

擬似地震動に関する応答スペクトル

RESPONSE SPECTRUM TO SIMULATED EARTHQUAKE

小堀 為雄*・松崎 明**・篠塚 正宣***
By Tameo Kobori, Akira Matsuzaki and Masanobu Shinozuka

1. まえがき

従来、耐震設計はいわゆる「震度法」に基づいて行なわれてきたが、その意味するところ、適用範囲の制限など多くの問題点を含んでいることは周知のとおりである^{1),2),3)}。

これに対して近年、より合理的な耐震設計法として、地震動の特性や構造物の振動特性を考慮した平均応答スペクトルを用い、基本応答震度を定めて、耐震設計を行なおうとする、いわゆる修正震度法が提唱されるようになった。

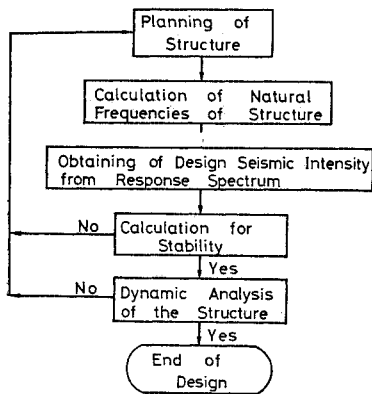


Fig. 1 An earthquake-proof design method under modified seismic coefficient method.

この修正震度法を打ち出したものは本州四国連絡橋耐震設計指針⁴⁾(1967)である。この指針による構造物の耐震設計法を図化すると Fig. 1 となる。このプロッ

* 正会員 工博 金沢大学教授 工学部土木工学科
 ** 正会員 工修 元金沢大学大学院学生・現日立造船(株)
 *** 正会員 Ph.D. Prof. of Columbia Univ., Dept. of Civil Engineering and Engineering Mechanics.

ク・チャートが示すようにこれまでの経験からまず構造物の形状を仮定し、この仮定された形状を有する構造物の固有周期を求め、この固有周期に対応する設計震度を応答スペクトル等から推定するのである。設計震度が決まれば従来の静的計算法にしたがって地震時における構造物の安定計算を行なうのである。もしさきに仮定した構造物が不安定ならば、再び構造物の形状を修正して計算を続ける。これが修正震度法である。さらに、地震波を入力波として構造物の動的解析を行なって検討することも考えられる。

このようにして耐震設計が行なわれるのであるが、この

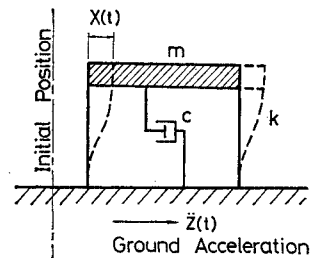


Fig. 2 A single degree of freedom System -Notation.

の方法で重要な役割を果たすのが応答スペクトルである。

この論文は、かかる応答スペクトルはいかなる理論的根拠に基づいて作成されているか、また作成されるべきであるかを、これまでのいくつかの応答スペクトルを例に比較検討したものである。

(1) 従来の平均応答スペクトルについて

1質点系線形構造物が $Z(t)$ なる地震動を受ける場合 (Fig. 2), その運動方程式は一般に次のように表わされる。

$$\ddot{X} + 2h\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = -\ddot{Z} \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 X : 構造物の相対変位

Z : 地盤変位

$h = c/2\sqrt{mk}$: 減衰定数

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$: 非減衰固有円振動数

m : 構造物の質量
 c : 減衰係数
 k : ばね定数

式 (1) の解は Duhamel 積分で次のように表わされる。

$$X(t) = -\frac{1}{\omega_0 \sqrt{1-h^2}} \int_0^t \ddot{Z}(\tau) e^{-\omega_0 h(t-\tau)} \times \sin \omega_0 \sqrt{1-h^2}(t-\tau) d\tau \quad \dots\dots\dots (2)$$

式 (2) を一般的に解くことは、 $\ddot{Z}(t)$ が地震動のように不規則な場合は困難であるが、Housner⁹⁾ らの研究で次のような近似が可能であることが報告されている。

$$X_{\max} = \frac{T_0}{2\pi} S_V = S_D \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\dot{X}_{\max} = S_V \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$(\ddot{X} + \ddot{Z})_{\max} = \frac{2\pi}{T_0} S_V = S_A \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 T_0 : 非減衰固有周期 = $2\pi/\omega_0$

S_A : 加速度応答スペクトル

S_V : 速度応答スペクトル

$$= \left| \int_0^t \ddot{Z}(\tau) e^{-\omega_0 h(t-\tau)} \sin \omega_0 \sqrt{1-h^2}(t-\tau) d\tau \right|_{\max}$$

S_D : 変位応答スペクトル

この結果によれば構造物の地震応答は、その固有周期や減衰定数によって異なる。このことに注目して M.A. Biot は 1942 年に地震応答スペクトルを用いた耐震設計法を提唱した。しかし彼は実際のスペクトルを求める際構造物の減衰を考慮しなかった。その後 Housner が米国における 4 個の強震記録から求めた多くの応答スペクトルから平均応答スペクトルを 1959 年に発表したことは周知のとおりである。

一方、わが国における平均応答スペクトルとしては、1964 年建設省土木研究所が発表したスペクトルがある⁹⁾。これは 1956 年から 1964 年 6 月までの間にわが国で観測された 6 個の地震、28 成分の加速度記録を対象としたものであるが、一般的傾向は Housner の結果と変わらないといえるであろう。

(2) 不規則振動論に基づく応答スペクトル

上記の方法は各構造物の固有周期や減衰定数に応じた最大応答を数値計算から求めるとい手順を多くの地震記録について行ない平均したものである。したがって個々の応答スペクトルはきわめて正確な値であるが、全体としてはそれぞれのスペクトルを平均しているので、地震や地盤条件などの影響がかえって不明確になってしまうという欠点がある。このような欠点を補うために近年では地震動を確率過程としてモデル化し、数式的に表現された地震動を用いて地震応答を研究するということが行なわれるようになってきた。初期の研究として、たと

えば Bycroft⁷⁾, Rosenblueth と Bustamante⁹⁾ は地震動を White noise で表現することを試みている。わが国では 1958 年に田治見⁹⁾ が地震動を定常ランダム波として扱い、地盤の周波数特性に金井の提案したスペクトル密度を用いて最大応答を算出している。

最近の研究としては山田・竹宮¹⁰⁾によるもの、亀田¹¹⁾による研究がある。前記の田治見がランダム変数の最大値推定にシミュレーションによって得られた経験的な関係式を用いているのに対し、後者の 2 つの研究ではいずれも確率論的な考察に基づいた最大値推定方法が採用されている。田治見、山田・竹宮および亀田による 3 つの研究を比較した場合、もう 1 つの大きな相違点は田治見、山田・竹宮が地震波および応答を定常ランダム波として扱っている点である。

さて、不規則振動論に基づく応答スペクトルを求めるといことは、結局式 (1) において $\ddot{Z}(t)$ に数式的表現を与え、不規則振動論を用いてランダム変数の最大値推定を行なうということである。したがって最も重要な点は地震動のモデル化とランダム変数の最大値推定方法であるといえるであろう。

(3) 本論文の目的

本研究は前節 (2) で述べた不規則振動論に基づく応答スペクトルを作成し、応答スペクトルに及ぼす各種要因の影響を考察することを目的としている。地震動および構造物の応答は定常ランダム波として扱い、ランダム変数の最大値推定方法には M. Shinozuka¹²⁾ が示した極値分布理論に基づく方法を採用する。

2. 本研究で用いたランダム変数の最大値推定方法

一般にランダム変数の最大値推定方法としては次の 2 つがある^{13), 14), 17)}。

- 1) threshold-crossing method
- 2) peak-distribution method

S.O. Rice によれば上記の 2 つの方法による結果は Low-pass filter あるいは Band-pass filter を通過する Stationary gaussian white noise の場合には、ほぼ同じであるという。本研究で採用した方法は 2) に属するものであり、M. Shinozuka の論文¹²⁾に基づいている。これは元来、S.O. Rice による雑音理論の研究をもとにして Cartwright と Longuet-Higgins¹⁸⁾ が波浪問題に関連して発表したものを、さらに押し進めた方法であるといえる。

