

非線型地震応答の近似計算法に関する基礎的研究

FUNDAMENTAL STUDIES ON APPROXIMATIVE METHOD OF CALCULATION OF NON-LINEAR EARTHQUAKE RESPONSE

国 井 隆 弘*

By Takahiro Kunii

要 旨 本研究は、構造物を集中質点系にモデル化した場合の地震動に対する非線型応答計算法に関する研究であり、復元力特性が bi-linear 型を示す場合を扱っている。構造物は曲げ変形に支配されるものが対象とされており、数値例は 3 質点系について示した。

1. ま え が き

地質応答を解析する際に、構造物を質量を持つ点（質点）の集合によって構成された振動系に理想化して、運動方程式をたてる方法（質点法）がよく使われる。この振動系は、変形に対する抵抗のしかたが異なるところの二種の系に大別される。その一つは、変形がせん断変形に支配される系であり、他の一つは変形が曲げ変形に支配される系である。本研究ではこの二種の系を、それぞれ「せん断振動系」および「曲げ振動系」とよぶこととする。

これらの振動系の運動方程式は一般に 2 階の連立微分方程式となり、行列を用いて表わされる。この方程式は剛さ行列（Stiffness Matrix）で示される復元力の項を持つが、前述の二種の振動系の相違点はこの剛さ行列の要素の相違から説明されるものと思われる。すなわち、せん断振動系では隣り合う質点間の相対変位とその質点間に働くせん断力とが結びつけられて、この関係から運動方程式の剛さ行列の各要素が決定される。このため剛さ行列の各要素はその要素に相当する質点間での「せん断力—相対変位」関係での単位相対変位に対するせん断力を意味しており、このことは、非線型振動を扱う場合においても「せん断力—相対変位」関係の復元力特性から直接剛さ行列の各要素を決定することができることを意味している。せん断振動系では以上のことから線型振動の場合も、非線型振動の場合も同じ形の運動方程式で扱うことができ、この両者の違いは、線型振動の場合は剛さ行列の各要素の値が一定であるのに対して非線型振

動の場合は剛さ行列の各要素の値のうち振動系の非線型を生じた部分に相当する要素だけ「せん断力—相対変位」関係に相応して変化することで説明されるものと思われる。

これに対して曲げ振動系では、一般には、まず影響係数の行列を求め、次にこの行列の逆行列から剛さ行列が求められる。影響係数は「質点に働く単位力—その質点あるいは他の質点の変位」の関係で求められ、この関係が「力—変位」の関係の形体であることはさきのせん断振動系の場合と同様であるが、もともと影響係数は「曲げモーメント—曲率」の関係から計算されて「力—変位」の関係になったものであると考えられる。このため非線型振動を扱う場合においては、再び非線型性を持つ「曲げモーメント—曲率」の関係にたちもどらねばならず、この関係が非線型性を示す場合には影響係数はその性質上求めることができない。この理由からせん断振動系の場合と異なり、曲げ振動系では線型振動で用いられた振動モデルをそのまま用いて運動方程式をたてることができない。

以上のことから、曲げ変形に支配される構造物の非線型振動応答の計算においては、非線型振動を扱うのに適した振動モデルが必要と思われる。

山田・樫尾¹⁾は単純桁を有限数の回転ばねで変形を与える振動モデルに置き換えて、復元力特性を回転ばねに作用した曲げモーメントから得て、特性の履歴にそって逐次数値積分を行なうことから解を求めている。また山崎・石川・黒木²⁾は同様の振動モデルを用いて片持ばりについて、動的横荷重が作用するとき生じるエネルギーに Lagrange の運動方程式を適用した解法を提案している。これらの研究はともに衝撃荷重を扱っているが、地震波のような数多くの繰り返し外力に対して、これらの解法を用いて数多くの繰り返し応答を求めていくためには、相当の労力を必要とすることが予想される。

また Bleich ら³⁾は、構造物に塑性ヒンジを導入して連続体としての解法を試みているが、復元力特性は完全

* 正会員 工博 東京都立大学講師 工学部土木工学科

塑性型を扱っており、bi-linear 型の復元力特性を扱うためには、この解法はさらに多くの検討を必要とすると思われる。

本研究は曲げ変形に支配される構造物の非線型地震応答計算に、文献 1),2) と同様の振動モデルを用いて、回転ばねが bi-linear の「曲げモーメント-回転角」の復元力特性を持つ場合を扱っている。さらに本研究は、さきに 1 質点系について報告したが、この復元力特性の回転角を「復元力と線型関係にあるもの」と「復元力と関係ないもの」とに分解することにより、次に記すところの利点を得ようとしたものである。

- (1) 地震のような不規則な数多くの繰り返し外力に対する数多くの繰り返し応答が比較的簡単に求めることができる。
- (2) 振動モデルから作られる運動方程式は、線型応答で用いられる質点系のモデルから作られる運動方程式に、非線型の性質によって生じた新しい項を加えた形にする。
- (3) 前記 (2) の運動方程式はモーダルアナリシスを適用できる。

