

弾性地盤中にある基礎構造物の地震応答特性

—楕円断面を有する剛基礎—

SEISMIC RESPONSE CHARACTERISTICS OF FOUNDATION
STRUCTURES IN ELASTIC GROUND

—Rigid Foundation Structures with Elliptic Cross Section—

後藤 尚 男*・秋 吉 卓**

By Hisao Goto and Takashi Akiyoshi

1. 緒 言

本研究は弾性地盤中に支持された剛な基礎構造物が調和波としての外乱を受けるときの周波数応答特性を理論的に解明し、しかる後その応答特性を近似的な表示で置き換えることによって、表層と構造物との相互作用を加味した単位衝撃応答関数の解析的表示を導き出し、それより定常確率過程としての不規則外乱を受ける基礎構造物の過渡応答について若干の考察を行なったものである。

地盤に直接支持された構造物の耐震設計について、その支持する地盤の復元力特性が線型であれ、非線型であれ、これまでに数多くの研究がなされてきたが、入力調和波であって対象とする系が線型の場合のみに限定すると、つぎの2つに大別されよう。その第1は地盤を半無限弾性体として、その表面に構造物が載っている場合である。この理論的な取扱いは Lamb¹⁾ 以来多くの研究者によってほぼ完全な形にまで仕上げられたといっても過言ではあるまい。かかる問題自体は最初は半無限弾性体境界面上の点振動源によって生ずる波動の伝播逸散機構が主たる興味の対象であって、境界条件のとり方が比較的容易であることが特徴であろう。このことから近年では上載構造物の形状が円形のみならず、矩形の場合にまでの理論解が見出されている²⁾。しかるに現実の土木・建築構造物のように地盤中にその基礎が埋設されているような系に対して、これらの解析結果を適用することは、かなり困難な点を含んでいるといわねばなるまい。

他の1つは、構造物の基礎が弾性地盤中に埋設されている場合である。この場合は表層に構造物が載っている場合と異なり、境界条件が変位または応力のいずれかに

統一できない、いわゆる混合境界値問題となるばかりでなく、構造物の根入れ部分の断面形もきわめて特殊なものに限られてくる。このように解析にはかなりの技術的制約を受けるため、かかる系に対する波動論的な解析例はあまり多くはない。その中で、堅い基盤と等方均質な表層とから構成されている地盤中に、円柱基礎が根入れされている系において、表層に対しては波動の逸散現象を取り入れた場合の理論解が見出されている³⁾。ところでこの場合に対象とされた地中構造物はその断面が円形であるため、基礎の細長比による影響を知り得ても、断面形状の差異による影響を知り得ない。かかる点からわれわれは、系の地盤構成を上記解析例と同様にして、地中構造物の断面が楕円形をした剛な基礎体の場合についての若干の考察をすでに報告してきた⁴⁾。

ところで上述の議論は周波数応答を解析することに尽きるが、これは内容的には Fourier 変換形を求めることと等価である。しかるに、実地震動のように、時間的、空間的に不規則に変動する入力に対しての地盤あるいは基礎構造物の応答を解析的に記述するためには、それらの単位衝撃応答関数が解析的に表示されている必要がある。しかるに周波数応答解析の結果が周波数に関して複雑であるため、これを用いて単位衝撃応答関数をうるまでの操作が容易ではない。そこで周波数応答解析の際に得られた表層地盤の動的効果を近似的な式で置き換えることによって、単位衝撃応答関数の解析的な表示を可能たらしめ、それよりこの系の不規則な入力に対する応答に関して若干の検討を行なった。

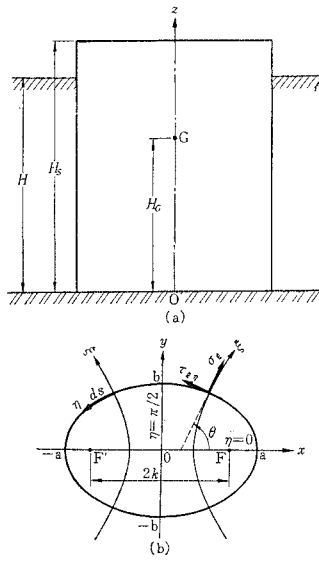
2. 周波数応答解析

理論解析に当って、地盤および剛な基礎体に関して、つぎのような仮定を行なう。(1) 剛基礎体はロッキング振動のみをするものとし、その回転軸は剛基礎体底面の

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部交通土木工学教室

** 正会員 京都大学助手 工学部交通土木工学教室

中心を通り、外乱と直交する直線とする。(2) 表層地盤は等方均質な半無限弾性体であって、水平せん断振動に対してのみ粘性抵抗が働く。(3) 基礎体の底面は堅い基盤に支持されていて、その基礎の特性はロッキングのばね定数で表わされるものとする。(4) 表層地盤内における上下方向の変位は考慮しない。



図一 モデルとその断面

(1) 表層地盤に関する運動方程式

図一(a) に示すように、厚さ H の表層地盤中において、その下端底面が堅い基盤に支持されている、高さ H_0 、長軸 $2a$ 、短軸 $2b$ なる楕円柱を考える。このとき直角座標 (x, y, z) と楕円柱座標 (ξ, η, z) とはすでに知られているとおりつぎの関係にある。

$$x = k \cosh \xi \cos \eta, \quad y = k \sinh \xi \sin \eta, \quad z = z$$

ただし、 $k = \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$)、 $2k$: 2 焦点間の距離、また楕円柱表面を表わす座標 ξ_0 は

$$\xi_0 = \tanh^{-1} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

このとき 図一(b) において、調和波外乱 $u_g = u_0 e^{i\omega t}$ の振動方向が楕円の短軸すなわち y 軸方向にあるとき、表層地盤に関する運動方程式は図示の楕円柱座標を用いてつぎのように書き表わされる⁹⁾。

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{l \partial \xi} - 2\mu \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{l \partial \eta} + 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial (l \tilde{\omega}_\eta)}{l \partial z} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_\xi + u_g \sin \theta) \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{l \partial \eta} - 2 \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial (l \tilde{\omega}_\xi)}{l \partial z} + 2\mu \frac{\partial \tilde{\omega}_z}{l \partial \xi} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_\eta + u_g \cos \theta) \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

ここに、 $l = k \sqrt{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta}$ 、 λ, μ : Lamé の定数、 μ' : 水平せん断振動に対する粘性減衰係数、 ρ : 表層地盤の密度、 u_ξ, u_η : ξ, η 方向の変位、 θ : 楕円柱面の法線と x 軸の正の向きとのなす角。さらに dilatation Δ および rotation $\tilde{\omega}_\xi, \tilde{\omega}_\eta, \tilde{\omega}_z$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial (l u_\xi)}{l^2 \partial \xi} + \frac{\partial (l u_\eta)}{l^2 \partial \eta}, \quad 2 \tilde{\omega}_\xi = -\frac{\partial u_\eta}{\partial z} \\ 2 \tilde{\omega}_\eta &= \frac{\partial u_\xi}{\partial z}, \quad 2 \tilde{\omega}_z = \frac{\partial (l u_\eta)}{l^2 \partial \xi} - \frac{\partial (l u_\xi)}{l^2 \partial \eta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3)$$

このとき θ と ξ, η とはつぎの関係にある。

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\partial x}{l \partial \xi} = \frac{\partial y}{l \partial \eta} = \frac{k \sinh \xi \cos \eta}{l} \\ &= \frac{b \cos \eta}{l} \quad (\xi = \xi_0 \text{ のとき}) \\ \sin \theta &= \frac{\partial y}{l \partial \xi} = -\frac{\partial x}{l \partial \eta} = \frac{k \cosh \xi \sin \eta}{l} \\ &= \frac{a \sin \eta}{l} \quad (\xi = \xi_0 \text{ のとき}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.4)$$

ここで式 (2.1), (2.2) の連立微分方程式を解くのに、図一 からつぎの境界条件が書ける。

- (i) $\eta = 0 : u_\xi = 0$
- (ii) $\eta = \pi/2 : u_\eta = 0$
- (iii) $\xi = \xi_0$: 表層地盤と構造物との変位の連続条件
- (iv) $\xi = \infty : \sigma_\xi = \sigma_\eta = \tau_{\xi\eta} = 0$
- (v) $z = 0 : u_z = 0$
- (vi) $z = H : \tau_{\xi z} = \tau_{\eta z} = 0$

もし地震動が長軸方向のときは境界条件式 (2.5) において (i), (ii) をそれぞれ (i) $\eta = 0 : u_\eta = 0$, (ii) $\eta = \pi/2 : u_\xi = 0$ とすればよい。ただし短・長軸方向の振動における境界条件式中の (v) は最初の仮定より常に満たされている。

式 (2.1), (2.2) より dilatation Δ と rotation $\tilde{\omega}_z$ に関するつぎの微分方程式をうる。

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta + \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad \dots\dots(2.6)$$

$$\mu \nabla^2 \tilde{\omega}_z + \left(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial t^2} \quad \dots\dots(2.7)$$

ここに、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{l^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{l^2 \partial \eta^2}$

したがって式 (2.6), (2.7) の両式を解けば dilatation および rotation が得られるが、直接に変位を求める方法をつぎのように考える。すなわち式 (2.6), (2.7) が ξ, η, z, t に関して変数分離の形の解を持つことは明らかであり、かつまた z 方向には有限領域の問題であるから、これを Fourier 級数に展開することができる。よって境界条件式 (2.5) の (vi) を満たすような解は変位の potential $\phi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)$ を用いて次式のように表わせる。

$$u_\xi = \left(\frac{\partial \phi}{l \partial \xi} - \frac{\partial \psi}{l \partial \eta} \right) \sin \frac{(2m+1)\pi z}{H} \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots(2.8)$$

$$u_\eta = \left(\frac{\partial \phi}{l \partial \eta} + \frac{\partial \psi}{l \partial \xi} \right) \sin \frac{(2m+1)\pi z}{H} \cdot e^{i\omega t} \quad \dots\dots(2.9)$$