Rice の研究から Shinozuka¹²⁾ の研究に至る経緯は付録 A で述べる。ここには本研究で用いる基本式をあげ

ておく。すなわち、定常ランダム時間変数 ξ の絶対最大値の期待値は次式で表わされる。

$$E[|\xi|_{\max}] = \sigma_{\xi} \{ [2 \ln(\nu_{\xi} T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_{\xi} T)]^{-1/2} \} \quad (6)$$

ここに、 ν_{ξ} : 単位時間当りに $\xi=0$ を正、または負の勾配で横切る回数

T : プロセスの継続時間または評価時間

σ_{ξ} : ξ の標準偏差

このように定常ランダム変数 ξ の絶対最大値の期待値は σ_{ξ} , $\nu_{\xi} T$ さえ知られていれば式 (6) を用いて推定されるのである。

文献 12) はこの結果を用いて主に地震を受ける構造物の破壊確率について論じているが、本研究ではこれを地震応答スペクトルに適用して従来の平均応答スペクトルとの比較を行なう。

3. 地震動のモデル化

現在、最も一般的に採用されている確率過程としてのモデル化の方法は定常確率過程 $g(t)$ と、これを非定常確率過程とする確定関数 $\Psi(t)$ との積で表わす方法である。

すなわち、地震加速度 $\ddot{Z}(t)$ を次式のように表わす。

$$\ddot{Z}(t) = \sum_{\nu} \Psi_{\nu}(\alpha_1, \dots, \alpha_r; t) g_{\nu}(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n; t) \quad (7)$$

ここに、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が地震動の各種特性を表わす不規則パラメーターである。簡単に、第 1 項のみをとって

$$\ddot{Z}(t) = \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_r; t) g(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n; t) \quad (8)$$

とする。

確定関数としてよく用いられるものは、

$$\Psi(\alpha_1, \alpha_2; t) = (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}) \cdot H(t) \quad (9)$$

である。ここに $H(t)$ は Heaviside の unit step function で、 α_1 および α_2 が不規則パラメーターである。

定常不規則過程 $g(t)$ は平均値ゼロとして、そのパワースペクトル密度を

$$S_g(\omega) = \frac{\alpha_3 + \alpha_4 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4 h_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \quad (10)$$

で表現することが多い¹⁹⁾。これは地盤を 1 質点系振動モデルで置き換えることを意味している。これとは別に地震加速度記録を 2 回積分した変位記録をもとに、次のようなパワースペクトル密度も使用されている²⁰⁾。

$$S_g(\omega) = \alpha_5 \frac{128}{3 \omega_g} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^4 \exp\left(-4 \frac{\omega}{\omega_g}\right) \quad (11)$$

式 (10) および式 (11) のいずれも、 $S_g(\omega)$ のピークは 1 個であり、地盤に 1 つの明瞭な卓越周期が現われる場合に適用される。これに対して文献 10) ではより一

般的に任意数の卓越周期が現われる場合にもモデル化できる方法を式 (10) を基礎式として提案している。

さて、本研究で用いたモデルは上記の 2 つのモデルを変形して次のようにする。

すなわち、地震動はある継続時間内で定常不規則過程であるとして、次のようにモデル化する。そこで確定関数 $\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_r; t) = \Psi(t)$ としては文献 20) と同様に、

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1: 0 \leq t \leq T \\ 0: t < 0, t > T \end{cases} \quad (12)$$

ここに、 T は地震動の継続時間である。

また、定常確率過程 $g(t)$ のパワースペクトル密度としては次の 2 つの形を採用し、地震時における最大応答について比較する。さらに、この 2 つのスペクトルについてタイプ I またはタイプ II の符号をつけて以後整理する。

タイプ I

$$S_{g1}(\omega) = \frac{S}{(\omega_{g1}^2 - \omega^2)^2 + 4 h_g^2 \omega_{g1}^2 \omega^2} \quad (13)$$

($-\infty \leq \omega \leq \infty$)

タイプ II

$$S_{g2}(\omega) = \beta^2 \frac{128}{3 \omega_{g2}} \left(\frac{\omega}{\omega_{g2}} \right)^4 \exp\left(-4 \frac{\omega}{\omega_{g2}}\right) \quad (14)$$

($0 \leq \omega \leq \infty$)

特に、この 2 つのタイプを選んだ理由は、両者は小さな ω の範囲で相当異なった関数形をもつことと、最大地震加速度の期待値に関する $g(t)$ および $\dot{g}(t)$ の t に関する 1 回微分の分散が数学的に問題なく求め得ることにある。ここでタイプ I について、周波数が非常に小さい場合を考えると、この $S_{g1}(0)$ が物理的に何を意味するかが、明確ではないが、このタイプの意味するところは、基盤に一樣なスペクトル密度 S をもつホワイト・ノイズが伝わった場合に振動モデルとしての地盤に現われる変位を地震加速度に想定しているのである。文献 12) に用いられているこの形は上の点で応答を問題とする場合のモデルとして 1 つの意味があると考えられる。

さて、両者を比較した場合、タイプ I はパラメーターが S, ω_{g1}, h_g の 3 個であり、タイプ II は β, ω_{g2} の 2 個である。そこで本研究では次の 3 条件を与えてこれらのパラメーターに関連性をもたせた。

- 1) $g(t)$ のパワースペクトル密度のピークが起こる振動数を一致させる。
- 2) $g(t)$ の分散を等しくする。
- 3) $\dot{g}(t)$ の分散を等しくする。

すなわち、

$$1) \omega_{g2} = \omega_{g1} \sqrt{1 - 2 h_g^2} \quad (15)$$

$$2) \beta^2 = S \pi / (2 h_g \omega_{g1}^3) \quad (16)$$

$$3) \beta^2 \frac{30}{16} \omega_{g2}^2 = \pi S / (2 h_g \omega_{g1}) \quad (17)$$

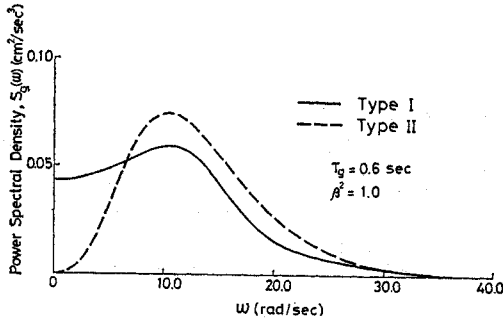


Fig. 3 Power spectral density of $g(t)$.

これらの条件式から次のような関係式が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} h_g &= \sqrt{\frac{7}{30}} \approx 0.48305 \\ \omega_{g1} &= \sqrt{\frac{30}{16}} \omega_{g2} \approx 1.3693 \omega_{g2} \\ S &= \frac{15\sqrt{7}}{16} \frac{\beta^2 \omega_{g2}^3}{\pi} \approx 2.4804 \frac{\beta^2 \omega_{g2}^3}{\pi} \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

このように h_g が一義的に定まってしまうのであるが、タイプIを用いる場合、通常 $h_g = 0.3 \sim 0.5$ として仮定されていることを考えると一応の対応ができたものと思われる。

Fig. 3 は $g(t)$ の分散を 1.0 として2つの $S_g(\omega)$ を描いたものである。ただし、タイプIは $0 \leq \omega \leq \infty$ の間で $S_{g1}(\omega)$ の値を2倍して描いてある。

4. 本研究における応答スペクトルの性質

通常、地震応答スペクトル曲線という場合、横軸に構造物の非減衰固有周期、縦軸に絶対加速度、相対速度あるいは相対変位の最大値をプロットした場合を意味している。それ以外の量を採用する場合、たとえば構造物の絶対加速度と地震加速度のそれぞれの最大値の比をとった建設省土木研究所⁶⁾ の場合はこれを動的係数スペクトル曲線と呼び、田治見⁷⁾ は伝達率と呼んでいる。しかし、本論文では応答スペクトルの名称を広い意味に解釈し、これを構造物の地震最大応答に関する曲線と考えて両軸にどのような量を用いるかは問題としない。