以上の利点を持った運動方程式、および解法が本研究で提案されているが、本研究でとり上げた数値計算はすべて 3 質点系について行なわれている。また自由振動を行なう片持ばりの模型実験を行ない、理論と比較した結果が簡単に記されている。

なお、本報告は、これまで年次学術講演会等で発表したもの^{5),6),7)} をとりまとめて、数値計算例を加えたものである。

2. 解 法

(1) 振動モデル・復元力特性

本研究では、構造物が図-1のごとくモデル化される場合を考える。図-1の振動モデルは、曲げモーメントを伝達する無質量剛棒と曲げモーメントに反応して回転する質量を持った回転ヒンジとから成り立っている。回転ヒンジは図-2のごとき

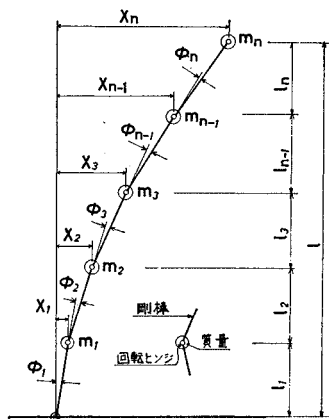


図-1 振動モデル

$M-\phi$ 関係 (M : 曲げモーメント, ϕ : 回転角) の復元力特性を持つと考える。図-2 の復元力特性は幾何学的に、回転角 ϕ を ϕ_e と θ との和で与えることができる。すなわち

$$\phi = \phi_e + \theta \tag{1}$$

ϕ_e は復元力 (M) と線型関係にある回転角を意味しており、また θ は ϕ から ϕ_e を差し引いたもので、復元力に関係しないところの非線型性を持つ増分の回転角として扱われる。すなわち、入力波がなくなり、系が減衰力の作用を受けて自由振動から静止の状態に移ったときの残留変位はこの θ から計算される。

図-2 で θ は幾何学的に計算されて次のごとく与えられる。

- i) 点 P が EB 上にあるとき $\theta = (M - M_y) \cdot \frac{a-b}{ab}$
- ii) 点 P が BC 上にあるとき $\theta = \theta_B$
- iii) 点 P が CD 上にあるとき $\theta = (M + M_y) \cdot \frac{a-b}{ab}$
- iv) 点 P が DE 上にあるとき $\theta = \theta_D$

ここで θ_B と θ_D はそれぞれ点 P が B 上および D 上にあるときの θ の値を意味する。

ここで、 $M-\phi$ 関係は振動中にいくつかの履歴ループを形成すると考えられるが、この場合も、式 (1) および式 (2) は成り立つ。この場合については、文献 4) で詳しく記したので、ここでは説明を省略する。

(2) 運動方程式・モーダルアナリシスによる解法

図-1 から、回転ヒンジの変位 x は回転角 ϕ と剛棒の長さ l とによって近似的に表わすことができる。いま行列 $[L]$ を

$$[L] = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ l_1+l_2 & l_2 & 0 & \dots & \dots \\ l_1+l_2+l_3 & l_2+l_3 & l_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{3}$$

のごとく定義すれば、変位 $\{x\}$ は次式で与えられる。

$$\{x\} = \{y\} + [L]\{\theta\} \tag{4}$$

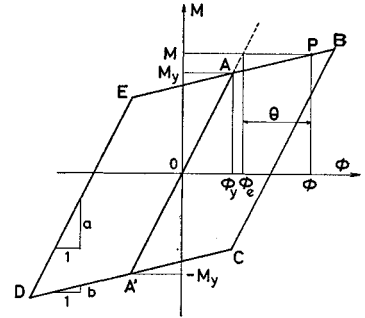


図-2 $M-\phi$ 関係

ここで

$$\{y\} = [L]\{\theta\} \dots \dots \dots (5)$$

行列 $\{y\}$ は線型限界以内の、および線型限界を越えた後の線型的変位を意味しており、復元力と線型関係にあるために次式のごとく影響係数の行列と結びつけられる。

$$\{y\} = [\delta]\{F\} \dots \dots \dots (6)$$

行列 $\{F\}$ は回転ヒンジに作用する復元力であるが、これは線型振動の場合の多質点系振動モデルの質点に作用する復元力と同じものと考えられる。なお、行列 $[\delta]$ は影響係数の行列である。

式 (6) から

$$\{F\} = [\delta]^{-1}\{y\} = [k]\{y\} \dots \dots \dots (7)$$

ここで、行列 $[k]$ は Stiffness Matrix である。

式 (4)、式 (7) を線型振動で用いられているような多質点系の運動方程式

$$[m]^D\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + \{F\} = -[m]^D\{\ddot{z}\} \dots (8)$$

に代入すると次式となる。

$$[m]^D\{\ddot{y}\} + [c]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = -[m]^D\{\ddot{z}\} - [m]^D[L]\{\ddot{\theta}\} - [c][L]\{\dot{\theta}\} \dots \dots \dots (9)$$