これより、式 (2.8), (2.9) を式 (2.6), (2.7) に持込むと $\nabla^2 \phi - \alpha_m^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots(2.10)$

$\nabla^2 \psi - \beta_m^2 \psi = 0 \quad \dots\dots\dots(2.11)$

ここに、 $\alpha_m = \pi/2 H \cdot \nu_1 / l \cdot \xi_m$ 、 $\beta_m = \pi/2 H \cdot \eta_m$ 、 $\xi_m = [(1 + 2ih_g \omega / \omega_g)(2m+1)^2 - (\omega / \omega_g)^2]^{1/2}$ 、 $(m=0, 1, 2 \dots)$ 、 $\mu' / \mu = 2h_g / \omega_g$ 、 $\nu_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$ 、 $\nu_2^2 = \mu / \rho$ であ

て、 v_t, v_r および ω_g はそれぞれ表層地盤における縦波、横波の伝播速度およびせん断 1 次の固有円振動数を表わす。

したがって式 (2.10), (2.11) より境界条件式 (2.5) の (i) および (ii) を満たす potential $\phi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)$ としてつぎのものが考えられる。

$$\phi = C \cdot Gek_{2n+1}(\xi, q_1) se_{2n+1}(\eta, q_1) \dots\dots\dots(2.12)$$

$$\psi = D \cdot Fek_{2n+1}(\xi, q_2) ce_{2n+1}(\eta, q_2) \dots\dots\dots(2.13)$$

ここに、 $Gek_{2n+1}(\xi, q_1), Fek_{2n+1}(\xi, q_2)$ および $se_{2n+1}(\eta, q_1), ce_{2n+1}(\eta, q_2), (n=0, 1, 2, \dots)$ はそれぞれ modified Mathieu function および Mathieu function である⁶⁾。このとき q_1, q_2 はつぎのようなものである。

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\alpha_m^2 k^2}{4} = \frac{k^2}{4} \left(\frac{\pi}{2H} \right)^2 \left(\frac{v_t}{v_l} \right)^2 \xi_m^2 \\ q_2 &= \frac{\beta_m^2 k^2}{4} = \frac{k^2}{4} \left(\frac{\pi}{2H} \right)^2 \xi_m^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.14)$$

これら ϕ, ψ を用いることにより、 A および $\tilde{\omega}_z$ による変位を知ることができるが、これにさらに式 (2.1), (2.2) において $A = \tilde{\omega}_z = 0$ を満たす水平せん断振動に相当する解を加えることによって、下記のように所期の解が得られる。

$$u_\xi = \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{\infty} \left[C \cdot \dot{Gek}_{2n+1}(\xi, q_1) se_{2n+1}(\eta, q_1) - D \cdot \dot{Fek}_{2n+1}(\xi, q_2) ce_{2n+1}(\eta, q_2) + \frac{4 u_0 k}{(2m+1)\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \cosh \xi \sin \eta \right] \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2H} \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots(2.15)$$

$$u_\eta = \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{\infty} \left[C \cdot \dot{Gek}_{2n+1}(\xi, q_1) se_{2n+1}(\eta, q_1) + D \cdot \dot{Fek}_{2n+1}(\xi, q_2) ce_{2n+1}(\eta, q_2) + \frac{4 u_0 k}{(2m+1)\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \sinh \xi \cos \eta \right] \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2H} \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots(2.16)$$

ここに、 C, D は未定係数であり、Mathieu function あるいは modified Mathieu function の上部に \cdot 印を付したものは、その微分形を表わしている。かくして得られた解が境界条件式 (2.5) のうちで (iii) 以外をすべて満たし、無限遠においては水平方向のせん断振動のみを残した解となることはいうまでもない。

さて未定係数 C, D は境界条件式 (2.5) の (iii) を適用することによって決定される。すなわち、剛な楕円柱は回転の中心が下端底面の中心にあって、外乱の方向と直角であるようなロッキング振動をすと仮定すると、角振幅 φ_0 の回転に対して底面より任意の高さ z における楕円柱の水平変位 u_ξ, u_η は $\xi = \xi_0$ においてそれぞれつぎのような Fourier 級数に展開される。

$$u_\xi = \varphi_0 z \cos \theta = \frac{8 \varphi_0 H a}{\pi^2 l} \sin \eta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2H} \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots(2.17)$$

$$u_\eta = \varphi_0 z \sin \theta = \frac{8 \varphi_0 H b}{\pi^2 l} \cos \eta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2H} \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots(2.18)$$

したがって、未定係数 C, D は $\xi = \xi_0$ において式 (2.15), (2.16) と式 (2.17), (2.18) とを等置し、かつ Mathieu function の直交性を利用すると、 $n=0$ のときのみ 0 でない値が得られるので、その時の C, D をそれぞれ C_1, D_1 と記すと、これらの未定係数 C_1, D_1 は φ_0 をパラメータとして含んだ形で決定されるとともに、境界条件式 (2.5) の (i)~(vi) がすべて満たされる。このとき応力 $\sigma_\xi, \tau_{\xi\eta}$ と変位 u_ξ, u_η の関係を用いて、表層地盤が楕円柱の高さ方向単位長さ当りに与える全振動圧 $p(z)$ は途中の若干の計算過程を省略してつぎのようになる。

$$p(z) = \int_{\xi_0}^{\infty} \{ \sigma_\xi \cos \theta + \tau_{\xi\eta} \sin \theta \} ds = 4 \int_0^{\pi/2} \{ a \sin \eta \cdot \sigma_\xi + b \cos \eta \cdot \tau_{\xi\eta} \} d\eta = \sum_{m=0}^{\infty} \rho \pi \omega_g^2 \xi_m^2 \{ C_1 \cdot a B_1^{(1)} Gek_1(\xi_0, q_1) + D_1 \cdot b A_1^{(1)} Fek_1(\xi_0, q_2) \} \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2H} \cdot e^{i\omega t} = - \sum_{m=0}^{\infty} \rho \pi a b \omega_g^2 \xi_m^2 \left\{ \frac{8 \varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} - \frac{4 u_0}{(2m+1)\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right\} Q_m \sin \frac{(2m+1)\pi z}{2H} \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots(2.19)$$

ここに、

$$Q_m = \left[\frac{a}{b} (B_1^{(1)})^2 \frac{\dot{Fek}_1(\xi_0, q_2)}{Fek_1(\xi_0, q_2)} + \frac{b}{a} (A_1^{(1)})^2 \times \frac{\dot{Gek}_1(\xi_0, q_1)}{Gek_1(\xi_0, q_1)} - 2 A_1^{(1)} B_1^{(1)} \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) \times A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right] \left[\frac{\dot{Fek}_1(\xi_0, q_2)}{Fek_1(\xi_0, q_2)} \frac{Gek_1(\xi_0, q_1)}{Gek_1(\xi_0, q_1)} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \right] \dots\dots\dots(2.20)$$

また、 $A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$ は Mathieu function に特有の係数であって、それぞれ q_2, m および q_1, m の関数である。

かくして底面の中心軸まわりの、楕円柱の受ける転倒モーメント M は

$$M = \int_0^H p(z) z dz = - \sum_{m=0}^{\infty} \rho \pi a b \frac{4 H^2 (-1)^m}{(2m+1)^2 \pi^2} \times \left\{ \frac{8 \varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} - \frac{4 u_0}{(2m+1)\pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right\} \times Q_m \xi_m^2 \omega_g^2 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(2.21)$$

ところで、 $b/a \rightarrow 0$ すなわち楕円柱が薄い板のような極限状態の場合は

$$p(z) = - \sum_{m=0}^{\infty} \rho \pi a^2 \omega_g^2 \xi_m^2 \left\{ \frac{8 \varphi_0 H}{\pi^2} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} - \frac{4 u_0}{(2m+1) \pi \xi_m^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right\} \varrho_m \sin \times \frac{(2m+1) \pi z}{2H} \cdot e^{i \omega t} \dots\dots\dots(2.22)$$

ここに、

$$\varrho_m = (B_1^{(1)})^2 \frac{\dot{F}ek_1(\xi_0, q_2)}{Fek_1(\xi_0, q_2)} \sqrt{\frac{\dot{F}ek_1(\xi_0, q_2)}{Fek_1(\xi_0, q_2)}} \times \frac{\dot{G}ek_1(\xi_0, q_1)}{Gek_1(\xi_0, q_1)} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \dots\dots\dots(2.23)$$

このようにして、剛な楕円柱に作用する回転モーメント M が得られるので、これを外力として楕円柱のロッキング振動についての運動方程式に加えて、それを解けばこの剛な楕円柱の複素周波数応答を定める関係が得られる。すなわち、先述のごとくこの楕円柱が角振幅 φ_0 なるロッキング振動をしているとすると、楕円柱に関するつぎの運動方程式が成り立つから、表層と楕円柱との相互作用の結果として角振幅 φ_0 は次式を解くことによつて定められる

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c_s \frac{d \varphi}{dt} + k_R \varphi = -m_0 H_g \frac{d^2 u_g}{dt^2} + M \dots\dots\dots(2.24)$$

ここに、 m_0 ：楕円柱の総質量、 H_g ：重心の基盤面よりの高さ、 I ：ロッキング中心軸まわりの慣性モーメント、 k_R ：底面のロッキングのばね定数、 c_s ：ロッキングの粘性減衰係数。

