

各支点で異なる地震波をうける橋梁の応答解析

RESPONSE ANALYSIS OF BRIDGES SUBJECTED TO DIFFERENT EARTHQUAKE WAVES AT EACH SUPPORT

小坪 清真*・原田 譲 二**
By Seima Kotsubo and Jōji Harada

1. ま え が き

最近、長大スパンの橋梁が数多く築造されているが、その固有振動周期が長くなるので動的な耐震設計が重要な問題になっており、地震波を橋梁に作用させた場合の応答の計算がさかんに行なわれている。この場合、従来の考え方によれば、地震応答計算に用いる外力としての地震加速度は橋梁の各支点に対して同一波形、同一位相で作用すると仮定されている。しかし、長大スパン橋梁の各支点においては、地形および地盤の性状が異なっているので地震加速度波形もそれぞれ異なったものである。また、たとえ、地震波形が同一であっても各支点における地震波には位相差があるであろう。したがって、長大スパン橋梁の地震応答を求めるには、各支点における地震波の相違を考慮するか、または少なくとも、地動位相差を考慮しなければならないと思われる。とくに長大スパン橋梁が橋軸方向に進行する地震波をうける場合には、この地動位相差の影響は顕著になるであろう。

従来、橋梁の各基礎に作用する地震波の相違または地動位相差を考慮した応答計算法の研究は少なく、わずかに2~3の研究があるに過ぎない。すなわち、中川ら¹⁾は建築物の地震による応答の問題で、建築物の上層と下層の部分がそれぞれ異なった地震波を受ける場合の解析法を示した。これは上下の層を3個の質点に分け、modal analysisによる計算法のみを述べたものである。竹山²⁾は地震波の水平2方向成分を用いて建築物の平面的広がりを考慮した応答解析を行なっているが、これは建築物の各基礎における地動の相違の影響を論じたものではない。長大橋梁の応答解析については、小西・山田ら³⁾が吊橋のアバットと橋脚の基礎にそれぞれ単独の地震波を入射させ、タワーと補剛桁の応答につき、各点に

おいて応答のおくれがあることを示している。一方、Bogdanoff⁴⁾は地盤中を伝播する地震波の伝播速度を取り入れて橋梁の応答を論じている。彼らは長大な吊橋を簡単なばね質点系に置換し、地震波はランダムな振幅および位相を持つ波の重ね合わせであるとし、この波が橋軸方向に各橋脚および橋台において時間的ずれをもって入射する場合を想定している。地震波の伝播速度はある1個だけについて考え、変位の極値の発生する確率を論じ、簡単な構造系においても地動の位相のずれが応答におよぼす影響を無視できないと述べている。

これらの研究においては入力地震波として変位記録を用いている。しかし、実際の地震波としての変位記録は数少なく、また、測定も困難である。そこで、地震加速度記録を2回積分して変位を求め、これを入力地震波として用いるのであるが、加速度記録の基準線がずれているとその影響が積分して得られた変位に現われ、不合理な地震変位が得られる。Bergら⁵⁾はその補正計算法を示し、強震加速度記録をこの方法で補正積分して地震変位を求めている。著者らもわが国において得られた地震加速度記録を2回積分して変位を求めてみたが、このような方法によって得られた地震変位は一般に非常に長周期で変動の少ない波である。したがって、このような高次の短周期成分が少ない地震波を入力として応答解析を行なった場合、実際の応答と一致するか否かには疑問があると思われる。

従来得られている地震記録はほとんど加速度記録である。したがって、加速度記録をそのまま入力として使用できる計算法が望ましい。本論文では実際記録された地震加速度をそのまま入力として用いる応答計算法を示し、橋梁の各基礎がそれぞれ異なった地震加速度をうける場合の modal analysis による解法を述べ、その特別な場合として各基礎に作用する地震波は同一であるが位相のみが異なる場合について計算例を示し、地動位相差が長大橋梁の地震応答におよぼす影響が大きいことを示

* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 建設省土木研究所

した。ついで、単純ばりおよび連続ばりの模型桁橋に対して、その一端支点が地震加速度をうける場合の応答を曲げ波動論, modal analysis, および模型実験の3通りの方法によって解析し、桁内の曲げ波動伝播が問題となるような長大スパン橋梁の地震応答解析に対しても、著者らが提案した modal analysis が十分な精度で利用できることを示した。

2. 各支点の異なる地震加速度による応答解析法

(1) 振動方程式

橋梁の基礎では地震の方向は上下方向および水平2方向の3通りの場合があるが、本論では橋桁の水平面内曲げ応力解析を主目的とし、橋軸直角水平方向の地震のみを対象とする。もちろん、ここに述べる方法はあらゆる方向の地震に対して用いられることはいうまでもない。

図-1に示すように、橋台および橋脚を含め N 個の支点をもつ橋梁の各支点における地震変位を $\phi_j(t)$, ($j=1, 2, \dots, N$)、橋梁の第 r 次の固有円振動数を n_r 、振動型を Y_{ri} 、減衰定数を h_r 、質点 i の重量を W_i 、質点数を m 、重力加速度を g 、 j なる支点のみが $\phi_j(t)=1$ なる静変位を生じたときの橋桁の静的弾性変形曲線を f_{ji} とすれば、 i 点の変位は次式で表わされる。

$$y_i(t) = \sum_{r=1}^m a_r Y_{ri} + \sum_{j=1}^N f_{ji} \phi_j(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 a_r は一般座標である。運動エネルギー K 、ひずみエネルギー V および散逸関数 F は次式で表わされる。

$$K = \frac{1}{2g} \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^m \dot{a}_r^2 W_i Y_{ri}^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$V = \frac{1}{2g} \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^m n_r^2 a_r^2 W_i Y_{ri}^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$F = \frac{1}{2g} \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^m 2h_r n_r \dot{a}_r^2 W_i Y_{ri}^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

つぎに、 a_r に対する一般力 Q_r を求める方法を述べよう。いま、 j なる基礎のみが $\phi_j(t)=1$ なる変位を生

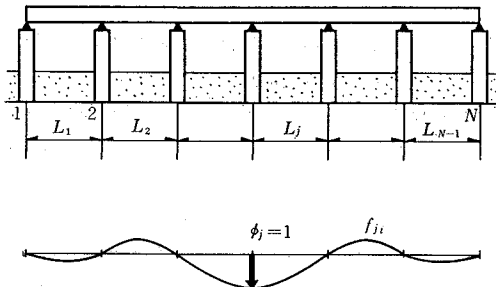


図-1

じた場合の橋桁の静的弾性変形曲線を $f_j(x)$ 、この弾性線を基線とした動的な変位を \bar{y} とすれば、橋桁の変位 y は次式で表わされる。

$$y = \bar{y} + f_j(x) \phi_j(t) \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(5)を曲げ剛性 EI 、単位長重量 w のはりの曲げ振動方程式

$$\frac{w}{g} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

に代入すれば、次式が得られる。

$$\frac{w}{g} \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial x^2} \right) = -\frac{w}{g} f_j(x) \ddot{\phi}_j(t) \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)は、基礎の変位による強制振動ははりの各点はその基礎の変位によって生ずる橋桁の静的弾性変形曲線に比例する地震加速度をうける場合の振動に置換されることを示している。したがって、この結果を先に述べた一般力 Q_r に応用すれば、 Q_r は次式となる。

$$Q_r = \sum_{i=1}^m \left\{ Y_{ri} \left(-\frac{W_i}{g} \right) \sum_{j=1}^N f_{ji} \ddot{\phi}_j(t) \right\} \\ = -\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{ri} f_{ji} \ddot{\phi}_j(t) \quad \dots\dots\dots (8)$$