本研究では 2. の理論から応答スペクトル曲線を作成するのであるが、従来の平均応答スペクトル曲線からは 1) 固有周期が比較的大きい範囲では、構造物の減衰にかかわらず S_V がほぼ一定となる。2) 式 (3), (4) および (5) の関係があるということが知られており、本研究の地震動モデルと最大値推定方法を用いて、応答スペクトル曲線を求めた場合上の関係が成立するかどうか問題である。さらに、いくつかの不規則パラメーターが応答スペクトルに及ぼす影響がどのようであるかの2点

が問題となる。

またさらに、これまでに得られた平均応答スペクトル曲線との定量的比較や他の研究による応答スペクトルとの比較を行なう。しかる後に、最も合理的な地震応答スペクトル曲線はいかにして作成すべきかについて若干の考察を加える。

(1) 各種分散の算出

a) 地震動に関する分散¹²⁾

タイプI

$$\sigma_F^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4h_g^2 \omega_g^2 \omega^2} d\omega = \frac{\pi S}{2h_g \omega_g^3} \dots\dots\dots (19)$$

$$\sigma_{\dot{F}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_g(\omega) d\omega = \frac{\pi S}{2h_g \omega_g} \dots\dots\dots (20)$$

式 (19) および (20) の無限積分は留数定理の応用によって求められる。

タイプII²⁰⁾

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 &= \int_0^{\infty} S_g(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \beta^2 \frac{128}{3\omega_g} \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^4 \\ &\cdot \exp\left(-4\frac{\omega}{\omega_g}\right) d\omega = \beta^2 \frac{128}{3 \times 4^5} \\ &\cdot \int_0^{\infty} x^4 \exp(-x) dx = \beta^2 \frac{128}{3 \times 4^5} \Gamma(5) = \beta^2 \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{F}}^2 &= \int_0^{\infty} \omega^2 S_g(\omega) d\omega = \beta^2 \frac{128 \omega_g^2}{3 \times 4^7} \\ &\cdot \int_0^{\infty} x^6 \exp(-x) dx = \beta^2 \frac{128 \omega_g^2}{3 \times 4^7} \Gamma(7) \\ &= \beta^2 \frac{30}{16} \omega_g^2 \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ここに、 $x = 4 \frac{\omega}{\omega_g}$

$\Gamma(n) = (n-1)!$ ガンマ関数

このように地震動の分散を求めるにはタイプIIの方が数学的に扱いやすいといえる。

次に、この種の解析に用いられる不規則指数 (Random Index) ϵ^2 であるが、タイプIIについては β, ω_g にかかわらず $\epsilon^2 = 0.4643$ となる。なぜなら

$$\sigma_{\dot{F}}^2 = \int_0^{\infty} \omega^4 S_g(\omega) d\omega = \beta^2 \frac{105}{16} \omega_g^4 \dots\dots\dots (23)$$

であり、 ϵ^2 は

$$\epsilon^2 = \frac{\sigma_F^2 \sigma_{\dot{F}}^2 - \sigma_{\ddot{F}}^4}{\sigma_F^2 \sigma_{\dot{F}}^2} = 0.4643 \dots\dots\dots (24)$$

となるからである。 ϵ^2 が不規則パラメーター β, ω_g にかかわらず一定となるということは、逆にタイプIIは地震波の不規則性を任意に変えられないことにもなる。

一方タイプIについては $\sigma_{\dot{F}}^2$ に関する無限積分が発散するので ϵ^2 は求められない。

b) 応答に関する分散

タイプ I

応答に関する各分散も地震動に関する分散と同様に無限積分となるが、留数定理の応用として求めることができる。ここでは文献 21) で上げられている公式*を用いて求めた結果を上げる。

① 相対変位 X の分散

$$\begin{aligned} \sigma_d^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |{}_a^d H(i\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega \\ &= S\pi \frac{(B_0^2/A_0)(A_2A_3 - A_1A_4)}{A_1(A_2A_3 - A_1A_4) - A_0A_3^2} \\ &= \frac{S\pi}{2\omega_0^2\omega_g^5} \frac{D_1}{D_1D_2 - q^2D_3^2} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

② 相対速度 \dot{X} の分散

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |{}_a^v H(i\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega \\ &= S\pi \frac{A_3B_1^2}{A_1(A_2A_3 - A_1A_4) - A_0A_3^2} \\ &= \frac{S\pi}{2\omega_g^3} \cdot \frac{D_3}{D_1D_2 - q^2D_3^2} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

③ 相対加速度 \ddot{X} の分散

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |{}_a^i H(i\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega \\ &= S\pi \frac{A_1B_2^2}{A_1(A_2A_3 - A_1A_4) - A_0A_3^2} \\ &= \frac{S\pi}{2\omega_g^3} \cdot \frac{D_2}{D_1D_2 - q^2D_3^2} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

④ 絶対加速度 $(\ddot{X} + \ddot{Z})$ の分散

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |{}_a^a H(i\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega \\ &= S\pi \frac{(B_0^2/A_0)(A_2A_3 - A_1A_4) + A_3B_1^2}{A_1(A_2A_3 - A_1A_4) - A_0A_3^2} \\ &= \frac{S\pi}{2\omega_g^3} \cdot \frac{D_1 + 4h^2D_3}{D_1D_2 - q^2D_3^2} \cdot q^2 \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

⑤ 絶対加速度 $(\ddot{X} + \ddot{Z})$ の 1 回微分の分散

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |{}_a^a H(i\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega \\ &= S\pi \frac{A_3B_1^2 + A_1B_2^2}{A_1(A_2A_3 - A_1A_4) - A_0A_3^2} \\ &= \frac{S\pi}{2\omega_g} \cdot \frac{4h^2D_2 + q^2D_3}{D_1D_2 - q^2D_3^2} \cdot q^2 \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

ここに、用いた A_i , および B_i の値を一括して Table 1 に示した。また、用いた記号は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= h_g - hq^3 + 4hh_gq(h_g + hq) \\ D_2 &= q(h + qh_g) \\ D_3 &= h_g - hq \\ q &= \omega_0/\omega_g \end{aligned} \right\} \dots\dots (30)$$

タイプ II

* $H(i\omega) = \frac{-i\omega^3B_3 - \omega^2B_3 + i\omega B_1 + B_0}{\omega^4A_4 - i\omega^3A_3 - \omega^2A_2 + i\omega A_1 + A_0}$

Table 1

	σ_d^2	σ_v^2	σ_i^2	σ_a^2	σ_a^2
A_0	$\omega_0^2 \omega_g^5$				
A_1	$2\omega_0\omega_g^4(hq + h_g)$				
A_2	$\omega_0^2 \omega_g^4 (4h + h_g)$				
A_3	$2(hq + h_g)$				
A_4	1				
B_0	-1	0	0	ω_0^2	0
B_1	0	-1	0	$2h\omega_0$	ω_0^2
B_2	0	0	-1	0	$2h\omega_0$
B_3	0	0	0	0	0

このタイプは積分の下限がゼロであるので、各分散は次のように求められる。

$$\sigma_d^2 = \beta^2 \frac{128}{3\omega_g^4} F_0 \dots\dots\dots (31)$$

$$\sigma_v^2 = \beta^2 \frac{128}{3\omega_g^2} F_1 \dots\dots\dots (32)$$

$$\sigma_i^2 = \beta^2 \frac{128}{3} F_2 \dots\dots\dots (33)$$

$$\sigma_a^2 = \beta^2 \frac{128}{3} q^2 (q^2 F_0 + 4h^2 F_1) \dots\dots\dots (34)$$

$$\sigma_a^2 = \beta^2 \frac{128\omega_g^2}{3} q^2 (q^2 F_1 + 4h^2 F_2) \dots\dots\dots (35)$$