ここで $[m]^D$: 質点の質量の対角行列

$[c]$: 粘性減衰係数の行列

\ddot{z} : 地動の加速度

式 (9) は従来線型応答計算に用いられた多質点系の振動モデルの式に、非線型振動による項を加えた形で与えられている。すなわち、式 (9) は右辺の第 2 項、および第 3 項を除けば、線型振動の運動方程式を表わすものと思われる。このことは、復元力特性で線型の領域にあるときは (図-2 で傾き α の線上にあるとき)、式 (9) の非線型振動による項 (右辺の第 2、第 3 項) は 0 となり (θ の増減がないので)、残留変位として式 (4) の $[L]\{\theta\}$ の項を解 $\{y\}$ に加えて応答変位が計算されることを意味している。

式 (9) は非線型振動による項を、右辺の強制力項として持っているとも考えられることから、モーダルアナリシスが適用されうる可能性を持っている。すなわち、式 (9) で回転角 θ は何らかの形で y の関数であると考えられるが θ が y の関数となるのは 図-2 で点 P が EB 上および DC 上にある場合に限ること、および多質点系ではすべての質点において、同時に θ が y の関数になることは非常にまれであると予想されること、および θ を y の関数で与えて解析することは非常に複雑な解法を招き、本研究の目的には必ずしも見合わないなどのことから、本研究では近似的に θ と y とは互いに独立であると仮定した。いま i 次のモードを $\{Y_i\}$ 、時間関数を q_i とすれば、行列 $\{y\}$ は

$$\{y\} = \sum_{i=1}^n \{Y_i\} q_i \dots \dots \dots (10)$$

で表わされる。式 (10) を式 (9) に代入して直交条件式

$$\left. \begin{aligned} \{Y_j\}^T [m]^D \{Y_i\} &= 0 \quad (i \neq j) \\ \{Y_j\}^T [k] \{Y_i\} &= 0 \quad (i \neq j) \\ \{Y_j\}^T [c] \{Y_i\} &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

(ここで $\{Y_j\}^T$ は $\{Y_j\}$ を転置したものである) を導入して整理すると、 i 次の方程式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \{Y_i\}^T [m]^D \{Y_i\} \ddot{q}_i + \{Y_i\}^T [c] \{Y_i\} \dot{q}_i \\ + \{Y_i\}^T [k] \{Y_i\} q_i = - \{Y_i\}^T [m]^D \{\ddot{z}\} \\ - \{Y_i\}^T [c] [L] \{\dot{\theta}\} - \{Y_i\}^T [m]^D [L] \{\ddot{\theta}\} \end{aligned} \dots \dots \dots (12)$$

$$\text{いま } \left. \begin{aligned} M_{Si} &= \{Y_i\}^T [m]^D \{Y_i\} \\ K_{Bi} &= \{Y_i\}^T [k] \{Y_i\} \\ C_{Di} &= \{Y_i\}^T [c] \{Y_i\} \\ p_i^2 &= K_{Bi} / M_{Si} \\ h_i &= C_{Di} / 2M_{Si} p_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

とおけば、式 (12) はさらに簡単な形で次式のごとく与えられる。

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + 2 p_i h_i \dot{q}_i + p_i^2 q_i = - \{Y_i\}^T [m]^D \{\ddot{z}\} / M_{Si} \\ - \{Y_i\}^T [c] [L] \{\dot{\theta}\} / M_{Si} \\ - \{Y_i\}^T [m]^D [L] \{\ddot{\theta}\} / M_{Si} \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

ここで h_i は粘性減衰定数を意味する。

以上のごとく、運動方程式 (9) にはモーダルアナリシスが適用され、その結果 i 次振動の方程式として式 (14) が得られたが、式 (14) は線型応答でモーダルアナリシスを適用した場合の式に、 θ を含んだ新しい項 (式 (14) で右辺の第 2 項および第 3 項) を加えた形となっている。この θ は式 (2) を用いて曲げモーメントから決定される性質を持つため、式 (14) は試算方式で求められる。すなわち、まず θ は適当な値で仮定され、この θ の値を用いた線型微分方程式としての式 (14) を解き、この解から曲げモーメントを算出する。次に、この算出された曲げモーメントを用いて式 (2) から θ を計算する。この結果得られた θ と最初に仮定した θ とが一致するまで試算が繰り返されるわけである。なお、式 (14) の右辺第 2 項は一般に相当小さい影響力を持つと考えられるが、同時に、行列 $[c]$ が含まれており取り扱いが非常に困難なため、本報告の数値計算ではこの項を省略している。