いま式(2.24)の解を $\varphi = \varphi_0 e^{i \omega t}$ とすると、 φ_0 は次式のように定められる。

$$\varphi_0 = \frac{m_0 H_g + \frac{16 ab \rho H^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \varrho_m}{k_R + c_s i \omega - I \omega^2 + \frac{32 ab \rho H^3}{\pi^3} \omega_g^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi_m^2}{(2m+1)^4} \varrho_m \cdot u_0 \omega^2} \dots\dots\dots(2.25)$$

このように、形式的には埋設された構造物が円柱の場合の解法³⁾と見かけ上同様の取り扱いができるので、その解析において用いられた記号をそのまま踏襲すると、 $\omega=0$ のときの ϱ_m を ϱ_{ms} と書けば、このときの式(2.25)の分母の第4項目は静的水平ばね定数に相当することから、これとロッキングのばね定数 k_R との比を χ とすると、

$$\frac{32 ab \rho H^3}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varrho_{ms}}{(2m+1)^2} / k_R = \chi$$

と書ける。そこで

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi_m^2}{(2m+1)^4} \varrho_m / \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varrho_{ms}}{(2m+1)^2} &= f_1 + i f_2 \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \varrho_m / \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varrho_{ms}}{(2m+1)^2} &= g_1 + i g_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.26)$$

と置き換えると、楕円柱の底面から任意の高さ z にお

る周波数応答倍率 $|\alpha(i \omega; z)|$ はつぎのように書き改められる。

$$|\alpha(i \omega; z)| = \left| \frac{\varphi_0 z + u_0}{u_0} \right| = \left| 1 + \frac{Hz}{i_0^2} \left(\frac{\omega_g}{\omega_s} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \frac{z}{H} \chi (g_1 + i g_2) \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right. \\ \left. \frac{1 + 2 i h_s \frac{\omega}{\omega_s} - \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 + \chi (f_1 + i f_2)}{1 + 2 i h_s \frac{\omega}{\omega_s} - \left(\frac{\omega}{\omega_s} \right)^2 + \chi (f_1 + i f_2)} \right| \dots\dots\dots(2.27)$$

ここに、 $i_0 = \sqrt{I/m_0}$ 、 $\omega_s = \sqrt{k_R/I}$ 、 $m_0 = \rho_s \pi ab H_s$ 、 $c_s/I = 2 h_s \omega_s$ 、 $I = \rho_s \pi ab H_s \cdot (b^2/4 + H_s^2/3)$ 、 ρ_s ：楕円柱の密度。

以上が弾性地盤中の剛な楕円柱が短軸方向に振動する場合の周波数応答解析であるが、長軸方向の振動の場合も同様にして得られ、結局式(2.20)および式(2.23)として、

$b/a \neq 0$ のとき：

$$\varrho_m = \left[\frac{a}{b} (B_1^{(1)})^2 \frac{\dot{F}ek_1(\xi_0, q_1)}{Fek_1(\xi_0, q_1)} + \frac{b}{a} (A_1^{(1)})^2 \times \frac{\dot{G}ek_1(\xi_0, q_2)}{Gek_1(\xi_0, q_2)} - 2 A_1^{(1)} B_1^{(1)} \right. \\ \left. \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right] \sqrt{\frac{\dot{F}ek_1(\xi_0, q_1)}{Fek_1(\xi_0, q_1)}} \times \frac{\dot{G}ek_1(\xi_0, q_2)}{Gek_1(\xi_0, q_2)} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \dots\dots\dots(2.20)'$$

$b/a \rightarrow 0$ のとき：

$$\varrho_m = (B_1^{(1)})^2 \frac{\dot{F}ek_1(\xi_0, q_1)}{Fek_1(\xi_0, q_1)} \sqrt{\frac{\dot{F}ek_1(\xi_0, q_1)}{Fek_1(\xi_0, q_1)}} \times \frac{\dot{G}ek_1(\xi_0, q_2)}{Gek_1(\xi_0, q_2)} - \left(\sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(1)} B_{2r+1}^{(1)} \right)^2 \dots\dots\dots(2.23)'$$

を用いればよい。ただし、 $A_{2r+1}^{(1)}$ 、 $B_{2r+1}^{(1)}$ はそれぞれ q_1 、 m および q_2 、 m の関数であつて、正規化により $\sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{(1)})^2 = \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{(1)})^2 = 1/\pi$ の関係を用いた。なおこの $b/a \rightarrow 0$ のときの式(2.27)に相当する周波数応答倍率は次式で与えられる。

$$|\alpha(i \omega; z)| = \left| 1 + \frac{\pi}{2} \frac{z}{H} \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varrho_m / (2m+1)^3}{\sum_{m=0}^{\infty} \xi_m^2 \varrho_m / (2m+1)^4} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right| \\ = \left| 1 + \frac{\pi}{2} \frac{z}{H} \frac{g_1 + i g_2}{f_1 + i f_2} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right| \dots\dots\dots(2.28)$$

ところで基盤を静的回転ばね k_R のみで代表させるとすると、この k_R については、 $k_R \propto E_0 I_0 / \sqrt{A}$ (E_0 ：基盤のヤング率、 I_0 ：構造物と基盤との接触面の断面2次モーメント、 A ：接触面積) という簡単な関係がある⁷⁾。そこで、この剛な楕円柱の幾何学形状に関するパラメーター (a 、 b 、 H など) 以外の諸定数を一定として、便宜上これら諸定数を総括した係数 c_1 、 c_2 を用いると、短軸

方向の振動においては χ および ω_s/ω_g は以下のように表わされる。

$$\chi = c_1 \cdot \frac{\sqrt{ab}H}{(b/H)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{Q_{ms}}{(2m+1)^2} \dots\dots\dots (2.29)$$

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_g}\right)^2 = c_2 \cdot \frac{H}{H_s} \frac{H}{\sqrt{ab}} \frac{(b/H)^2}{(b/H)^2 + 4/3 \cdot (H_s/H)^2} \dots\dots\dots (2.30)$$

ここに、 ω_s : 楕円柱—基盤系の固有円振動数、 ω_g : 表層地盤のせん断1次固有円振動数。なお長軸方向の振動のときには、式(2.29)、(2.30)において a と b を相互に入れ換えればよい。ところで Mathieu function の分離定数は通常 a_{2n+1} あるいは b_{2n+1} で示され、これらは characteristic number と呼ばれるもので、また $A_{2r+1}^{(1)}$ あるいは $B_{2r+1}^{(1)}$ ($r=0, 1, 2, \dots$) は Mathieu function に固有の係数であって それぞれ characteristic number a_1 および b_1 に関する。本研究では argument q_1 および q_2 が複素数であるから $a_1, b_1, A_{2r+1}^{(1)}, B_{2r+1}^{(1)}$ はすべて複素数となる。

(2) 周波数応答に関する考察

本解析により種々のパラメーターについての検討が可能であるが、地中構造物の細長比による影響は田治見による円柱基礎の場合³⁾でその概略は知られているので、本研究においては断面形状の差異が、剛な楕円柱の応答に与える影響のみ着目した。すなわち用いた諸元は、楕円柱の断面の長軸の半径と高さの比 $a/H=1/2$ 、楕円柱の全長と層厚との比 $H_s/H=1$ 、表層地盤における横波と縦波の伝播速度の比 $v_t/v_l=1/3$ (すなわちポアソン比 0.44)、表層内部の粘性減衰定数 $h_g=0.05$ 、楕円柱のロッキング振動の粘性減衰定数 $h_s=0.05$ である。さらに式(2.29)および式(2.30)における係数 c_1, c_2 については、剛な楕円柱の特殊な場合の1つである剛な円柱のロッキング振動の固有円振動数 (ω_s) が表層のせん断1次のそれ (ω_g) よりわずかに大きくなるような場合 ($\omega_s/\omega_g=1.124$) を検討することにし、 $c_1=0.02, c_2=1$ を選んだ。

図-2 および 図-3 は表層と剛な楕円柱との相互作用において、表層が見かけ上複素ばねとしての効果を発揮する状況を示す図であって、式(2.25)の分母第4項がそれである。図-2 は短軸方向に振動する場合であるが、断面が扁平になるにつれて実数部 f_1 は減少が著しく、外乱の振動数が高くなると、負の値をとる場合も生じることを示している。すなわち、実数部 f_1 は振動数の低いところでは、そのばねとしての効果は低下するが、高振動数になると、逆に振動を助長することもあるといえよう。一方、虚数部 f_2 は構造物に減衰効果を与えるものである。 $\omega/\omega_g < 1$ では地盤内各点はほとんど同一位相で運動し波動の逸散は起らない。したがって $\omega/\omega_g < 1$

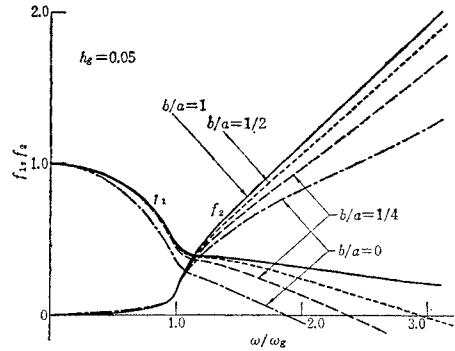


図-2 表層の複素ばね効果 (短軸方向)

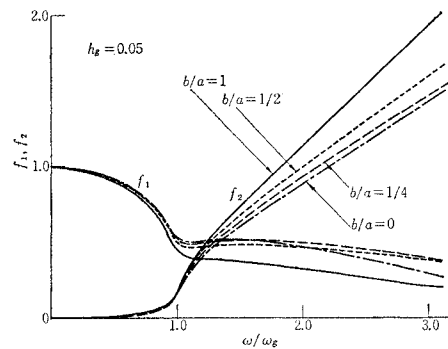


図-3 表層の複素ばね効果 (長軸方向)

