/E[Y]$ を論ずる限りは、他の場合についてもほとんど同様の結果が得られた。同図からわかるように、たとえば 95% の非超過確率が要求される場合には、純出生過程の方法を適用する構造物では平均応答スペクトルの 1.2 倍程度、応答包絡線の極値の方法を適用する場合には 1.7 倍程度の最大応答に対して設計を行なえばよいことになる。この場合に参照する応答スペクトルは、前述の議論から、地震動の継続時間および卓越周期によって分類されたものであるべきことはいうまでもない。

6. 結 論

本研究では、構造物の最大地震応答の確率分布を不規則振動論の立場から解析し、その結果に基づいて地震時における構造物の最大応答の推定法を論じてきた。得られた成果を要約すれば次のとおりである。

(1) 不規則地震動の確率モデルを導入し、等価継続時間を用いることによって、振幅強度の非正常性について種々の特徴を有する地震動を統一的に比較する一つの手法を示した。

(2) 不規則地震動を受ける構造物の最大応答の確率分布を求める方法として、純出生過程による解法と応答包絡線の極値による解法の二種の近似解法を考案した。

(3) これら二つの解法の結果とシミュレーションに

よる数値実験結果を比較検討することにより、近似解の精度と適用範囲を明らかにした。その結果、比較的短周期の構造物に定常的な地震動が作用する場合ほど純出生過程による解法、比較的長周期の構造物に衝撃的な地震動が作用する場合ほど応答包絡線の極値による解法が優れており、両者を適宜選択適用することによって、かなり広いパラメータ領域で最大地震応答の確率分布を求めうることがわかった。

(4) 最大応答の確率分布より求めた平均応答スペクトルに対する考察から、減衰定数が小さい長周期構造物の平均最大応答は地震動の継続時間の影響を受けやすいこと、また応答スペクトルの形状は、当然ながら地震動の卓越周期にも影響されることを指摘した。

(5) 最大応答の変動係数の特性から、平均応答スペクトルを耐震設計に应用する場合、その結果得られる耐震安全性を等しくするためには構造物の固有周期および地震動の継続時間によって応答スペクトルの評価を変える必要のあることを示し、上述の二種の解法を適用する場合について、一定の非超過確率に対して選定すべき許容最大応答の値を求めた。

本研究の成果を活用し、確率統計的方法を耐震設計に十分に取り入れうるまでには、緒論で触れたような多くの問題が解決されねばならないとともに、本研究で用いた手法についても、地震動のモデルをより豊富にし、さらに一般的な検討を加えること、最大応答の確率分布について、より広範なパラメータ領域での精度を検討することなどは今後の研究課題であるが、少なくとも本研究により、構造物の最大地震応答に関するいくつかの特性について、理論的裏付けを持った新たな説明を行ない若干の有用な定量的資料を提供しえたと考えられる。

本研究の遂行に当たり、多くの適切な御指導と御討議を賜った京都大学 後藤尚男教授に深謝の意を表する次第である。なお、本研究の数値計算はすべて京都大学大型計算機センターの FACOM 230-60 によったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Freudenthal, A.M., Garrelts, J.M. and Shinozuka, M.: The Analysis of Structural Safety, Proc. ASCE Vol. 92, ST 1, pp. 267-325, Feb., 1966.
- 2) Rosenblueth, E. and Bustamante, J.I.: Distribution of Structural Response to Earthquakes, Proc. ASCE, Vol. 88, EM 3, pp. 75-106, June, 1962.
- 3) Freudenthal, A.M. and Shinozuka, M.: Probability of Structural Failure under Earthquake Acceleration, Trans. JSCE, No. 118, pp. 9-15, June, 1965.
- 4) Yamada, Y. and Takemiya, H.: Studies on the Statistical Aseismic Safety of Relatively Long Period Structures, Proc. JSCE, No. 172, pp. 63-78, Dec., 1969.
- 5) Davenport, A.G.: The Application of Statistical Concepts to the Wind Loading of Structures, Proc. ICE, Vol. 19, pp. 449-472, 1961.
- 6) 小松定夫:長大吊橋の耐風設計法と安全性について, 土木学会論文集, 142号, pp. 10-19, 昭42.6.
- 7) 後藤尚男・亀田弘行:地震時における最大地動の確率論的研究, 土木学会論文集, 159号, pp. 1-12, 昭43.11.
- 8) Goto, H. and Toki, K.: Structural Response to Non-stationary Random Excitation, Proc. IV WCEE, Vol. 1, pp. 130-144, 1969.
- 9) 亀田弘行:地震時における構造物の最大応答の確率分布と平均応答スペクトルについて, 土木学会第25回年次学術講演会講演集, 第1部, pp. 509-512, 昭45.11.
- 10) Kameda, H.: Fundamental Studies on Probabilistic Methods of Structural Design to Resist Earthquakes, Doctoral Thesis submitted to Kyoto Univ., pp. 55-147, March, 1971.
- 11) Kameda, H.: Probability Distribution of the Maximum Response of Structures Subjected to Nonstationary Random Earthquake Motion, Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ., Vol. XXXIII, pp. 243-280, Oct., 1971.
- 12) Caughey, T.K. and Stumpf, H.J.: Transient Response of a Dynamic System under Random Excitation, Jour. Appl. Mech., Ser. E, No. 4, pp. 449-472, Dec., 1961.
- 13) 後藤尚男・亀田弘行:構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について, 京都大学防災研究所年報, 11号 A, pp. 239-253, 昭43.3.
- 14) 後藤尚男・亀田弘行:構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について一定常入力に対する過渡解一, 京都大学防災研究所年報, 12号 A, pp. 289-299, 昭44.3.
- 15) Rice, S.O.: Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, edited by N. Wax, Dover, pp. 133-294, 1954.
- 16) 後藤尚男・土岐憲三・横山康夫・亀田弘行・秋吉卓・石田昌弘:松代群発地震地域における震動観測結果について, 土木学会論文集, 145号, pp. 1-11, 昭42.9.
- 17) 栗林栄一・岩崎敏男・辻勝成:地震応答スペクトルに及ぼす諸因子, 第11回地震工学研究発表会講演概要, 土木学会, pp. 71-74, 昭46.7.
- 18) Katayama, T.: A Note on the Acceleration Ratio Spectrum of Seventy Japanese Strong-Motion Earthquake Records, Bull. Fac. Sci. & Engng., Chuo Univ., Vol. 12, pp. 7-18, Dec., 1969.

(1971.9.20・受付)