3. 片持ばりによる実験的研究

(1) 実験方法

ここでの実験的研究のおもな目的は、本研究で提案さ

れた運動方程式およびその解法がどの程度信頼できるものかを簡単な実験方法で知ることである。この

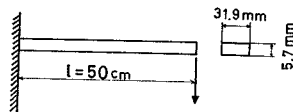


図-3 実験模型

目的のためには、実験装置あるいは模型の構造などから生じる誤差はできるだけ小さいことが望まれる。本研究では図-3のごとく非常に単純な構造を持つ片持ばりが模型として選ばれた。この模型は50 cmのスパンを持ち、スパンにわたって一様な矩形断面で、材料はSS41材からできている。また埋込端は圧縮試験機によって十分に固定されている。

模型は振動モデルに置換されて振動計算が行なわれるが、このような構造物の線型振動においては、一般に3質点系で十分な精度が得られることから、本研究では3質点系の振動モデルで数値計算が行なわれた。このモデルの振動モードおよび円振動数は図-4に示してある。

復元力特性は数多くの静的な載荷試験より求めた。その結果、図-2は

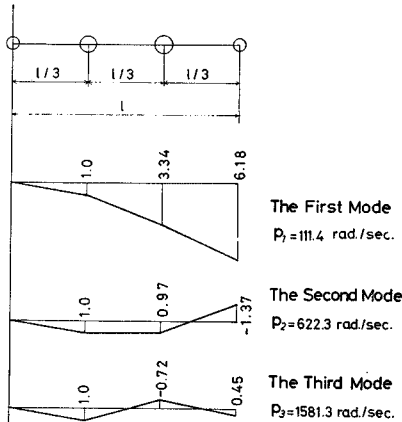


図-4 振動モデルと振動モード

$$\left. \begin{aligned} a &= 1.82 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{cm} / \text{rad.} \\ b &= 1.20 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm} / \text{rad.} \\ M_y &= 9.75 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{cm} \\ \phi_y &= 5.37 \times 10^{-2} \text{ rad.} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

の値で近似的に描くことができた。

起振は、片持ばりの先端に集中荷重を加えた後、すみやかに除去するという方法を取り、荷重が除去された後、片持ばりは自由振動を行なうものとした。集中荷重は非線型振動を行なうのに十分な大きさが必要とされるが、本実験では初期に載荷した集中荷重によって生じた埋込端での初期曲げモーメント $M_{(t=0)}$ が

$$\left. \begin{aligned} M_{(t=0)} &= 1.0105 \times 10^3 \sim 1.0855 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{cm} \end{aligned} \right\} \text{すなわち}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{(t=0)} / M_y &= 1.036 \sim 1.113 \\ \phi_{(t=0)} / \phi_y &= 1.552 \sim 2.719 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

の値の範囲をとる場合について、4段階に別けて実験を行なった。なお、振動の測定は断面の上下面のひずみを動的に測定することによって行なわれ、また線型自由振動から粘性減衰定数は $h_1 = h_2 = h_3 = 0.001$ と定められた。

(2) 理論との比較

測定結果が動的なひずみで得られることは前に記したが、測定結果と理論の数値計算結果との比較はこの動的なひずみで行なうこととした。このため数値計算から得られた曲げモーメントは、あらかじめ静的な載荷試験で得られている「曲げモーメント—ひずみ」の関係を用いてひずみに換算される。

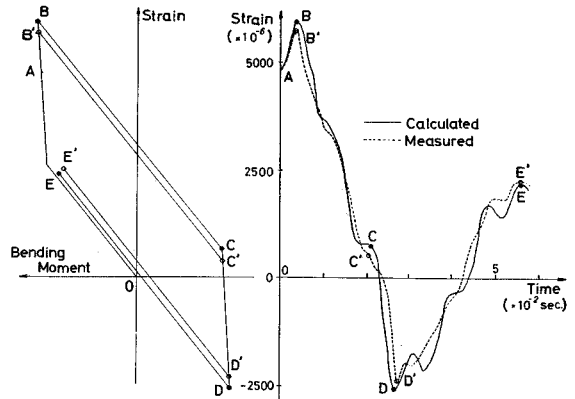


図-5 埋込端の「ひずみ—時間」曲線 ($M_{(t=0)} = 1085.5 \text{ kg} \cdot \text{cm}$)

図-5は、埋込端の初期の曲げモーメント $M_{(t=0)}$ が $M_{(t=0)} = 1085.5 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ のときの埋込端の「ひずみ—時間」曲線を記したのだが、このひずみは、正確には埋込端より5 mm離れた箇所の値が測定あるいは計算されたものである。

図-5で、実測ひずみと理論計算ひずみとが大差のない「ひずみ—時間」曲線を描くことが認められる。この結果は式(16)で与えられた範囲内の他の初期曲げモーメントに対しても同様のことが言えた。また図-5では、「ひずみ—時間」曲線が描かれているが、これを「曲げモーメント—時間」曲線に変換すれば、実測結果と理論計算結果とはさらに一致する曲線を描くことが予想される。