ここに、

$$F_i = \int_0^{\infty} \frac{u^{(4+2i)} \exp(-4u)}{(q^2 - u^2)^2 + 4h^2q^2u^2} du \dots\dots\dots (36)$$

($i=0, 1, 2$)

ただし、 $q = \omega_0/\omega_g$ }
 $u = \omega/\omega_g$ } \dots\dots\dots (37)

さて、式 (36) の定積分が存在することは明らかであるが解析的に求めることは容易ではないので、この研究では数値積分の手法を用いることにした。

まず、被積分関数 f_i の形状を把握するために種々の q, h について計算して、Fig. 4 に示すようなグラフを描いた。これらのグラフから判断して無限積分の上限を

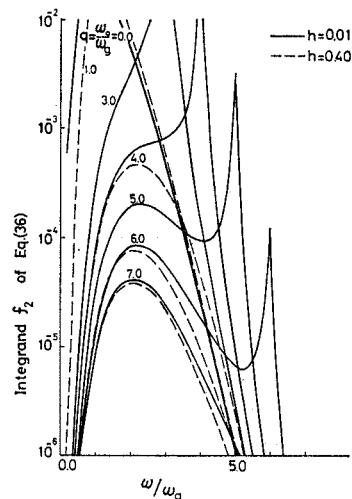


Fig. 4 Integrand f_2 of Eq. (36).

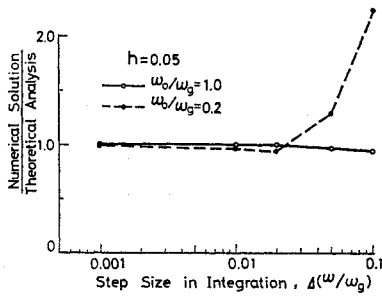


Fig. 5(a) An error in numerical integration of Eq. (36).

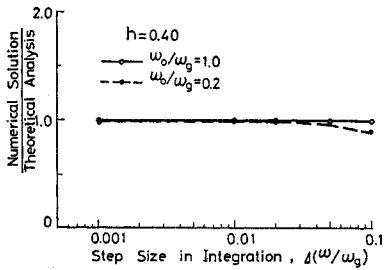


Fig. 5(b) An error in numerical integration of Eq. (36).

$$\mu_{上限} = 5.0 + q \leq 6.5$$

積分ステップは解析解の求め得るタイプIについて $h = 0.05$ および 0.4 の2種類、さらにそれぞれの h について $q = 0.2$ および 1.0 の計4通りについて積分ステップを替えて計算し、その結果を解析解と比較して求めた。その結果が Fig. 5 である。これらの図から積分ステップを定めた。

(2) 最大地震加速度の推定

次に、2. で述べたランダム変数の最大値推定法を用いて、タイプIおよびタイプIIの最大地震加速度を推定する。さて、加速度波形の単位時間当りの上下からのゼロクロスングを ν_F 、継続時間を T とすれば、式(6)の $\nu_g T$ は

$$\nu_F T = \frac{T}{\pi} \left(\frac{\sigma_{\dot{F}}}{\sigma_F} \right) \dots\dots\dots (38)$$

として表わされ²³⁾、最大加速度の最大値の期待値は式(6)から

$$E[\ddot{Z}_m] = \sigma_F \left\{ \left[2 \ln \left(\frac{T}{\pi} \frac{\sigma_{\dot{F}}}{\sigma_F} \right) \right]^{1/2} + 0.5772 \left[2 \ln \left(\frac{T}{\pi} \frac{\sigma_{\dot{F}}}{\sigma_F} \right) \right]^{-1/2} \right\} \dots\dots (39)$$

タイプI

式(38)は式(19)および式(20)を用いて

$$\nu_F T = \frac{\omega_g}{\pi} T = 2 \left(\frac{T}{T_g^*} \right) \dots\dots\dots (40)$$

と書き改められる。

タイプII

さらに、タイプIIについては、式(21)および式(22)を用いて、

$$\nu_F T = 2.7386 \left(\frac{T}{T_g^*} \right) \dots\dots\dots (41)$$

さて、2つのタイプにおいて $S_g(\omega)$ のピークが起こる円振動数に対応する周期を T_g^* とすれば、式(15)より、

タイプI $T_g^* = \frac{T_g}{\sqrt{1-2h_g^2}} \dots\dots\dots (42)$

タイプII $T_g^* = T_g \dots\dots\dots (43)$

となり、式(18)で $h_g = 0.48305$ であるから式(40)は、

$$\begin{aligned} \nu_F T &= 2 \left(\frac{T}{T_g^*} \right) = \frac{2}{\sqrt{1-2h_g^2}} \left(\frac{T}{T_g^*} \right) \\ &= 2.7386 \left(\frac{T}{T_g^*} \right) \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

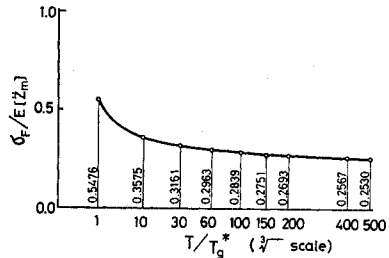


Fig. 6 $\sigma_F/E[\ddot{Z}_m]$ as function of T/T_g^* .

こうして T_g^* を用いれば、地震加速度の最大値の期待値は両タイプについて全く同一の表現が可能である。すなわち

$$\begin{aligned} E[\ddot{Z}_m] &= \sigma_F \left\{ \left[2 \ln 2.7386 \left(\frac{T}{T_g^*} \right) \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + 0.5772 \left[2 \ln 2.7386 \left(\frac{T}{T_g^*} \right) \right]^{-1/2} \right\} \\ &\dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

式(45)から $\sigma_F/E[\ddot{Z}_m]$ を T/T_g^* を変数にして描いたのが Fig. 6 である。この Fig. 6 は文献12)で述べられているように式(6)で表わされる期待値は $\nu_g T$ の大きな変動に対してもごくわずかしかな変化しないことを意味している。またこの傾向は文献20)の結果と同一である。すなわち、最大値に及ぼす継続時間 T の影響は無視しうる。そこで本研究でも文献20)と同様に以後の計算には $T/T_g^* = 30$ を用いる。この値は $T/T_g^* = 10$ と $T/T_g^* = 100$ とくらべた場合、 $\sigma_F/E[\ddot{Z}_m]$ の値が平均値となるところである。文献20)は文献12)の方法とは別の方法で求めたものであるが、結果がほとんど一致している点興味深い。

式(45)でさらに注意すべき点は、この式から地震動の強度を表わす不規則パラメーター S あるいは β を

決定できることである。たとえばタイプ II の場合、 $E[\ddot{Z}_m]=200$ gal に対応する β の値は次のようにして決定する。いま $T/T_g^*=30$ として $\sigma_F/E[\ddot{Z}_m]=0.3161$ であるから、

$$\sigma_F = \beta = 200 \times 0.3161 = 63.2 \text{ gal.} \quad \dots\dots\dots (46)$$

このように強度を表わす不規則パラメーターを地震動の最大加速度の期待値と結びつけることを提案したが、後藤・亀田²⁰⁾であり、これよりたとえば人工地震波を作成する場合の強度を、合理的に決定することが可能となる。

(3) 応答スペクトルの算出

式 (6) を応答に適用することにより最大応答、すなわち、応答スペクトルを求めることができる。

$$S_A = E[(\ddot{X} + \ddot{Z})_m] \\ = \sigma_a \{ [2 \ln(\nu_a T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_a T)]^{-1/2} \} \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$S_V = E[\dot{X}_m] \\ = \sigma_v \{ [2 \ln(\nu_v T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_v T)]^{-1/2} \} \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$S_D = E[X_m] \\ = \sigma_d \{ [2 \ln(\nu_d T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_d T)]^{-1/2} \} \quad \dots\dots\dots (49)$$

ここに σ_a , σ_v および σ_d はタイプ I およびタイプ II でそれぞれ、式 (25), (26), (28) および式 (31), (32), (34) で表わされ、 $\nu_a T$, $\nu_v T$ および $\nu_d T$ も同様にタイプ I およびタイプ II に関する式 (25)~(29) および式 (31)~(35) を式 (38) に代入して求めることができる。ただし、式 (38) のサフィックスは変換されなければならない。

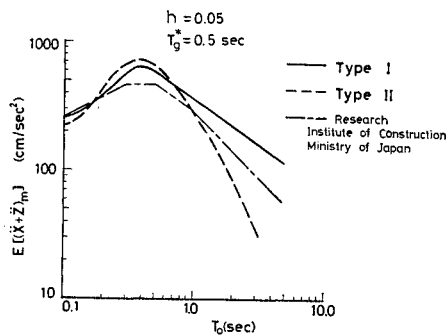


Fig. 7 Response spectra ($E[\ddot{Z}_m]=200$ gal).