における f_2 の値は主として内部粘性減衰によるものである。 $\omega/\omega_g > 1$ では波動の逸散現象が現われ、ほぼ速度に比例的に逸散する減衰 f_2 が効いてきて、位相差 $\tan^{-1}(f_2/f_1)$ は増大する。そこで、減衰効果を概略的に速度比例の等価粘性減衰として評価するために、 $\partial f_2/\partial \omega$ の大きさが減衰効果の大きさを示す目安としてそれを採用すると、 $\omega/\omega_g < 1$ では減衰効果は小さいが ($h_g=0.05$)、 $\omega/\omega_g > 1$ では前者に比べて非常に大きいことがわかり、その傾向としては断面が扁平なほど減衰効果は小さくなるということが知られる。

一方 図-3 の長軸方向の振動については、実数部 f_1 は断面形状によらず、互いにほぼ同様な傾向を保っており、高振動数に対してもその値が負になることはない。虚数部 f_2 は 図-2 と同様に断面が扁平なほど減衰効果は小さい。この f_2 の特徴としては、波動逸散による減衰効果 ($\omega/\omega_g > 1$) は外乱の振動数にほぼ1次比例すること、つまり速度比例の粘性減衰として等価的に評価できうることであろう。そこで 図-2, 3 の f_2 を一定勾配の直線とみなすと、式(2.27)の分母の虚数部の形から、この勾配と $\chi \omega_s/\omega_g$ との積が等価減衰定数の2倍を近似的に与えることになるので、仮りに $\chi \omega_s/\omega_g=1$ とするときには、この数値計算に関する限り波動の逸散による等価粘性減衰定数は 0.2~0.4 程度にも達することが知られよう。

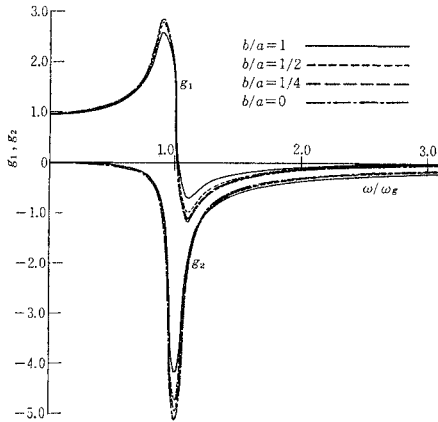


図-4 表層の振動土圧効果 (短軸方向)

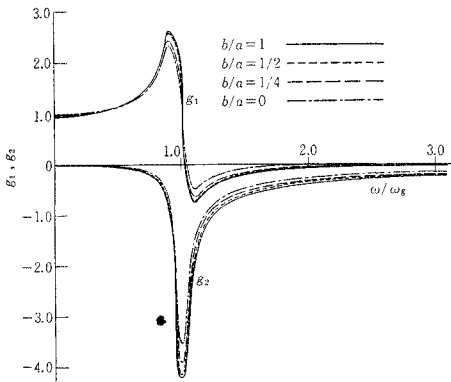


図-5 表層の振動土圧効果 (長軸方向)

図-4,5 は底面反力に対する表層の振動土圧効果を示すものである。断面の差異による影響はそれほど顕著ではないが、その絶対値としての効果 $|g_1 + ig_2|$ は、短軸方向の振動のときには概して偏平な断面ほど大きく、長軸方向の振動のときには断面が円形に近いほど大きい。すなわち、短軸方向の振動では構造物の断面が偏平なほど底面反力の低下が著しく、それだけ表層の影響を受けやすくなり応答も大きくなるが、一方、長軸方向の振動では、逆に偏平な構造物ほど表層の振動圧に対する底面反力の効果が大きく、したがって応答はそれほど大きくならないであろうことが推測される。またこれら両図に共通していえることは、 $g_1 + ig_2$ は1自由度系の周波数応答特性に非常によく似ているということである。このことは表層が構造物と接する境界では1次振動モードに比べて、他の高次モードが非常に劣勢であることからくるものであろう。

図-6,7 は剛な楕円柱のロッキング振動に関する周波数応答の入力に対する倍率について図示したものである。図-6 は短軸方向の振動における場合であるが、断面が偏平になるにつれて ω_s は小さくなり、円形以外は

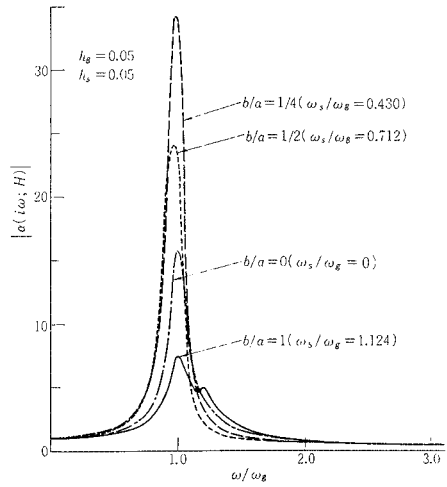


図-6 周波数応答倍率 (短軸方向)

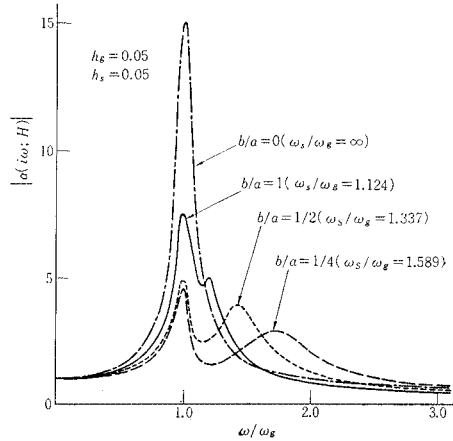


図-7 周波数応答倍率 (長軸方向)

$\omega_s < \omega_g$ となる。この場合は基礎体自身のロッキング共振 ($\omega = \omega_s$ による) と表層の共振 ($\omega = \omega_g$ による) とが同位相で同調し、かつこの領域では波動の逸散が起らないため、 $\omega = \omega_g$ による共振がいっそう大きく現われる。一般に基礎体が $b/a \rightarrow 0$ すなわち板のような場合よりも大きな応答を示すようである。

一方、長軸方向の振動のときの応答倍率が図-7である。この場合 $\omega_s > \omega_g$ となり、このときの底面反力の減少の仕方との兼ね合いで断面が偏平なほど ω_s が大きくなるが、それにつれて外乱の振動数が ω_s に接近したときに起こる共振の影響は小さくなる。これはロッキング固有円振動数 ω_s の近傍では振動土圧 $g_1 + ig_2$ の位相が反転しているために $\omega = \omega_s$ による共振を低減させると同時に、 $\omega > \omega_g$ になると波動の逸散現象が生じ、高周波の振動になるほど逸散による減衰効果が大きくなる。したがって、長軸方向の振動では、構造物の断面が偏平なほどその応答は小さくなるといえよう。このように長

軸方向の振動の方が比較的揺れ難いようであるが、 $b/a \rightarrow 0$ の場合は振動の方向によらずほぼ同じ傾向を示している。

図-7 においても一つの特徴は、長軸方向の振動に関する限り、剛な基礎体の固有円振動数 ω_s が見かけ上増大していることである。この現象は、水中構造物のそれと全く逆の関係にある^{3),9)}。これは主として水は慣性抵抗としての作用が卓越するのに反して、弾性地盤では慣性抵抗のみならず変位に対する抵抗も顕著であることに起因するものと考えられる。したがって、この事実は通常、地盤を質量のないばねとして、すなわちばね定数として取り扱っても傾向としてはある程度は妥当であることを裏づけているものといえよう。しかしながら、振動中の構造物をとりまく周辺地盤がばね効果のみならず、質量効果として評価される慣性抵抗の作用を持っているにもかかわらず、本研究ではその量的な比較を行なわなかった。したがって、地盤の両効果の大きさの優劣をつけることはここでは困難である。

3. 不規則外力を受ける基礎構造物の過渡応答

前章までは構造物とそれを支持する地盤の振動特性を周波数領域において解析したものであり、いわばそれは Fourier 変換形あるいは周波数応答関数と等価なものである。しかるに実地震動のように時間・空間領域において不規則に変動する入力に対しては、前章の結果をそのまま適用することはできない。というのは、不規則に変動する地震動に対して、系の応答を解析的に表現するためには、この系の単位衝撃応答関数が必要なわけである。ところが、先に得られた周波数応答関数は周波数に関して非常に複雑な形をしており、したがってこれに適当な変数変換を施して得られる伝達関数もまた複雑な形になる。それゆえこの伝達関数に適当な初期条件等を考慮して逆変換を行なうことにより、単位衝撃応答関数は原理的には得られるわけであるが、この場合にはそれが実際上きわめて困難である。そこでこの動特性を何らかの手法で近似化を行なわなければならないが、本研究においては、基礎構造物の幾何学形状の影響を若干犠牲にしながらも、動特性を活かすような式で置き換えを行ない、表層と基礎構造物との相互作用が考慮された単位衝撃応答関数の解析的表現をうることができた。このとき、近似置換式中の係数・定数は、図-6.7 の周波数応答倍率の傾向が合うように決めた。このように系の単位衝撃応答関数をうることによって、入力地震動が時間・空間領域において任意の特性を持つ場合にも適用は可能となるが、ここではとりあえず最も簡単な場合として white noise を対象とし、基礎体のロッキング振動にお