以上の実験的研究から、本研究で提案された曲げ振動系の計算方法が検討されたが、さらにいろいろな種類の外力に対する強制振動の場合についても研究を進めたい。

4. 数値計算例

(1) 振動モデル

数値計算に用いられた振動モデルは、前節において実験模型として扱われた均一断面を持った片持ばり(図-3)を 図-1 のごとくモデル化したものである。振動モデルを形成する質点の数および配置方法は数値結果の精度の問題と関連すると思われる、またこのことが本研究の解法そのものの可能性(たとえば、電子計算機の演算時間および容量に関して)と無関係ではないと考えられるが、これらの問題についてはさらに研究を進める予定であり、本報告においては 図-6 に示したごとく等間隔に配置された3質点系が扱われている。

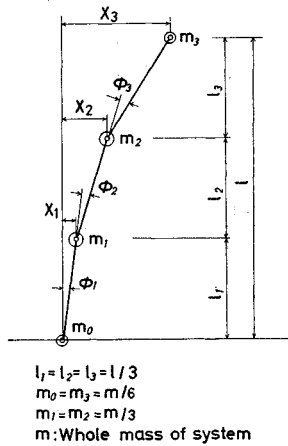


図-6 数値計算例で用いられた振動モデル

このモデルが持つ固有モードは 図-4 で示されたものと同じであるが、固有周期は質点の質量、系の剛性、系の寸法などから決定される値である。このため、数値例に普遍性を持たせる方法として、1次振動周期を T_1 として2次、3次の周期をそれぞれ $T_2=0.1790 T_1$, $T_3=0.07045 T_1$ で与える。このことから後述される「応答量-時間」曲線におけるごとく、応答時間 t と T_1 との比 t/T_1 でもって周期と経過時間の関係を表わすことができることとなり、数値例における固有周期が一般性を持つことが可能となる。

(2) 復元力特性

図-1 で示された振動モデルの回転ヒンジが本研究においては 図-2 の復元力特性を持つことは前述した。図-2 の復元力特性を決定するものは2つの直線の傾き a と b および線型限界の値を示す M_y あるいは ϕ_y であり、これらの値が定まれば応答計算が進行するに従って履歴ループが描かれる。これらの a, b および $M_y(\phi_y)$ の値は構造物が個々に持つ固有なものであるが、前記(1)で固有周期について述べたごとく、本研究の数値例は数値結果に一般性を持たせる方法を取り、次に述べるごとく a, b および $M_y(\phi_y)$ の値からパラメーター A と n を定義して復元力特性を決定した。

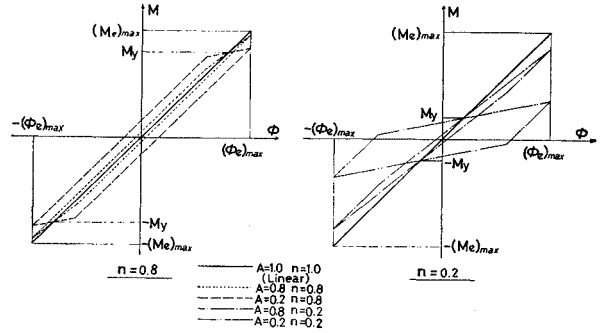


図-7 復元力特性の例

a) 値 a は構造物の固有周期を決定する要素の一つであるが、本研究では固有周期を無次元量 (t/T_1) で扱うため、値 a が固有の値を持つ意義は小さいと思われる。このためパラメーター A を

$$A = b/a \quad \dots\dots\dots (17)$$

で定義して、値 a は値 b とあわせて無次元化される。

b) 線型限界を決定する値 $M_y(\phi_y)$ は同じく構造物に固有な値である。そしてまた、線型限界の値は構造物の重要度を考えた安全性から検討されたり、期待される地震動の大きさを考慮して扱われるものと思われる。このような考えに基づいて、本研究の数値例では地震動に対する線型応答の値を基準にして、線型限界の値をパラメーター n で表示した。すなわち、与えられた地震動(これは後に説明する)に対する線型応答量の絶対最大値を $(M_e)_{max}$ (あるいは $(\phi_e)_{max}$) とする。この地震動に対する線型限界 $M_y(\phi_y)$ は n パラメーターとして次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_y &= n \cdot (M_e)_{max} \\ \phi_y &= n \cdot (\phi_e)_{max} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

以上のごとく、復元力特性はパラメーター A と n で表わされることとなるが、本研究では A と n がそれぞれ 0.8 および 0.2 の2つの値を持つ場合について計算例を記した。この場合の復元力特性が最大回転角 $\pm(\phi_e)_{max}$ を持つ閉じた1ループを描くときの例が 図-7 に示してある。