式 (47), (48) および (49) から得られた結果を Fig. 7 に示す。Fig. 7 では $E[\ddot{Z}_m]=200$ gal, $T_g^*=0.5$ sec および $T=15$ sec を用いている。また比較のために、土木研究所で求めた平均応答スペクトル⁹⁾も示した。この図から $T_0 \le 1.0$ sec の範囲ではタイプ I, II とともに

比較的良好一致している。 $T_0 > 1.0$ sec では両者は全く逆方向に土木研究所の結果から相違している ($E[\dot{X}_m]$ および $E[X_m]$ の図は省略した)。

(4) 応答スペクトルに及ぼす地盤の影響

従来、地震応答には構造物の基礎地盤が相当影響するということが強調されている²³⁾。この節では地盤条件をその卓越周期 T_g のみにしぼって考察する。そのため地震動モデルとしてはタイプ I を用い、 T_g としては 0.2 sec と 0.5 sec の場合について、さらに構造物の減衰定数 h として 0.05 と 0.40 の 4 通りについて計算し、その代表値として加速度応答スペクトルを求めた。その結果を Fig. 8 に示す。この図から T_g の違いによって応答スペクトルのピークに差があり、そのピークはそれぞれ T_g の付近にあることがわかる。

5. 直接応答スペクトルと擬似応答スペクトルの関係

以上のように応答スペクトルを求めて見ると、地震動スペクトルから不規則振動論の手法を用いて整理すると、変位応答スペクトル、速度応答スペクトルおよび加速度応答スペクトルの間に式 (3), (4) および (5) の関係が成立しているはずである。しかし、本研究の方法から、それぞれの値を別々に直接求める場合、これらの値の間に、はたして式 (3), (4) および (5) の関係が成立しているであろうか。この節ではこのことについて若干の考察を加える。

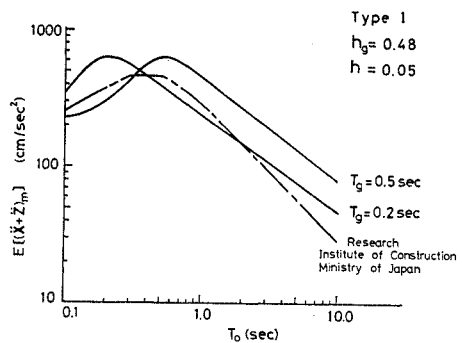
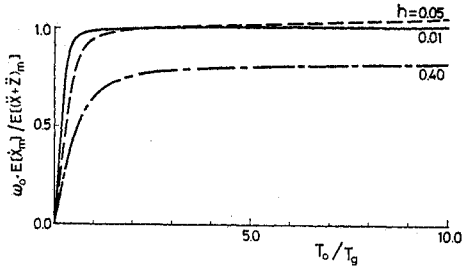
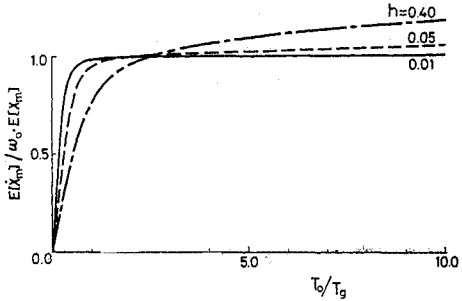


Fig. 8 Response spectra effect of T_g .

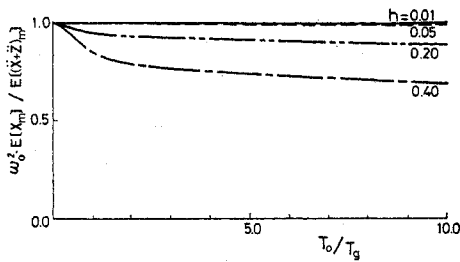
ここでいう、直接応答スペクトルとは、たとえば S_A を求めるのに $(\ddot{X} + \ddot{Z})_m$ を直接求めた場合で、擬似応答スペクトルとは、式 (3), (4) および (5) の関係が成立すると仮定して $\omega_0 \dot{X}_m$ あるいは $\omega_0^2 X_m$ から S_A を求めた場合である。さて、具体的には $E[(\ddot{X} + \ddot{Z})_m]$, $E[\dot{X}_m]$, $E[X_m]$ の間に式 (3), (4) および (5) の関係がどの程度成立しているかを調べることであるから、次



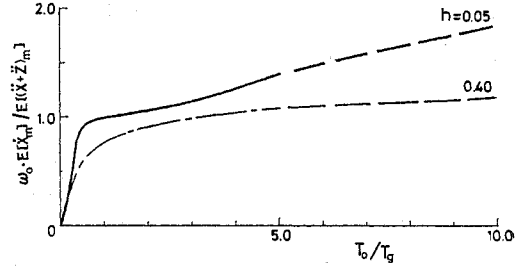
(a)



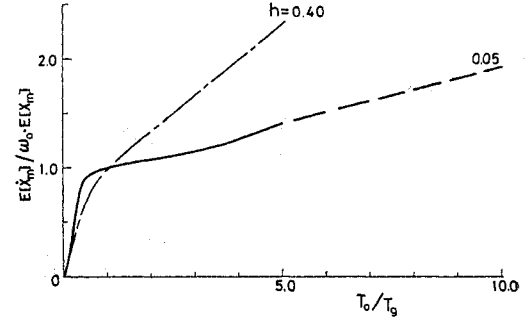
(b)



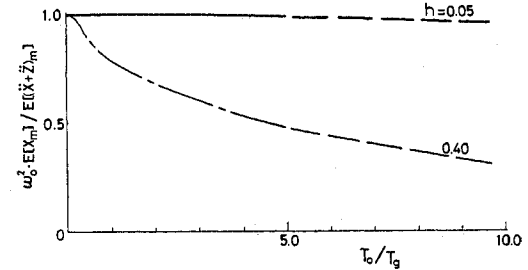
(c)
Type I



(a)



(b)



(c)
Type II

Fig. 9 Relation between direct response spectra and quasi spectra.