したがって、Lagrange の運動方程式はつぎの形になる。

$$\ddot{a}_r + 2h_r n_r \dot{a}_r + n_r^2 a_r = -\sum_{j=1}^N \beta_{rj} \ddot{\phi}_j(t) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\beta_{rj} = -\frac{\sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{ri} f_{ji}}{\sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{ri}^2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

各基礎の刻々の地震加速度を用いて式(9)より一般座標 a_r を求めれば、橋梁の変位は式(1)で表わされ、曲げモーメントは次式で表わされる。

$$M_i(t) = \sum_{r=1}^m a_r M_{ri} + \sum_{j=1}^N M_{ji} \phi_j(t) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 M_{ri} は第 r 次の振動型に対する曲げモーメントモード、 M_{ji} は橋桁が f_{ji} なる静的弾性変形をなすとき i 点に生ずる曲げモーメントである。長大橋梁においては、式(11)の第2項の曲げモーメントは第1項の曲げモーメントに比しきわめて小さい。したがって、この第2項を省略しても大きな誤差を生ずることはない。

(2) 曲げモーメントモード M_{ri} の計算

第 r 次の自由振動に対し、 $a_r = A_r \sin n_r t$ とおけば、自由振動中に質点 i に働く慣性力 P_{ri} の最大値は次式となる。

$$P_{ri} = \frac{W_i}{g} A_r Y_{ri} n_r^2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

この慣性力が各質点に作用するとき橋梁のたわみ曲線は第 r 次の振動型と相似である。振動型の最大値を1とし、それが k 点であるとす。この橋梁の i 点に働く単

位外力による k 点の変位を δ_{ki} とすれば、各点に式(10)の慣性力が作用するときの k 点のたわみには次式が成立する。

$$y_k = \sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} A_r Y_{ri} n_r^2 \delta_{ki} = 1 \dots\dots\dots(13)$$

これより A_r を求め、式(12)に入れると曲げモーメントモードを求めるために i 点に働かせるべき慣性力は次式で得られる。

$$\bar{P}_{ri} = \frac{W_i Y_{ri}}{\sum_{i=1}^m W_i Y_{ri} \delta_{ki}} \dots\dots\dots(14)$$

この慣性力を各質点に作用させた場合の各点の曲げモーメントを求めれば、これが第 r 次の変位モード Y_{ri} に対する曲げモーメントモード M_{ri} となる。

(3) 各基礎の地震波に位相差がある場合

橋梁の各基礎の地震波形は同一であるが位相差がある場合には、 $\phi_j(t)$ として次式を用いればよい。

$$\phi_1(t) = \phi(t), \phi_2(t) = \phi(t - \tau_1), \phi_3(t) = \phi(t - \tau_1 - \tau_2), \dots\dots\dots(15)$$

ここに、 τ_1, τ_2, \dots は各基礎間を地震波が伝播するに要する時間である。

(4) 各基礎の地震波が同一の場合

橋梁各基礎の地震波が同一の場合には、式(9)の右辺はつぎのようになり、従来の方法と一致する。

$$-\sum_{j=1}^N \beta_{rj} \ddot{\phi}_j(t) = -\ddot{\phi}(t) \sum_{j=1}^N \beta_{rj} = -\ddot{\phi}(t) \beta_r \dots\dots\dots(16)$$

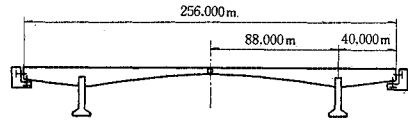
$$\beta_r = \frac{\sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{ri}}{\sum_{i=1}^m \frac{W_i}{g} Y_{ri}^2} \dots\dots\dots(17)$$