ける過渡応答について、基礎的確率を通して若干の考察を試みた。

(1) 解析の過程

半無限弾性体中に孤立して静止していた剛な楕円柱が $t=0$ に瞬間的にその大きさ 1 なる衝撃力を受けるとき、楕円柱の頂部の水平振動に対する周波数応答関数 $X(i\omega)$ を考えてみる。すなわちこれは 2.(1) において、入力地震動が $\ddot{u}_g = \delta(t)$ ($\delta(t)$: delta 関数) としたときの Fourier 変換形に他ならないので、式 (2.25) における $u_0 \omega^2$ を 1 、 $X(i\omega) = \varphi_0 H_s$ としてつぎのような形で得られる。

$$X(i\omega) = \frac{\frac{H_g H_s}{i_0^2} + \frac{\pi H_s}{2H} \left(\frac{\omega_s}{\omega_g}\right)^2 \chi G(i\omega)}{-\omega^2 + 2i\zeta_s \omega_s \omega + \omega_s^2 + \omega_s^2 \chi F(i\omega)} \dots\dots\dots (3.1)$$

ここに、 $F(i\omega) = f_1 + if_2$ 、 $G(i\omega) = g_1 + ig_2$ は、前章におけると同様に、それぞれ表層の複素ばね効果および振動土圧の動的効果を示す項であって、本研究においては図-8 および 図-9 のように近似を行なった。これらの図はそれぞれ前章の 図-2,3 および 図-4.5 に対応するものである。

図-8 におけるように、側圧のばね効果は振動数の 2 乗に比例して減少する f_1 と、振動数に 1 次比例した減衰効果を持つ f_2 とから成り立つものとする。したがって $F(i\omega)$ につぎの関数形を与える。

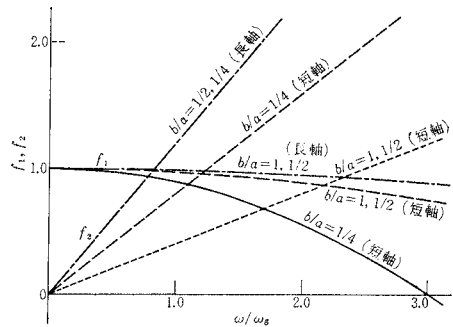


図-8 複素ばね効果の近似曲線

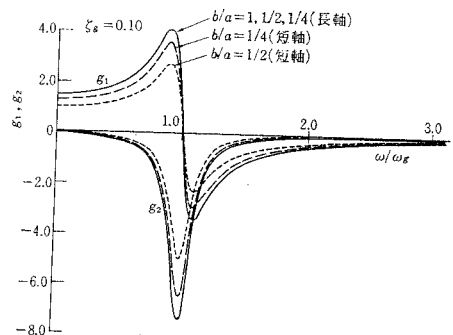


図-9 振動土圧効果の近似曲線

$$F(i\omega) = f_1 + if_2 = 1 - \frac{1}{k_1^2} \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 + 2ik_2 \frac{\omega}{\omega_g} \dots\dots\dots(3.2)$$

ここに、 k_1 は 2 次曲線 f_1 が横軸と交わるときの ω/ω_g の値、 k_2 は直線 f_2 の勾配の半分。

一方、振動土圧の動的効果は 図-9 のようなものであるが、これは 1 自由度系の応答特性に近似させたものである。したがって $G(i\omega)$ としてはつぎの関数形を与える。

$$G(i\omega) = g_1 + ig_2 = \frac{k_3\omega_g^2}{-\omega^2 + 2i\zeta_s\omega_s\omega + \omega_g^2} \dots\dots\dots(3.3)$$

ここに、 k_3 は近似式の補正係数であり、 $\zeta_s = c_s/2I\omega_s$ ：ロッキングの粘性減衰定数、 ω_s, ω_g ：それぞれ楕円柱のロッキング固有円振動数と表層のせん断 1 次固有円振動数である。

そこで

$$\frac{1}{-\omega^2 + 2i\zeta_s\omega_s\omega + \omega_g^2 + \omega_s^2\chi} = P(i\omega), \quad \chi G(i\omega)P(i\omega) = Q(i\omega) \dots\dots\dots(3.4)$$

とおくと、式 (3.2), (3.3), (3.4) はすべて $i\omega$ の関数として表わすことができる。したがって、これらの式において $i\omega = s$ という変数変換を行なうと、式 (3.1) は伝達関数としてつぎの形に書き改められる。

$$X(s) = \alpha'P(s) + \beta'P(s)G(s) = \alpha'P(s) + \beta'Q(s) \dots\dots\dots(3.1)'$$

ここに、 $\alpha' = k_4\alpha/\mu_0$ 、 $\beta' = k_3\beta/\mu_0$ 、 $\alpha = H_sH_g/i_0^2$ 、 $\beta = \pi/2 \cdot (\omega_s/\omega_g)^2$ 、 $\mu_0 = 1 + \chi(\omega_s/\omega_g)^2/k_1^2$ であって、 k_3, k_4 は式 (3.1)' の右辺の $G(s)$ および $P(s)$ に対する一種の補正係数である。なおこの場合の周波数応答倍率は

$$|a'(i\omega; H)| = |1 + X(i\omega) \cdot (\omega/\omega_g)^2|$$

で与えられる。

ところで式 (3.1) で示される周波数応答関数は、式 (2.1), (2.2) において $\ddot{u}_g = \delta(t)$ という外力が系に加わったときの Fourier 変換形であるから、結局式 (3.1)' は単位衝撃入力に対する系の Laplace 変換形と見なしてよいことになる。かくして、静止していた剛な楕円柱が運動を開始してから任意の時刻 $t (t \geq 0)$ における、その頂部の相対水平変位 $x(t)$ に対応する単位衝撃応答関数を $w(t)$ とすると、 $w(t)$ は伝達関数式 (3.1)' の Laplace 逆変換によって得られる。↗

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t) = & \lambda_{11}[\omega_1^2 - e^{-2d_1t} \{d_1\omega_1 \sin 2\omega_1t + \omega_1^2 + 2d_1^2 \sin^2 \omega_1t\}] \\ & + \lambda_{12}[-d_1\omega_1 \sin \delta_1 + \omega_1^2 \cos \delta_1 e^{-d_1t} \{-d_1\omega_1 \sin \delta_1 + \omega_1^2 \cos \delta_1 + 2d_1^2 \sin \omega_1t \sin(\omega_1t - \delta_1)\}] \\ & + \lambda_{13}[\omega_1 \sin(\delta_2 + \varepsilon_1) - e^{-(d_1+d_2)t} \{\sqrt{(d_1+d_2)^2 + \omega_1^2} \sin(\omega_1t + \varepsilon_2) \sin(\omega_2t + \delta_2) \\ & + \omega_2 \sin(\omega_1t + \varepsilon_3) \cos(\omega_2t + \delta_2)\}] \\ & + \lambda_{21}[\omega_1^2 \cos \delta_1 - d_1\omega_1 \sin \delta_1 - e^{-2d_1t} \{2d_1^2 \sin(\omega_1t - \delta_1) \sin \omega_1t + \omega_1^2 \cos \delta_1 + d_1\omega_1 \sin(2\omega_1t - \delta_1)\}] \\ & + \lambda_{22}[\omega_2 \sin \varepsilon_3 \cos \delta_2 + \sqrt{(d_1+d_2)^2 + \omega_1^2} \sin \varepsilon_2 \sin \delta_2 - e^{-(d_1+d_2)t} \{\omega_1 \sin(\omega_2t + \delta_2 + \varepsilon_1) \cos \omega_1t \\ & + \sqrt{(d_1+d_2)^2 + \omega_2^2} \sin(\omega_2t + \delta_2 + \varepsilon_4) \sin \omega_1t\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(t) = & \alpha'w_0(t) + \beta' \int_0^t w_0(t-\tau)w_2(\tau) d\tau \\ = & \alpha'w(t) + \beta'w_1(t) \dots\dots\dots(3.5) \end{aligned}$$

ここに、 $w_0(t), w_1(t)$ および $w_2(t)$ はそれぞれ $P(s), Q(s)$ および $G(s)$ の Laplace 逆変換形である。

したがって、楕円柱頂部の水平方向における相対変位 $x(t)$ は次式のように書き表わされる。

$$x(t) = \int_0^t w(t-\tau)\ddot{z}(\tau) d\tau \dots\dots\dots(3.6)$$

ただし、 $\ddot{z}(t)$ は入力地震動である。

このとき応答変位の r.m.s. (root mean square)、応答速度の r.m.s. およびこれら 2 つの量に関する相関係数をそれぞれ $\sigma_x(t), \sigma_{\dot{x}}(t)$ および $\rho_{x\dot{x}}(t)$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^2(t) = & \int_0^t w(t-\tau_1) d\tau_1 \\ & \times \int_0^t w(t-\tau_2) \phi_{zz}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \\ \sigma_{\dot{x}}^2(t) = & \int_0^t \dot{w}(t-\tau_1) d\tau_1 \\ & \times \int_0^t \dot{w}(t-\tau_2) \phi_{zz}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \\ \sigma_x(t)\sigma_{\dot{x}}(t)\rho_{x\dot{x}}(t) = & \int_0^t w(t-\tau_1) d\tau_1 \\ & \times \int_0^t \dot{w}(t-\tau_2) \phi_{zz}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.7)$$

として与えられる。ここに、 $\dot{w}(t)$ は $w(t)$ の微分形であり、 $\phi_{zz}(\tau_1, \tau_2)$ は入力地震動の相関関数を表わすものとする。