の関係式を用いこれらの比が 1.0 に近いほど式 (3), (4) および (5) の関係が満足されていると考える。

$$\frac{\omega_0 E[\dot{X}_m]}{E[(\ddot{X} + \ddot{Z})_m]} = \frac{\omega_0 \sigma_v}{\sigma_a} \cdot \frac{[2 \ln(\nu_v T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_v T)]^{-1/2}}{[2 \ln(\nu_d T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_d T)]^{-1/2}} \dots (50)$$

$$\frac{E[\dot{X}_m]}{\omega_0 E[X_m]} = \frac{\sigma_v}{\omega_0 \sigma_d} \cdot \frac{[2 \ln(\nu_v T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_v T)]^{-1/2}}{[2 \ln(\nu_d T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_d T)]^{-1/2}} \dots (51)$$

$$\frac{\omega_0^2 E[X_m]}{E[(\ddot{X} + \ddot{Z})_m]} = \frac{\omega_0^2 \sigma_d}{\sigma_a} \cdot \frac{[2 \ln(\nu_d T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_d T)]^{-1/2}}{[2 \ln(\nu_d T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_d T)]^{-1/2}} \dots (52)$$

タイプ I および II について h をパラメーターにして

描いたのが Fig. 9 である。これらの図から一般にタイプ I はタイプ II より近似度がよいことがわかる。また Fig. 9 の (c) は $h=0.05$ でいずれのタイプの場合も 1.0 に近づいている。これらのことは、運動の基礎方程式、式 (1) で $h=0$ とした場合には

$$(\ddot{X} + \ddot{Z}) = -\omega_0^2 X \dots (53)$$

となるはずで、Fig. 9 の (c) の曲線が 1.0 に近づくはずである。この点を相対変位波形の不規則指数 ϵ^2 から考察してみよう。いま、横軸に ω_0/ω_g を縦軸に ϵ^2 をとってプロットすると Fig. 10 のようになる。この図からタイプ II では $\omega_0/\omega_g = 1.0$ 付近で ϵ^2 が最も小さく (すなわち波形が規則的)、1.0 から遠ざかるにつれて、特に ω_0/ω_g が小さくなるにつれて ϵ^2 は著しく増加している。この傾向は減衰定数 h によっても変わっていない。一方 Fig. 9 の (a)(b) を見ると $T_0/T_g (= \omega_0/\omega_0) = 1.0$ 付近で縦軸の値は 1.0 に近く、 T_0/T_g が大きくなるにつれて単調に増加している。すなわち ϵ^2 が小

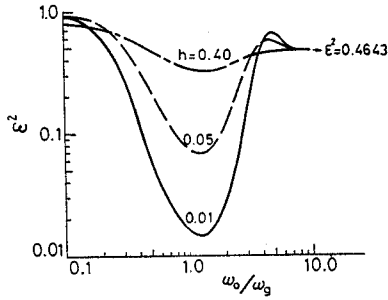


Fig. 10 Random index ε^2 (Type II)

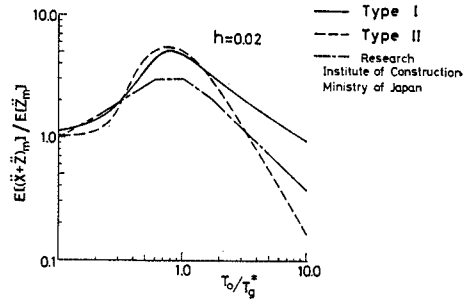


Fig. 11(a) Normalized acceleration response spectra.

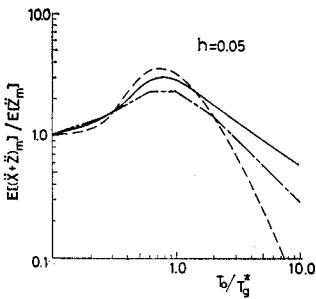


Fig. 11(b) Normalized acceleration response spectra.

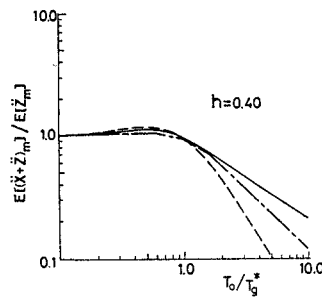


Fig. 11(c) Normalized acceleration response spectra.

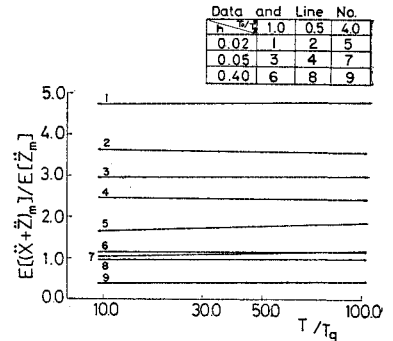


Fig. 12 Effect of duration T on normalized acceleration response (Type I).

いほど式 (3),(4) および (5) の関係がよく満足されていることを示している。

タイプIはタイプIIにくらべて振動数が小さい範囲でホワイト・ノイズ的な傾向が強いことから T_0/T_g が 1.0 からある程度離れても ε^2 の値はタイプIIほど変化しないと予想され、比較的広い範囲の T_0/T_g にわたって、式 (3),(4) および (5) の関係式が成立するものと思われる。

その他速度応答スペクトルの平滑化についても検討を加えたが、2つのタイプとも S_V の平滑化はよいとはいえない。

6. 応答スペクトル作成法とその考察

以上、本研究で作成した応答スペクトルを従来の平均応答スペクトルと比較しつつ不規則パラメーターの及ぼす影響について考察してきたが、この節では、これまでに考察した事柄を総合して、合理的な応答スペクトルの作成方法を考えてみる。

4. (4) (Fig. 8) の結果から地盤の卓越周期の影響を応答スペクトルに無視できないことがわかった。そこでこの影響を考察するため、応答スペクトルの縦横両軸を無次元化することを考える。すなわち、横軸に T_0/T_g^* を縦軸に $E[(\ddot{X}+\ddot{Z})_m]/E[\ddot{Z}_m]$ をとって示す。その結果

を Fig. 11 に示した。このときの関係式は

$$\frac{E[(\ddot{X}+\ddot{Z})_m]}{E[\ddot{Z}_m]} = \frac{\sigma_a \{ [2 \ln(\nu_a T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_a T)]^{-1/2} \}}{\sigma_F \{ [2 \ln(\nu_F T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_F T)]^{-1/2} \}} \dots (54)$$

このように、地盤の影響を考慮した応答スペクトルを作成することが可能であることがわかったが、さらに、最大地震加速度の場合と同様に継続時間の影響について考察してみると Fig. 12 のように、この場合も継続時間の影響は無視できることがわかった。Fig. 11 からこの応答スペクトルは T_0/T_g^* が比較的大きい範囲で平均応答スペクトルとの相違が著しくなっている。そこで、この研究で用いた最大値推定方法の精度を検討して見る。

2. の式 (6) の誘導過程を主として文献 18) に基づいて整理したのであるが、その過程で、

$$\theta_0 = \ln[(1-\varepsilon^2)^{1/2} TN] \geq 1 \dots (55)$$

なる仮定が含まれている。ここに、

$$(1-\varepsilon^2)^{1/2} TN = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{\sigma_{\dot{\varepsilon}}}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \dots (56)$$

で表わされ、式 (55) をタイプIIについて示すと、

$$\theta_0 = \ln \left[\left(\frac{F_1}{F_0} \right)^{1/2} \frac{T}{T_g} \right] \dots (57)$$

また、 F_1 および F_0 は式 (36) から求められ、 ω_0/ω_g の

関数であるので、 $(F_1/F_0)^{1/2}$ と ω_0/ω_g の関係を求めてプロットすると、Fig. 13 を得る。この図から ω_0/ω_g が小さくなるほど $(F_1/F_0)^{1/2}$ は小さくなる。すなわち、 T_0/T_g が大きくなるほど $(F_1/F_0)^{1/2}$ が小さくなる。しかし式 (55) の条件を満足するためには $(F_1/F_0)^{1/2}$ の値、ひいては θ_0 の値が1に比べて大きいことが必要であることから、 T_0/T_g が大きい場合は Fig. 11 の応答スペクトルに誤差が含まれていることになる。

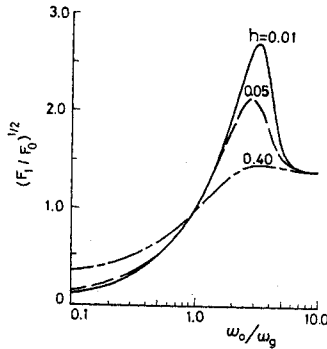


Fig. 13 Relation between $(F_1/F_0)^{1/2}$ and ω_0/ω_g

このように、この研究で用いた方法は継続時間 T が相当大きくない限り、 T_0/T_g の大きい範囲の応答スペクトルの精度を上げることはできない。

最近山田・竹宮¹⁰⁾は、ランダム変数の最大値推定方法に、比較的短いランダムプロセスの継続時間 T を考慮した方法を導入している点興味深い。

また、田治見⁹⁾の研究はシミュレーションによる多くの計算結果から次の関係式を最大値推定の基本式として用いている。

$$\frac{\max(f)}{\sqrt{f^2}} = \frac{\max(s)}{\sqrt{s^2}} \dots\dots\dots (58)$$

すなわち、「地震動の2乗平均と応答の2乗平均との比はそのままそれぞれの最大値比の2乗に等しい」というものである。 f が地動を、 s が応答を表わしているが f に地震加速度をとった場合には s は構造物の絶対加速度、 f が地震速度であれば s は構造物の相対速度を考える。本研究で使用した表現法にしたがえば、たとえば加速度に関しては式 (58) は

$$\frac{E[\ddot{Z}_m]}{\sigma_F} = \frac{E[(\dot{X} + \ddot{Z})_m]}{\sigma_a} \dots\dots\dots (59)$$