なお、このパラメーター A と n の定義は筆者がこれまで報告した研究^{1), 8)} に記されているものと同じである。

(3) 入力地震波

本研究は数値計算例の入力として、振動モデルの1次周期に共振する正弦波を考えたが、同時に実録加速度波(Taft)についても計算を行ない、参考として比較してある。以下にこれらの入力波について説明する。

a) 正弦波地震動

図-8 に示されたごとく、振幅 z_0 を持ち、振動モー

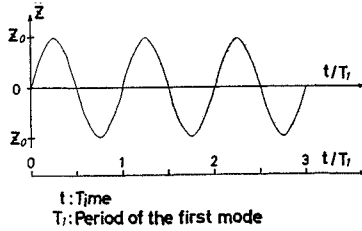


図-8 正弦波入力

ルの1次周期 T_1 と同じ周期を持った正弦波が3周期の長さのあいだ作用する場合を考えた。これを式で表わせば

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} &= z_0 \sin \frac{2\pi}{T_1} t \quad (0 \leq t \leq 3T_1) \\ \ddot{z} &= 0 \quad (3T_1 < t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

b) 実録波地震動

最大加速度が 200 gal になるように拡大された実録波として Taft. Calif. 1952 N21°W 方向が選ばれ、この記録のうち最初の 14 秒間の波形が入力波とされた。

Taft. の線型振動の変位応答スペクトルは1秒付近の周期について考えると、周期が 0.7 秒のときに凸となる比較的鋭敏なピークを持ち、周期が 1.0 秒で下に凸となる大きなピークを持つ。このことから、実録地震波に対する振動モデルの周期は1次周期が 0.7 秒と 1.0 秒の二種の周期が代表的なものとして選ばれ、計算例として扱われた。

(4) 応答曲線

前にも記したが、本研究は A と n をパラメーターとして数値計算を試みており、ここで報告するのは表-1 に示してあるごとく 5 種の TYPE の復元力特性についてである。

表-1

| TYPE | | A | n |
|--------|------------|-----|-----|
| TYPE-1 | Linear | 1.0 | 1.0 |
| TYPE-2 | Non-linear | 0.8 | 0.8 |
| TYPE-3 | Non-linear | 0.2 | 0.8 |
| TYPE-4 | Non-linear | 0.8 | 0.2 |
| TYPE-5 | Non-linear | 0.2 | 0.2 |

なお、ここで扱う数値例はすべて粘性減衰が作用しない場合であり、粘性減衰が作用する場合の応答についてはさらに検討を加える予定であり、後日報告の機会を待たたい。

図-9 は正弦波の入力(図-8)を受けたときの系の自由端の応答変位 (x_s) を示したものである。図-9 の縦軸には x_s/x_s がとられているが、 x_s は入力加速度の最大値が静的に作用したときの自由端の変位であり、縦

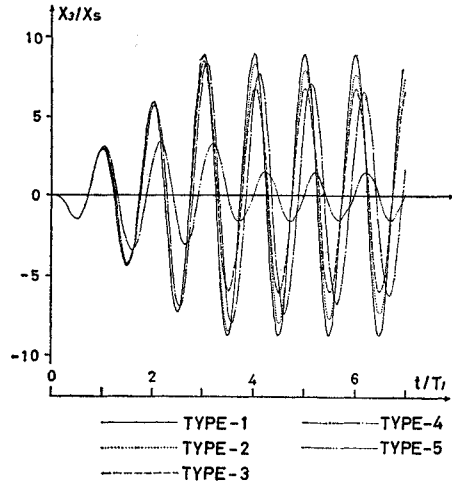


図-9 応答変位(自由端)

軸はこの x_s に対する応答変位 x_s の倍率と考えられる。すなわち、図-10 で、 EI (曲げ剛さ) および g (単位長さ当たりの重量) は長さ方向に一定であるから、 g を重力の加速度として x_s は次式で与えられる。

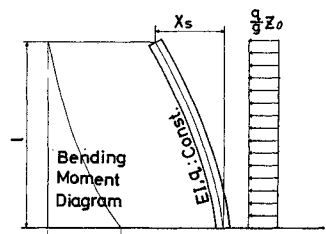


図-10 x_s と M_s の定義

$$x_s = \frac{g}{8EI} z_0 l^4 \dots\dots\dots (20)$$

1 次の円振動数を p_1 とすれば 図-10 の構造物では一般に

$$\frac{EIg}{q} = \frac{p_1^2 l^4}{(\beta_1 l)^4} \dots\dots\dots (21)$$

の関係があり⁹⁾、 $\beta_1 l$ は固有値であるが一般には振動数方程式から

$$\beta_1 l = 1.8751 \dots\dots\dots (22)$$

で与えられる。式 (21) と式 (22) を式 (20) に代入して x_s を求めれば

$$x_s = \frac{(1.8751)^4}{8} \frac{z_0}{p_1^2} = 1.5453 \frac{z_0}{p_1^2} \dots\dots\dots (23)$$

このようにして x_s を求めておき、この x_s に対する応答変位の倍率 x_s/x_s に注目して 図-9 は描かれている。

図-9 で、TYPE-1 の線型応答に比べて TYPE-2 および TYPE-3 はわずかに応答変位を減少していく傾向を持つことが観察できるが、応答曲線に現われる線型応答との位相のずれは顕著でない。これに対して TYPE-4 および TYPE-5 は TYPE-1 に比べて明らかに長