3. 名護屋大橋に対する計算

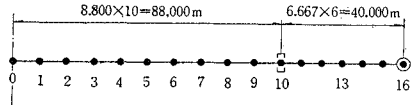
(1) 固有振動数および振動型

上記理論のうち、各基礎に作用する地震波に位相差のみがある場合の計算例として、名護屋大橋(ディビダーク橋)を採用した。本橋の一般図は図-2に示してある。この橋を同図(b)に示すような全体で33個の多質点系に置換して振動性状を求めた。解析にあたりつぎの仮定を設けた。

- i) 橋脚はばねと考え、その一部の重量を質点10に加えた。
- ii) 中央グレンクはせん断力のみを伝え、相対変位はない。
- iii) アバットと主桁との接合部はヒンジとする。



(a) 一般図



(b) 振動モデル

図-2 名護屋大橋

表-1 名護屋大橋諸元

質点番号	W_i (ton)	I_i (m ⁴)
0	66.31	11.700
1	120.95	12.200
2	131.13	14.200
3	158.33	17.200
4	190.53	22.500
5	222.36	28.400
6	253.79	36.000
7	283.11	45.300
8	334.23	55.800
9	445.33	69.600
10	813.27	88.500
11	411.35	83.700
12	391.89	78.900
13	372.42	74.200
14	353.57	69.700
15	339.11	64.700
16	293.35	59.900

表-2 名護屋大橋の固有円振動数

次数 r	固有円振動数 n_r
1	4.967
2	13.93
3	19.84
4	33.83
5	35.97
6	44.08
7	50.78

iv) 主桁は曲げ変形のみ、橋脚は曲げせん断変形を生じ、主桁と橋脚との取付部ではねじりの影響を考慮する。

v) 基礎地盤の反力係数は無限大とする。すなわち、基礎の回転は考えない。

各質点の重量および各点の桁の鉛直軸まわりの断面2次モーメントを表-1に示す。表-2は計算によって得られた固有振動数で、図-3は振動型である。これらの計算値は起振機による振動試験の結果とよく一致し、理論値が妥当なものであることがわかった。なお、これらの数値計算には九州大学計数施設のOKITAC-5090 Hを使用した。

(2) 応答計算

基礎に作用する地震波としては、El Centro地震(1940年5月、N-S成分、最大加速度330gal)の加速度記録を用いた。また、式(5)および式(11)の第2項の計算に必要な基礎の地震変位 $\phi_j(t)$ としては、加速度記録をそのまま2回積分すると不合理な変位曲線を生ずるので、加速度記録の基準線を3次曲線で仮定するBerg-Thomaidisの方法で補正計算をほどこしたものを変位曲線として使用した。この地震波が橋軸直角水平方向に橋軸方向からいろいろの伝播速度で入射するものとして応答を計算した。地震波速度は ∞ km/sec(地動位相差を考慮しない場合)、4.0 km/sec、2.0 km/sec、1.0 km/sec、0.5

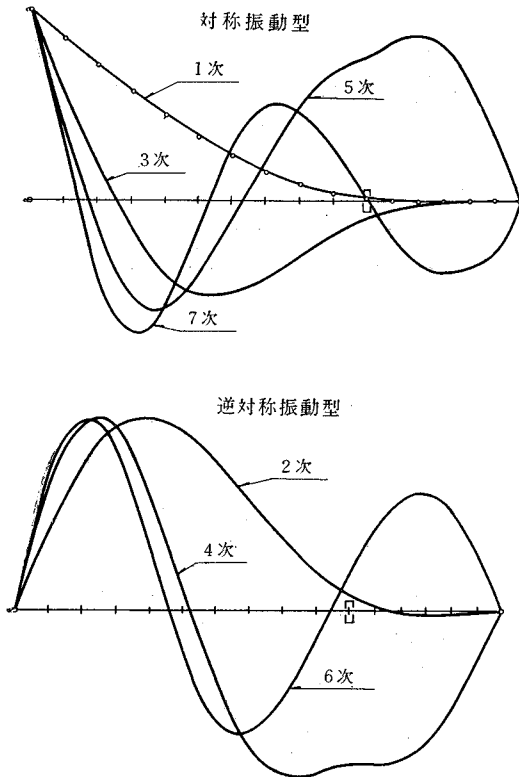


図-3 名護屋大橋の振動型

km/sec の5通りを用いた。応答計算は各次の減衰定数 h_r をすべて0.02とし、時間刻み Δt を0.01 secとし、振動次数を7次まで採り、線形加速度法により行なった。