ところで入力地震動 $\ddot{z}(t)$ は平均値 0 の定常確率過程として、単位時間当りのパワーが D であるような white noise を考えると、 $\phi_{zz}(\tau_1, \tau_2) = D\delta(\tau_1 - \tau_2)$ となる。この関係を式 (3.7) に持ち込むことによって、基礎的確率量が解析的に得られるが、 $w(t)$ を求める過程において表層と基盤の静的反力比 χ の値のいかんによってつぎのような 2 つの場合が生じる。

1) $\mu_0(1 + \chi) - he^2 \geq 0$ のとき：

$$\begin{aligned} w(t) = & \frac{\alpha'}{\omega_1} e^{-d_1t} \sin \omega_1t + \frac{\beta'k_3\omega_g}{\zeta_g^*\omega_1} \\ & \times \frac{\omega_2 e^{-d_1t} \sin(\omega_1t - \delta_1) + \omega_1 e^{-d_2t} \sin(\omega_2t + \delta_2)}{[\{(d_1 - d_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2\} \{(d_1 - d_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2\}]^{1/2}} \dots\dots\dots(3.8) \end{aligned}$$

ただし、 $t < 0$ に対しては $w(t) = 0$ とする。このときの応答変位の分散 $\sigma_x^2(t)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 & + \lambda_{23} [2 D_1^2 \sin^2 \delta_1 + \omega_1^2 - D_1 \omega_1 \sin 2 \delta_1 - e^{-2 D_1 t} \{2 D_1^2 \sin^2 (\omega_1 t - \delta_1) + \omega_1^2 - D_1 \omega_1 \sin 2 \delta_1\}] \\
 & + \lambda_{24} [-\sqrt{(D_1 + D_2)^2 + \omega_2^2} \sin (\delta_2 + \varepsilon_1) \sin \delta_1 + \omega_1 \sin (\delta_2 + \varepsilon_1) \cos \delta_1 - e^{-(D_1 + D_2) t} \\
 & \quad \times \{\sqrt{(D_1 + D_2)^2 + \omega_2^2} \sin (\omega_1 t - \delta_1) \sin (\omega_2 t + \delta_2 + \varepsilon_1) + \omega_1 \cos (\omega_1 t - \delta_1) \sin (\omega_2 t + \delta_2 + \varepsilon_1)\}] \\
 & + \sqrt{(D_1 + D_2)^2 + \omega_1^2} \sin \delta_2 \sin (-\delta_1 + \varepsilon_2) + \omega_2 \cos \delta_2 \sin (-\delta_1 + \varepsilon_2) - e^{-(D_1 + D_2) t} \\
 & \quad \times \{\sqrt{(D_1 + D_2)^2 + \omega_2^2} \sin (\omega_2 t + \delta_2 + \varepsilon_1) \sin (\omega_1 t - \delta_1) + \omega_1 \sin (\omega_2 t + \delta_2 + \varepsilon_1) \cos (\omega_1 t - \delta_1)\}] \\
 & + \lambda_{25} [2 D_2^2 \sin^2 \delta_2 + \omega_2^2 + D_2 \omega_2 \sin 2 \delta_2 - e^{-2 D_2 t} \{2 D_2^2 \sin^2 (\omega_2 t + \delta_2) + \omega_2^2 + D_2 \omega_2 \sin 2 (\omega_2 t + \delta_2)\}] \\
 & \dots \dots \dots (3.9)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\lambda_{11} = \alpha'^2 D / \{4 D_1 \omega_1^2 (D_1^2 + \omega_1^2)\}$ 、 $\lambda_{12} = \alpha' \beta' k_3 \omega_g^2 D / \{4 D_1 \omega_1^2 (D_1^2 + \omega_1^2) [\{(D_1 - D_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2\} \{(D_1 - D_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2\}]^{1/2}\}$ 、 $\lambda_{13} = \alpha' \beta' k_3 \omega_g D / \{\zeta_g^* \omega_1 [\{(D_1 - D_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2\} \{(D_1 - D_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2\} \{(D_1 + D_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2\} \{(D_1 + D_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2\}]^{1/2}\}$ 、 $\lambda_{21} = \lambda_{12}$ 、 $\lambda_{22} = \lambda_{13}$ 、 $\lambda_{23} = \beta'^2 k_3^2 \omega_g^4 D / \{4 D_1 \omega_1^2 (D_1^2 + \omega_1^2) \{(D_1 - D_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2\} \{(D_1 - D_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2\}\}$ 、 $\lambda_{24} = \beta'^2 k_3^2 \omega_g^3 D / \{\zeta_g^* \omega_1 \{(D_1 - D_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2\} \{(D_1 - D_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2\} [\{(D_1 + D_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2\} \{(D_1 + D_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2\}]^{1/2}\}$ 、 $\lambda_{25} = \beta'^2 k_3^2 \omega_g^2 D / \{4 \zeta_g^{*2} D_2 (D_2^2 + \omega_2^2) \{(D_1 - D_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2\} \{(D_1 - D_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2\}\}$ 、 $\delta_1 = \tan^{-1} [2 \omega_1 (D_2 - D_1) / \{(D_1 - D_2)^2 + \omega_2^2 - \omega_1^2\}]$ 、 $\delta_2 = \tan^{-1} [2 \omega_2 (D_2 - D_1) / \{(D_1 - D_2)^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2\}]$ 、 $\varepsilon_1 = \tan^{-1} [2 \omega_2 (D_1 + D_2) / \{(D_1 + D_2)^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2\}]$ 、 $\varepsilon_2 = \tan^{-1} [\omega_1 \{(D_1 + D_2)^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2\} / \{(D_1 + D_2) \{(D_1 + D_2)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2\}\}]$ 、 $\varepsilon_3 = \tan^{-1} [2 \omega_1 (D_1 + D_2) / \{(D_1 + D_2)^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2\}]$ 、 $\varepsilon_4 = \tan^{-1} [\omega_2 \{(D_1 + D_2)^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2\} / \{(D_1 + D_2) \{(D_1 + D_2)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2\}\}]$ 、 $D_1 = h_e \omega_s / \mu_0$ 、 $\omega_1 = \omega_s \sqrt{1 + \chi^* - \zeta_0} = \omega_s \sqrt{\mu_0 (1 + \chi) - h_e^2} / \mu_0$ 、 $h_e = \zeta_s + \chi k_2 \omega_s / \omega_g$ 、 $\mu_0 = 1 + \chi (\omega_s / \omega_g)^2 / k_1^2$ 、 $\chi^* = \chi [1 - (\omega_s / \omega_g)^2 / k_1^2] / \mu_0$ 、 $D_2 = \zeta_g \omega_g$ 、 $\omega_2 = \zeta_g^* \omega_g$ 、 $\zeta_g^* = \sqrt{1 - \zeta_g^2}$ 、 ζ_g 、 ζ_s ：表層内部および楕円柱のロッキングの粘性減衰定数。

2) $\mu_0 (1 + \chi) - h_e^2 < 0$ のとき：

$$w(t) = \frac{\alpha'}{\omega_1'} e^{-d_1 t} \sinh \omega_1' t + \frac{\beta' k_3 \omega_g}{\zeta_g^*} \times \frac{e^{-d_2 t} \sin (\omega_2 t - \delta_1')}{[\{(D_1 - D_2 - \omega_1')^2 + \omega_2^2\} \{(D_1 - D_2 + \omega_1')^2 + \omega_2^2\}]^{1/2}} \dots \dots \dots (3.10)$$

ここに、 $\delta_1' = \tan^{-1} [2 \omega_2 (D_1 - D_2) / \{(D_1 - D_2)^2 - \omega_1'^2 - \omega_2^2\}]$ 、 $\omega_1' = \omega_s \sqrt{h_e^2 - \mu_0 (1 + \chi)} / \mu_0$ であって、その他の量は 1) の場合に準ずる。なお $t < 0$ では $w(t) = 0$ とする。このとき応答変位の分散 $\sigma_x^2(t)$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^2(t) = & \lambda_{11}' [1 - e^{-2(D_1 + \omega_1') t}] / \{2(D_1 + \omega_1')\} - \{1 - e^{-2(D_1 + \omega_1') t}\} / \{2(D_1 - \omega_1')\} - \{1 - e^{-2 d_1 t}\} / D_1 \\
 & + \lambda_{12}' [\omega_1 \sin (-\delta_1 + \varepsilon_1') - e^{-(D_1 + D_2) t} \{\sqrt{(D_1 + D_2)^2 + \omega_2^2} \sin (\omega_2 t - \delta_1' + \varepsilon_2') \sinh \omega_1' t \\
 & \quad + \omega_1' \sin (\omega_2 t - \delta_1' + \varepsilon_1') \cosh \omega_1' t\}] \\
 & + \lambda_{21}' [-\omega_1' \sin (\delta_1' - \varepsilon_1') - e^{-(D_1 + D_2) t} \{\sin (\omega_2 t - \delta_1' + \varepsilon_2') \sinh \omega_1' t + \omega_1' \sin (\omega_2 t - \delta_1' + \varepsilon_1') \cosh \omega_1' t\}] \\
 & + \lambda_{22}' [2 D_2^2 \sin^2 \delta_1' + \omega_1'^2 - D_2 \omega_2 \sin 2 \delta_1' - e^{-2 D_2 t} \{2 D_2^2 \sin^2 (\omega_2 t - \delta_1') + \omega_2^2 + D_2 \omega_2 \sin 2 (\omega_2 t - \delta_1')\}] \\
 & \dots \dots \dots (3.11)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\lambda_{11}' = \alpha'^2 D / (4 \omega_1'^2)$ 、 $\lambda_{12}' = \alpha' \beta' k_3 \omega_g D / \{\zeta_g^* \omega_1 [\{(D_1 - D_2 - \omega_1')^2 + \omega_2^2\} \{(D_1 - D_2 + \omega_1')^2 + \omega_2^2\} \{(D_1 + D_2 - \omega_1')^2 + \omega_2^2\} \{(D_1 + D_2 + \omega_1')^2 + \omega_2^2\}]^{1/2}\}$ 、 $\lambda_{21}' = \lambda_{12}'$ 、 $\lambda_{22}' = \beta'^2 k_3^2 D / \{4 \zeta_g^{*2} \{(D_1 - D_2 - \omega_1')^2 + \omega_2^2\} \{(D_1 - D_2 + \omega_1')^2 + \omega_2^2\}\}$ 、 $\varepsilon_1' = \tan^{-1} [2 \omega_2 (D_1 + D_2) / \{(D_1 + D_2)^2 - \omega_1'^2 - \omega_2^2\}]$ 、 $\varepsilon_2' = \tan^{-1} [\omega_2 \{(D_1 + D_2)^2 + \omega_1'^2 + \omega_2^2\} / \{(D_1 + D_2) \{(D_1 + D_2)^2 - \omega_1'^2 + \omega_2^2\}\}]$ 。