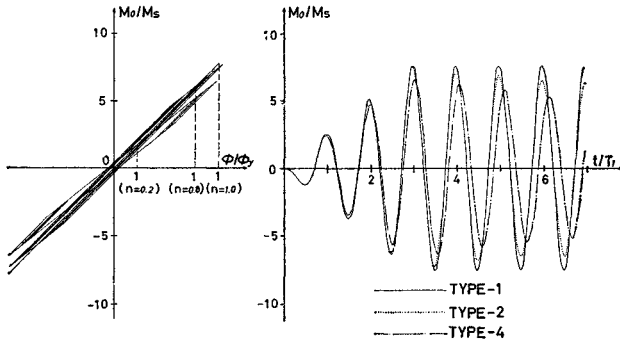


図-11 応答曲げモーメント (固定端)

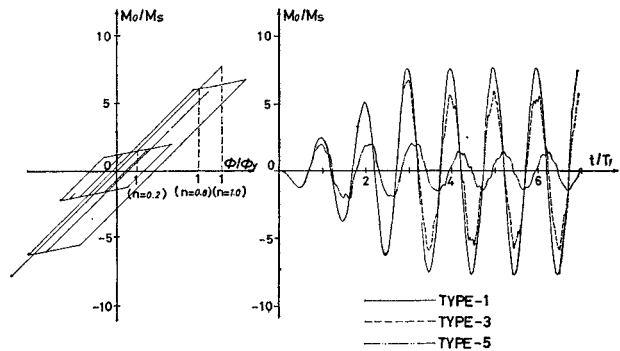


図-12 応答曲げモーメント (固定端)

い周期を持つようになり、TYPE-5 は大きく振幅を減少していることが注目される。

図-11, 図-12 は 図-9 の場合と同様に、図-10 で埋込端の曲げモーメントを M_s とすれば、埋込端での応答曲げモーメント M_o と M_s との比 M_o/M_s を縦軸にして表わしたものである。図-11, 図-12 には同時に、応答の過程で描かれた復元力特性の履歴が示されているが、これらの履歴ループを観察すれば、自由振動の範囲では閉じたループを描き続ける TYPE (TYPE-2, 4) と閉じたループを描かない TYPE (TYPE-3, 5) と両方存在していることが判明できる。

図-13 は履歴ループが描かれる様子についてさらにわかりやすく説明したものだが、ループを描く原因となる増分の回転角 θ (図-2 参照) に基づく変位 $\theta \cdot l$ を x_s で割った $\theta \cdot l/x_s$ が縦軸になっている。この図から、自由振動において閉じたループを描きつづけた TYPE-2,4 においては t/T_1 の増加とともに (応答時間の経過とともに) 常に $\theta \cdot l/x_s$ が正負を繰り返すことがわかる。なお、ここに報告したすべての TYPE の応答においては埋込端以外の回転ヒンジが非線型の範囲に入った例はなかったため、 θ は埋込端での θ_1

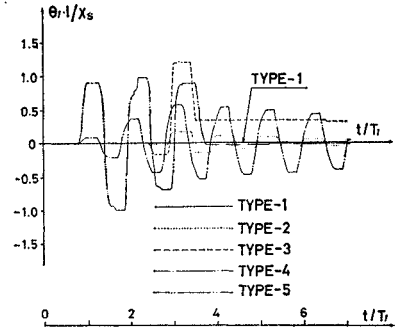


図-13 θ_1 の変動

だけが生じ、このため 図-13 の $\theta_1 l$ は増分の回転角 θ_1 による自由端の変位を意味している。

図-9, 11, 12, 13 から明らかなように、復元力特性が応答過程に大きく影響することが注目される。1 質点系が実録地震波のような不規則な入力波を受けたときには、復元力特性が応答に大きく作用し、また履歴ループを常に完全に閉じた形で描くとは限らないことなどについては前に報告したが^{1),3)}、本数値例のごとく正弦波に対する応答においても同様のことが観測できたことは興味あると思われる。このことについてはさらに高次振動の影響をも検討して今後解析していきたいと考えている。

図-14 は実録地震加速度波 (Taft) に対する応答変位を求めたものだが、前述されたごとく、1 次の固有周期 T_1 が 0.7 秒と 1.0 秒の二種類の周期について応答が比較されている。0.7 秒の周期は Taft. に対して共振的な周期と思われ、変位応答スペクトルでは上に凸なピークを持つ。一方、1.0 秒の周期は 0.7 秒の場合と逆に下に凸なピークを持つ。両者を比較して明らかなごとく、0.7 秒の周期の場合は正弦波に対する応答 (図-9) と似た傾向を持ち、1.0 秒の周期の場合はこれらとまったく異なった傾向を示している。たとえば、TYPE-4 の