となる。ここで、式 (59) と式 (54) を比較した場合、次の項だけ相違していることがわかる。

$$C_f = \frac{[2 \ln(\nu_a T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_a T)]^{-1/2}}{[2 \ln(\nu_F T)]^{1/2} + 0.5772 [2 \ln(\nu_F T)]^{-1/2}} \dots\dots\dots (60)$$

この C_f を仮に「補正項」と呼ぶなら、この補正項が h 、 T_0/T_g によってどの程度の値を持って変化するかを

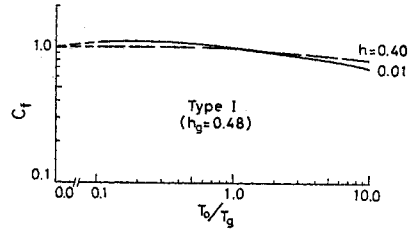


Fig. 14 Relation between C_f and T_0/T_g .

調べたのが Fig. 14 である。Fig. 14 から T_0/T_g が小さい範囲では、ほとんど C_f の値が 1.0 に近く、このことから T_0/T_g が小さいとき、田治見の式がこの方法から説明できたといえる。

7. む す び

本研究は、応答を考慮した修正震度法に用いられる「応答スペクトル」を合理的に作成するための判断の基礎資料を提供すべく、不規則振動論に基づく応答スペクトルを作成し、従来の平均応答スペクトルと比較検討を行なった。

地震動モデルにはこれまで提案されたものの中から代表的なタイプ2つを選び、ランダム変数の最大値推定方法は M. Shinozuka が示した極値分布理論に基づく方法を採用した。

その結果、地盤の影響を考慮した無次元応答スペクトル曲線を得ることができた。その特徴は

- (1) 継続時間の相違による影響は無視できる。
- (2) 式 (3), (4) および (5) の関係は地震動モデルにより相当異なる。
- (3) 地盤の影響は横軸に T_0/T_g 、縦軸に田治見⁹⁾と同様「伝達率」を用いることにより、変数として地盤の卓越周期を組み込むことができる。

などがあげられる。

この研究では地震動のスペクトルを2種類考えたが、今後実地震動のスペクトルに対する検討も加えれば、さらに興味ある結果が得られると思う。

なお、この研究は著者の1人(小堀)が米国コロンビア大学の M. Shinozuka のところへ留学中に指導を受けた資料によるところが多い。ここにコロンビア大学の関係者各位に感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) 岡本舜三：地震力を考えた 構造物設計法，オーム社，昭42。
- 2) 後藤尚男：土木構造物の耐震設計，土木学会 関西・中部支部共同講習会テキスト，昭41
- 3) 武藤 清：構造物の動的解析(耐震設計シリーズ4)，丸善，昭45
- 4) 土木学会，本州四国連絡橋技術調査委員会：本州四国連

絡橋技術調査報告書, 昭 42

- 5) G.W. Housner : Behavior of Structures During Earthquakes, Journal of E.M. Division Proceedings ASCE, pp. 109-129, Oct. 1959.
- 6) 高田・大久保・栗林: 橋梁の耐震設計に関する研究 (I) —地震応答スペクトル—, 1964, 建設省土木研究所報告第 128 号, 昭 40
- 7) G.N. Bycroft : White Noise Representation of Earthquakes, Journal of E.M. Division Proc. ASCE, pp. 1-16 April. 1960.
- 8) E. Rosenblueth and J.I. Bustamante : Distribution of Structural Response to Earthquakes, Journal of E.M. Division Proc. ASCE, pp. 75-106, June 1962.
- 9) 田治見宏: 統計的手法による建物の地震応答の算出について, 日本建築学会論文報告集, 第 60 号, pp. 249-252, 昭 33
- 10) Y. Yamada and H. Takemiya : Statistical Estimation of the Maximum Response of Structures Subjected to Earthquake Motion, Proc. of JSCE, No. 182, pp. 115-132, Oct. 1970.
- 11) 亀田弘行: 地震時における構造物の最大応答の確率分布と平均応答スペクトルについて, 土木学会第 25 回年次講演集第 1 部, pp. 509-512, 昭 45
- 12) M. Shinozuka : Methods of Safety and Reliability Analysis, Technical Report of Columbia University, July 1969.
- 13) S.O. Rice : Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Process, edited by N. Wax, Dover, New York, pp. 133-294, 1954.
- 14) J.R. Rice and F.P. Beer : First-Occurrence Time of High-level Crossings in a Continuous Random Process, J. Acoust. Soc. Am., pp. 323-335, April. 1965.
- 15) 宮脇一男: 雑音解析, 朝倉書店, 昭 42
- 16) 榎木義一ほか: 統計的自動制御理論, コロナ社, 昭 43
- 17) 前出 10) p. 115.
- 18) D.E. Cartwright and M.S. Longuet-Higgins : The Statistical Distribution of the Maximum of a Random Function, Proc. of the Royal Soc. of London, No. 237, pp. 212-232, 1956.
- 19) たとえば, 前出 12) に多くの事例が出ている。
- 20) 後藤尚男・亀田弘行: 地震時における最大地動の確率論的研究, 土木学会論文集, 第 159 号, pp. 1-12, 昭 43
- 21) 前出 10) p. 123
- 22) たとえば, 前出 12), 13) など,
- 23) たとえば, 前出 3) 構造物の動的解析, p. 9
金井清ほか: 建築学大系 11 (地震・振動学), p. 108, 彰国社, 昭 44
- 24) 伯野元彦・篠塚正宣: 地震動による構造物の応答スペクトルについての一考察, 土木学会論文集, 第 139 号, pp. 9-18, 昭 42
- 25) E.J. Gumbel 著, 岩井ほか訳: 極値統計学, 広川書店, 昭 38

付録 A 絶対最大値の期待値 (本文式 (6) の誘導)^{12), 13), 18)} 誘導の過程を主として文献 18) に基づいて整理する。

いま, ランダム変数として $\xi(t)$ を考えよう。以下の誘導の第 1 過程として, 次の (1) および (2) の 2 項をまず, 求める必要がある。

(1) $\xi(t)$ の極大値の確率密度関数

いま, $\xi(t)$ が矩形領域 $(t, t+dt; \xi, \xi+d\xi)$ において, 1 つの極大値をもつ確率は $\xi, \xi(=d\xi/dt), \xi(=d^2\xi/dt^2)$ の同時確率密度関数 $p(\xi, \xi, \xi)$ を用いて次のように表わされる。

$$-dt d\xi \int_{-\infty}^0 p(\xi, 0, \xi) \xi d\xi \dots \dots \dots (A.1)$$

したがって, 単位時間当りに $(\xi, \xi+d\xi)$ に存在する平均ピーク個数 N_1 は

$$N_1 = d\xi \int_{-\infty}^0 p(\xi, 0, \xi) |\xi| d\xi \dots \dots \dots (A.2)$$

である。またピークのレベルを問題としないで個数のみを考えれば, 単位時間当りの期待値 N は,

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 p(\xi, 0, \xi) |\xi| d\xi d\xi \dots \dots \dots (A.3)$$