同様に、他の基礎確率量 $\sigma_x^2(t)$ 、 $\rho_{xx}(t)$ 等も解析的に得られるが、ここでは省略する。

ところで応答量 $x(t)$ および $\dot{x}(t)$ がガウス分布にしたがうとすれば、応答変位の絶対値 $|x(t)|$ がある設定レベル A を単位時間当りに超過する平均回数 $m(A; t)$ は Rice の理論¹⁰⁾ を応用することにより、2 次元同時確率密度関数 $p(x, \dot{x}; t)$ を用いてつぎの関係をうる。

$$\begin{aligned}
 m(A; t) dt = & \int_0^\infty \int_{A - \dot{x} dt}^A p(x, \dot{x}; t) dx d\dot{x} \\
 & + \int_{-\infty}^0 \int_{-A}^{-A - \dot{x} dt} p(x, \dot{x}; t) dx d\dot{x} \\
 = & 2 dt \int_0^\infty \dot{x} p(A, \dot{x}; t) d\dot{x}
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 m(A; t) = & \frac{\sqrt{1 - \rho_{xx}}}{\pi} \frac{\dot{x}}{\sigma_x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{A}{\sigma_x} \right)^2 \right\} \\
 & \times \left[\exp \left\{ -\frac{\rho_{xx}}{2(1 - \rho_{xx})} \cdot \frac{A}{\sigma_x} \right\} \right. \\
 & + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_{xx}}{\sqrt{1 - \rho_{xx}}} \frac{A}{\sigma_x} \\
 & \left. \times \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\rho_{xx}}{\sqrt{2(1 - \rho_{xx})}} \frac{A}{\sigma_x} \right) \right\} \right] \\
 & \dots \dots \dots (3.12)
 \end{aligned}$$

ただし、 $\operatorname{erf}(x)$ は error function である。

(2) 過渡応答に対する考察

本解析においては適当な式での置き換えを行なう際の種々の定数の決定が最も重要になってくる。しかしながら、このような置換式の等価性を評価する厳密な方法がないので、本研究においては、周波数応答倍率の傾向が合うように、概略的な値を用いるにとどめた。

まずロッキング振動における粘性減衰定数 ζ_s は 2. (1) の解析における h_s と同じものであり、 $\zeta_s = 0.05$ とした

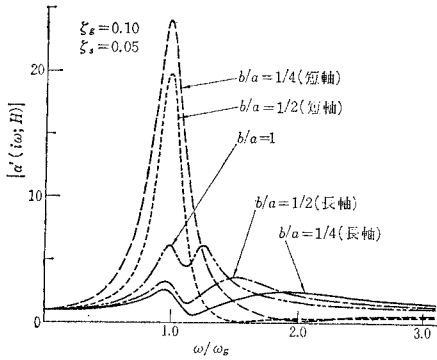


図-10 周波数応答倍率の近似曲線

が、本章(1)における等価粘性減衰定数 ζ_g は 2.(1) の解析における h_g と必ずしも同一のものではなく、ここでは $\zeta_g = 0.10$ を与えた。 α, β 等は 2.(1) と全く同じ値を用いた。したがって残りの定数 (χ, k_1, k_2, k_3, k_4) の 5 個の値は $b/a = 1/4$ (短軸方向, $\omega_s/\omega_g = 0.430$), $b/a = 1/2$ (短軸方向, $\omega_s/\omega_g = 0.712$), $b/a = 1$ ($\omega_s/\omega_g = 1.124$), $b/a = 1/2$ (長軸方向, $\omega_s/\omega_g = 1.337$), $b/a = 1/4$ (長軸方向, $\omega_s/\omega_g = 1.589$) に対してそれぞれ (4, 3, 0.4, 1.3, 1.3), (1, 6, 0.2, 1, 1), (0.2, 6, 0.2, 1.5, 1.5), (0.2, 9, 0.6, 1.5, 1.5), (0.3, 9, 0.6, 1.5, 1.5) の値を与えた。これより $f_1 + if_2, g_1 + ig_2$ の近似曲線群を図示したのが、図-8 と 図-9 である。これらを用いて周波数応答倍率を 図-10 に示したが、これらの曲線群は 2.(2) の 図-6 および 図-7 の周波数応答倍率と比較的よく似ているといえよう。

ここで表層との動的相互作用を考慮した基礎体頂部に関する単位衝撃応答関数 $w(t)$ は式 (3.5) で示されるが、これに ω_g を乗じて無次元表示して計算した結果が 図-11 である。これより、基礎体が短軸方向に振動する場合は、その固有円振動数が表層のせん断 1 次のそれより小さくなりがちで、このような場合は応答が大きく現われ、かつ周期 T_g ($T_g = 2\pi/\omega_g$: 表層のせん断 1 次の固有周期) でくり返されることから、表層の影響が強く効いていることがわかる。一方長軸方向に振動する場合は両固有振動数の関係が上記と逆になり、表層と基礎体の運動に位相差が生じるため、これによる干渉から最初の時刻 T_g の前後には応答が若干減少するような傾向があることがわかる。このことは、ほぼ時刻 T_g を経過した頃その入力地震動の過去の記憶が急に薄れるため、応答は急速に定常状態に近づくであろうことを示している。このように構造物の固有円振動数が表層の 1 次のそれより小さいか大きいかによって、表層が構造物の運動を増幅したり、あるいは抑制したりする場合は生じるが、このような傾向は 2.(2) の周波数領域における解析結果である 図-6,7 のそれとある程度類似しているとい

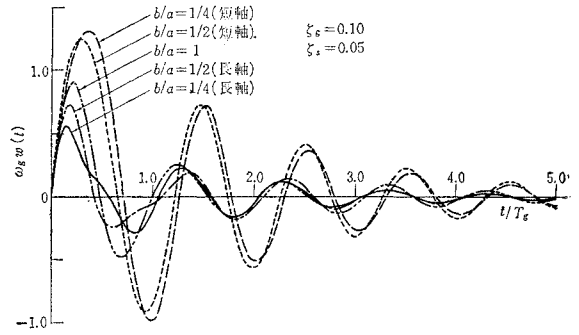


図-11 単位衝撃応答関数

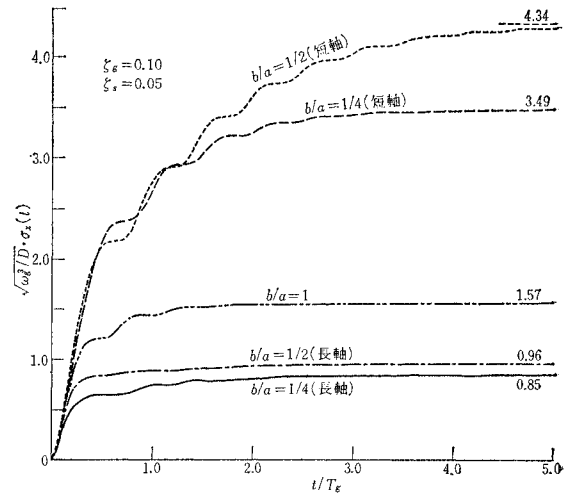


図-12 応答変位の r.m.s.

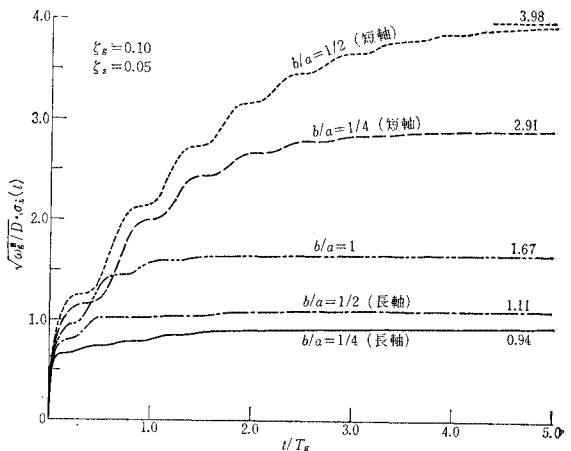


図-13 応答速度の r.m.s.