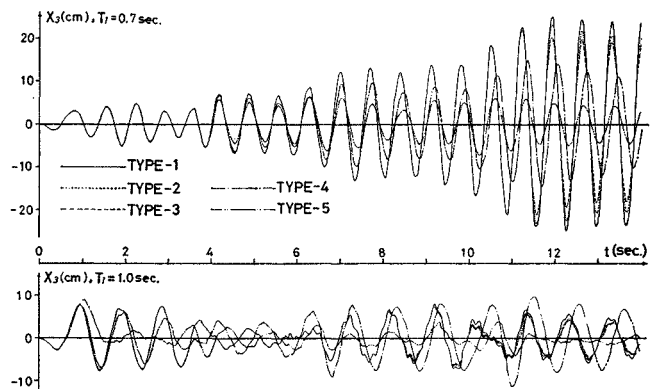


図-14 Taft. に対する応答変位 ($T_1=0.7$ sec, $T_1=1.0$ sec)

応答はあたかも共振現象を生じたごとく TYPE-1 の線型応答の結果を上まわる応答量を示している。

5. 結 び

本報告は曲げ変形に支配されるような構造物を質点系に置き換えて地震応答を求めるときの非線型応答計算法を提案して、簡単な実験例および数値例を示したものが、これらの計算法には過大変形に伴う重力の影響および幾何学的な非線型性などによる誤差についてさらに検討を必要とする部分が残されており、今後これらの問題点について研究を進めていく予定である。また、いくつかの数値例によって、非線型応答が復元力特性に大きく支配されることが明らかにされたが、この問題は質点の数および高次振動の影響等の問題とともに数多くの数値例を求めることから、さらに検討していきたいと考えている。なお、本報告の一部は東京都立大学大学院博士課程における筆者の学位論文の一部を抜粋したものであることをここに付記する。

6. 記号（出現順）

- ϕ : 復元力特性における回転ヒンジの回転角
- ϕ_e : 曲げモーメントと線型関係にある回転角
- θ : 増分の回転角で曲げモーメントと関係しない
- m_n : 質点 n の質量
- l : 振動系の全長
- l_n : 質点 $n-1$ と n との間の長さ
- x_n : 質点 n の変位
- M : 曲げモーメント
- M_y : 線型限界を表わす曲げモーメント
- ϕ_y : 線型限界を表わす回転角
- a, b : 復元力特性における直線の傾き
- $\{y\}$: 線型的変位のベクトル
- $[\delta]$: 影響係数の行列
- $\{F\}$: 復元力のベクトル
- $[k]$: Stiffness Matrix
- \ddot{z} : 地動の加速度
- $[c]$: 粘性減衰係数の行列

- $\{Y_i\}$: i 次のモードのベクトル
- q_i : i 次の時間関数
- p_i : i 次の円振動数
- h_i : i 次の粘性減衰定数
- T_i : 振動系の i 次の固有周期
- m : 振動系の総質量
- A : パラメーター (= b/a)
- n : パラメーター (= $M_y / (M_e)_{\max}$)
- $(M_e)_{\max}$: 線型応答曲げモーメントの絶対最大値
- $(\phi_e)_{\max}$: 線型応答回転角の絶対最大値
- z_0 : 正弦波加速度の振幅
- t : 時間
- x_S : 入力加速度の最大値が静的に作用したときの振動系の自由端の変位
- M_S : x_S と同様な状態における埋込端の曲げモーメント

謝辞：本研究は東京都立大学教授 奥田秋夫博士のご指導のもとに行なわれたもので、ここに厚く感謝申し上げますとともに、実験にあたってご助力いただいた大学院学生、植松幹夫氏ほか研究室の皆様にも厚く感謝申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 山田善一・梶尾次郎：動的解析における桁のモデル化に関する研究，第 21 回土木学会年次学術講演会講演概要，1966
- 2) 山崎徳也・石川信隆・黒木健実：片持ばりの動的弾塑性挙動について，第 22 回土木学会年次学術講演会講演概要，1967
- 3) H.H. Bleich and M.C. Salvadori : Impulsive Motion of Elasto-Plastic Beams, Proc. ASCE, Vol. 79, EM, 1953
- 4) 国井隆弘：Bi-linear 復元力特性を持つ構造物の地震応答，土木学会論文報告集，No. 188, 1971-4
- 5) 国井隆弘：曲げ振動系の非線型応答，第 10 回地震工学研究発表会講演概要，1969
- 6) 国井隆弘：非線型振動についての一考察，第 24 回土木学会年次学術講演会講演概要，1969
- 7) 奥田秋夫・国井隆弘・植松幹夫：片持ばりの非線型振動，第 25 回土木学会年次学術講演会講演概要，1970
- 8) 国井隆弘：非線型復元力特性を持つ構造物の地震応答，第 25 回土木学会年次学術講演会講演概要，1970
- 9) 岡本舜三：建設技術者のための振動学，p. 74~76，オーム社

(1971. 5. 12・受付)