さらに, 極大値の確率密度関数を $p(\xi)$ とすれば,

$$p(\xi) d\xi = \frac{N_1}{N} \dots \dots \dots (A.4)$$

と表わすことができる。

S.O. Rice および Cartwright と Longuet-Higgins は $\xi(t)$ がガウス分布にしたがうものとして $p(\xi, 0, \xi)$ には次式を与えている。

$$p(\xi, 0, \xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 |M|}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2|M|} (M_{11}\xi^2 + M_{33}\xi^2 + 2M_{13}\xi\xi) \right\} \dots \dots \dots (A.5)$$

ここに,

$$M = \begin{bmatrix} \sigma_\xi^2 & 0 & -\sigma_\xi^2 \\ 0 & \sigma_\xi^2 & 0 \\ -\sigma_\xi^2 & 0 & \sigma_\xi^2 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (A.6)$$

$$M_{11} = \sigma_\xi^2 \sigma_\xi^2, M_{13} = \sigma_\xi^4, M_{33} = \sigma_\xi^2 \sigma_\xi^2$$

式 (A.5) は統計学における 3 次元正規分布を表わしている。また, 式 (A.6) の M は考えている ξ と ξ , ξ と ξ との間に相関がないことを意味している。

以上から, $\eta = \xi/\sigma_\xi$ なる無次元量を用いれば極大値の確率密度関数を次のように表わすことができる。

$$p(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left[\epsilon e^{-\frac{1}{2}\eta^2/\epsilon^2} + (1-\epsilon^2)^{1/2} \eta e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \times \int_{-\infty}^{\eta(1-\epsilon^2)^{1/2}/\epsilon} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right] \dots \dots \dots (A.7)$$

ここに,

$$\epsilon^2 = \frac{\sigma_\xi^2 \sigma_\xi^2 - \sigma_\xi^4}{\sigma_\xi^2 \sigma_\xi^2} \dots \dots \dots (A.8)$$

ϵ^2 は「不規則指数」と呼ばれている量であるが, その意味は次のことから理解される。単位時間当りの極大値の個数 N , 単位時間当りに正の勾配で $\xi=0$ を通過する回数 (下からのゼロクロッシング回数) N_0 が,

$$N = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\xi} \dots\dots\dots (A.9)$$

$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\xi} \dots\dots\dots (A.10)$$

であるから

$$\epsilon^2 = 1 - \left(\frac{N_0}{N}\right)^2 \dots\dots\dots (A.11)$$

となる。 $\epsilon^2=0$ ということは正の勾配でゼロ線を通過する回数がピークの個数と等しいということを意味しているが、この場合には $p(\eta)$ は Rayleigh 分布になり、 $\epsilon^2=1$ の場合には正規分布 (ガウス分布) になる (文献 18). p. 217)。

(2) 極大値の最大値

さて、極大値の確率密度関数が式 (A.7) のように求められた。次に最大値の確率密度関数を $p_m(\eta)$ とし、極大値が η を超過しない確率は

$$\int_{-\infty}^{\eta} p(\eta) d\eta = 1 - \int_{\eta}^{\infty} p(\eta) d\eta = 1 - q(\eta) \dots\dots\dots (A.12)$$

となる。観測時間 (あるいは継続時間) を T とすれば、ピーク個数は平均的に TN 個あるからすべてのピークが η を超過しない確率は

$$[1 - q(\eta)]^{TN} \dots\dots\dots (A.13)$$

と考えることができる。したがって

$$p_m(\eta) = \frac{d}{d\eta} [1 - q(\eta)]^{TN} \dots\dots\dots (A.14)$$

$p(\eta)$ は式 (A.7) で与えられるから式 (A.14) は非常に複雑なものになる。しかし TN が一般に非常に大きい場合として、文献 18) では次のように近似している。

$$q(\eta) \approx (1 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} = (1 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\theta_2} \dots\dots\dots (A.15)$$

ただし、

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \eta^2$$

さらに、

$$\begin{aligned} [1 - q(\eta)]^{TN} &= [1 - (1 - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\theta_2}]^{TN} \\ &= \left[1 - \frac{e^{-\theta_1}}{TN}\right]^{TN} \approx \exp[-e^{-\theta_1}] \dots\dots\dots (A.16) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_2 - \theta_0 \\ \theta_0 &= \ln[(1 - \epsilon^2)^{1/2} TN] \end{aligned}$$

式 (A.8), (A.9) および (A.10) を用いて、さらに $e^{-\theta_1}$ を変形すれば、

$$e^{-\theta_1} = T \frac{\sigma_\xi}{2\pi\sigma_\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}} \dots\dots\dots (A.17)$$

となる。

最小値についても同様な考え方で、論ずることができ

るので、最大値、最小値についてそれぞれ次の式を得ることができる。

$$P_r\{\xi_{m+} \leq \xi\} \approx \exp[-e^{-\theta_1}] = \exp[-\tau_0] \dots\dots\dots (A.18)$$

$$P_r\{\xi_{m-} \geq \xi\} \approx \exp[-e^{-\theta_1}] = \exp[-\tau_0] \dots\dots\dots (A.19)$$

ここに、 $P_r\{A\}$ は事象 A の起こる確率を意味している。

文献 12) は、ここからさらに最大値と最小値の独立性を仮定して絶対最大値が ξ を超過しない確率として次式を求めている。

$$P_r\{\xi_m \leq \xi\} \approx e^{-2\tau_0} \dots\dots\dots (A.20)$$

ところで、式 (A.20) の指数 $2\tau_0$ は式 (A.18), (A.19) と式 (A.17) から、

$$\begin{aligned} 2\tau_0 &= T \frac{\sigma_\xi}{\pi\sigma_\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}} = \nu_\xi T e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2} \left(\sqrt{2 \ln(\nu_\xi T)} + \frac{\xi}{\sigma_\xi}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sqrt{2 \ln(\nu_\xi T)} - \frac{\xi}{\sigma_\xi}\right)\right\} \dots\dots\dots (A.21) \end{aligned}$$

ここに、

ν_ξ : 単位時間当りの上下からのゼロクロッシング回数である。

すなわち

$$\nu_\xi = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\xi}\right) \dots\dots\dots (A.22)$$

十分大なる $\nu_\xi T$, ξ を考えれば

$$\begin{aligned} 2\tau_0 &\approx \exp\left\{-\sqrt{2 \ln(\nu_\xi T)} \left[\frac{\xi}{\sigma_\xi} - \sqrt{2 \ln(\nu_\xi T)}\right]\right\} \\ &= e^{-K' \left(\frac{\xi}{\sigma_\xi} - K'\right)} = e^{-\alpha_\xi(\xi - \beta_\xi)} \dots\dots\dots (A.23) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\xi &= K'/\sigma_\xi \\ \beta_\xi &= K'\sigma_\xi \\ K' &= \sqrt{2 \ln(\nu_\xi T)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.24)$$

すなわち、ランダム変数 ξ の絶対最大値の確率分布関数 $F_{\xi_m}(\xi)$ は

$$F_{\xi_m}(\xi) = \exp[-e^{-\alpha_\xi(\xi - \beta_\xi)}] \dots\dots\dots (A.25)$$

という、いわゆる「二重指数分布」として求められたわけである。

式 (A.25) の分布にしたがう確率変数の期待値、標準偏差は次式で表わされる²⁵⁾。

$$E[\xi_m] = \beta_\xi + r/\alpha_\xi \dots\dots\dots (A.26)$$

$$\sigma_{\xi_m} = \pi/\sqrt{6}\alpha_\xi \approx 1.28/\alpha_\xi \dots\dots\dots (A.27)$$

ここに、 r はオイラーの定数 (≈ 0.5772) である。式 (A.24) を用いれば、式 (A.26) は、

$$\begin{aligned} E[\xi_m] &= \sigma_\xi (K' + 0.5772/K') \\ &= \sigma_\xi \{2 \ln(\nu_\xi T)\}^{1/2} \\ &\quad + 0.5772 [2 \ln(\nu_\xi T)]^{-1/2} \dots\dots\dots (A.28) \end{aligned}$$

式 (A.28) が絶対最大値の期待値を求める式である。