えよう。

これら単位衝撃応答関数を利用して応答変位および応答速度の r.m.s. について、図-12 および 図-13 に示した。これらの図において特徴的なことは、周波数応答倍率の 図-10 の $\omega = \omega_g$ の共振の大きさと、不規則振動における r.m.s. の定常値とはある程度の対応はあるよ

うであるが、短軸方向の振動において 図-10 では $b/a=1/4$ の方が $b/a=1/2$ の場合より大きいのに反して、図-12, 13 においては逆になっているように、必ずしも大きさの傾向は対応していないようである。また長軸方向の振動においてとくに $b/a=1/2$ の場合は最初の1サイクル後にはほとんど定常状態に達しているが、これは単位衝撃応答関数の特徴とよく符号しているといえよう。なお応答速度の初期勾配がかなり大きい、これは入力が平坦な周波数構造を持っているため、初動時には高周波成分が卓越することによるものと解される。

図-14 は応答変位と応答速度との相関係数を示したものであるが、やはり長軸方向の振動において $b/a=1/2$ の場合は最初の1サイクルの後は急激に小さくなるが、これは 図-12, 13 の応答変位と応答速度の傾向からして当然のことであろう。

図-15, 16 は応答変位の絶対値 $|x(t)|$ があるレベル A を外向きに超過する単位時間当りの平均回数 $m(A; t)$ を示したものである。図-15 は無次元超過レベル $A\sqrt{\omega_g^3/D}$ を1に選んだ場合である。この設定レベルに対して 図-12 における応答変位の定常状態の r.m.s. 値が1より大きい場合には $m(A; t)$ も定常状態に早く達するが、 $b/a=1/4$ (長軸方向) の場合のようにその応答変位の定常 r.m.s. 値が1にほぼ等しい場合は $m(A; t)$ の過渡状態が長引くことがわかる。超過レベルが低いと運動開始と同時に $m(A; t)$ が急速に増大するが、これは入力が white noise であるため、初期の段階では変位が小さいにもかかわらず高周波成分が卓越することからくるものである。このような場合には $m(A; t)$ は割合すみやかに一定値に近づくわけである。

図-16 は断面が $b/a=1/2$ の楕円柱がそれぞれ長・短軸方向に振動する場合についての計算結果であるが、これからもわかるように、長軸方向の振動では超過レベルにかかわらず、 $t=T_g$ までには過渡応答がおおむね完了しているのに反し、短軸方向の振動では、超過レベルが高いほど過渡状態は長くなるというように、過渡状態から定常状態に達するまでの時間は超過レベルに大いに左右されることがよく示されている。また無次元設定レベルを $1.5 \rightarrow 1.0 \rightarrow 0.5$ と減ずるにつれて、短軸方向の振動では超過回数はわずかながら増加するが、長軸方向の振動では超過回数は急速に増加するため、ついには無次元設定レベルが0.5よりわずかに小さい値のとき、長軸方向の振動の超過回数が短軸方向のそれを上回る状態が存在するであろうことが推測される。一方、図-12 において短軸方向および長軸方向の振動における定常状態の r.m.s. 値の比は $4.34/0.96 \approx 4.5$ である。そこで 図-16 において両振動方向における設定レベルの比が4.5となる3組の超過回数を図示したのが case I ~ case III であ

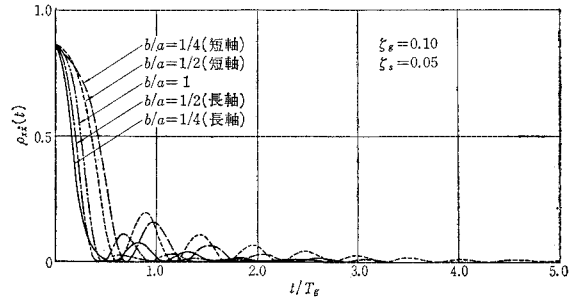


図-14 相関係数 (応答変位-応答速度)

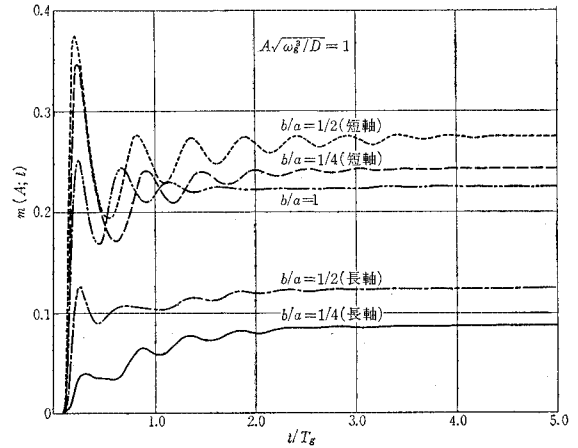


図-15 平均超過回数 (単位時間当り)

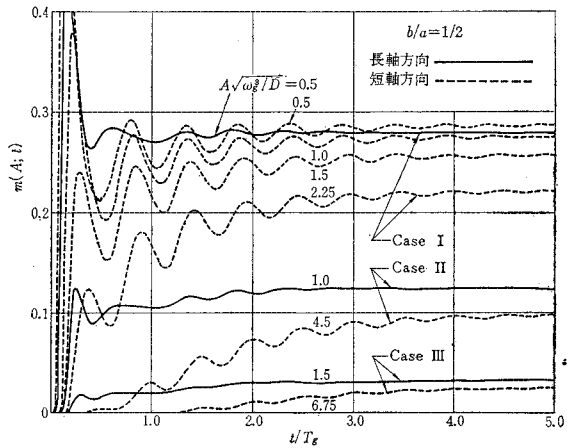


図-16 平均超過回数 (単位時間当り)

る。このように、両振動方向における設定レベルの比をほぼそれぞれの定常 r.m.s. 値の比に等しく保ちながら設定レベルを高めると、両振動方向における単位時間当りのレベル超過回数が接近してくることがわかる。

4. 結 言

本研究において、等方均質な弾性地盤中にある剛な構

円柱のロッキング振動に関して、その周波数応答および定常不規則地震動を受ける楕円柱の過渡応答について考究したが、得られた成果は以下のように要約される。

周波数応答に関して：(1) 表層のばね効果は、長軸方向における振動の場合の方が大きく、短軸方向における振動の場合は振動数とともに低下する。(2) 波動逸散による減衰効果はかなり大きく、ほぼ振動数に比例的に増加する。(3) 表層の振動土圧としての効果は、1自由度系の応答と類似しており、その底面反力に対する比は基礎体の断面形状にあまり関係なくほぼ一定の傾向にある。(4) 剛な楕円柱の周波数応答は短軸方向に振動する方が、長軸方向に振動する場合よりかなり大きい。(5) 長軸方向の振動においては、剛な楕円柱の弾性地盤中でのロッキングの固有円振動数は空気中にあるときのそれよりも増大する。

定常不規則地震動に対する剛な楕円柱の過渡応答に関して：(1) 応答変位および応答速度の r.m.s. 値は、定常状態において長軸方向より短軸方向の振動における方が大きい。(2) 過渡状態は長軸方向の振動では、運動開始とともにすぐに完了するが、短軸方向の振動ではそれより長く続く。(3) 設定レベルを単位時間に超過する回数は、レベルが高いときは短軸方向における方が長軸方向のそれよりも多いが、レベルが低くなると長軸方向の振動における方が多くなることがある。

以上が本研究における数値計算例をもとにしての考察の要約である。解析の対象とした基礎構造物は主として楕円柱であったが、円柱基礎に対しても薄い板のような場合と同様に、その断面形が特殊な場合の1つとして本解析を拡張しうることはいうまでもない。かくして地中構造物のロッキング振動について波動論的な取扱いによって、構造物周辺地盤としての表層が、ばね効果（逸散減衰を含む）および振動土圧効果として大きな役割を果たし、特に波動の逸散現象のためその周波数応答が複雑になることがわかった。したがって、この系を不規則地震動に対して適用できるように、これら表層の動的効果を周波数応答の傾向から近似的な式で置き換えるという

方針をとった。しかしその近似式と原式との差異を厳密に検討する方法がないので、ここでは応答倍率の傾向が合うように定数や補正係数に大まかな値を与えた。したがって今後はこれら諸定数・係数の合理的な決定を行ないうる方法が追求されねばならないであろう。

さらにまた、入力地震動に関して考えてみると、基盤入力といえども、これが実際はその強度と周波数構造が時間的に変動するであろうことから、今後は非定常入力に対する系の非定常応答をも検討しなければならないであろう。

最後に本研究に対して、終始ご検討いただいた京都大学防災研究所助教授 土岐憲三博士に感謝の意を表する次第である。なお数値計算はすべて京都大学大型電子計算機 (FACOM 230-60) によったことを付記する。

参考文献

- 1) Lamb, H. : On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Philosophical Transactions, Vol. 203, 1904, pp. 1-42.
- 2) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有：弾性層上の長方形基礎の Ground Compliance, 日本地震工学シンポジウム (1966) 講演集, 1966.10, pp. 261-266.
- 3) 田治見 宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について, 日本地震工学シンポジウム (1966) 講演集, 1966.10, pp. 255-260.
- 4) 後藤尚男・土岐憲三・秋吉 卓：弾性地盤中にある楕円形基礎の振動性状, 京都大学防災研究所年報, 第11号:A, 1968.3, pp. 255-274.
- 5) 妹沢克准：振動学, 下巻, 岩波書店, 昭7, pp. 604-607.
- 6) McLachlan, N.W. : Theory and Application of Mathieu Functions, Dover, 1964.
- 7) 後藤尚男・山田善一・他：土木建築耐震設計施工, 朝倉書店, 1968, pp. 306-307.
- 8) 後藤尚男・土岐憲三：水中橋脚の振動と耐震設計に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No. 100, 1963.12, pp. 1-8.
- 9) 小坪清真：だ円形水中橋脚に働く地震力とその弾性振動—水中構造物の耐震設計に関する研究一, 土木学会論文集, No. 120, 1965.8, pp. 14-24.
- 10) Rice, S.O. : Mathematical Analysis of Ransom Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover, 1943, pp. 133-317.

(1969.11.11・受付)