図-4 は質点0の変位の時間的変化を、図-5 および図-6 は質点2および質点4の曲げモーメントの時間的変化を示したものである。図-7 および図-8 は種々の地震波伝播速度に対する各点の最大相対変位および最大曲げモーメントの分布を示したものである。図-8 の点10. は橋脚取付部の中央スパン側を、点10_a はアバット側を表わす。

(3) 計算結果および考察

地動位相差を考慮した場合、中央スパン点2および点4における曲げモーメントは2次の振動型によるものが卓越しており、1次の振動型によるものの70倍にも達する。これは逆対称振動による中央ゲレンクのせん断力の影響が大きいことを示し、地動位相差を考慮しない従来の方法では見出すことのできないものである。橋脚部10_c, 10_a 点における曲げモーメントは1次振動によるものが卓越している。

各基礎の地震変位 $\phi_j(t)$ によって生ずる静的曲げモーメント(式(11)の第2項)は動的変形による曲げモーメント(式(11)の第1項)の2~10%程度で非常に小さ

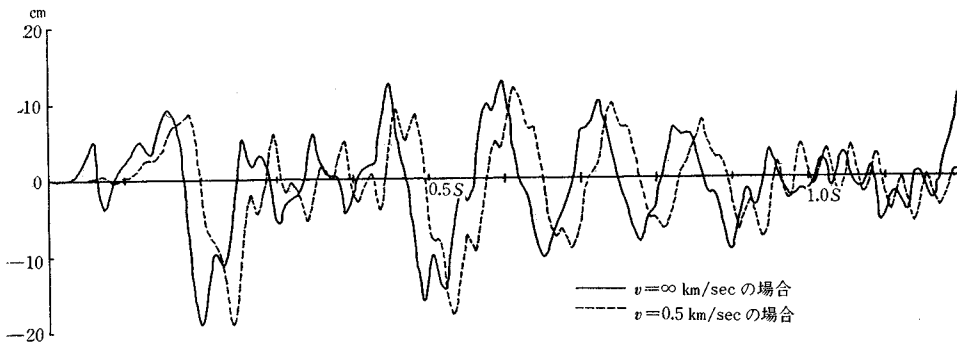


図-4 質点0の相対変位の時間的変化

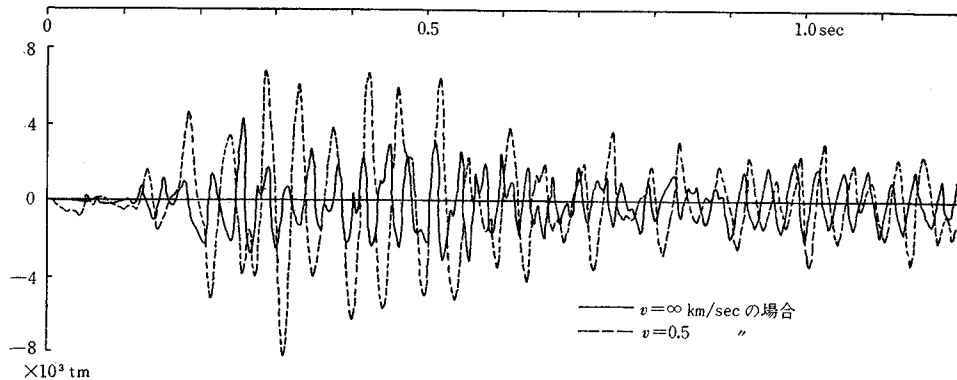


図-5 点2の曲げモーメントの時間的変化

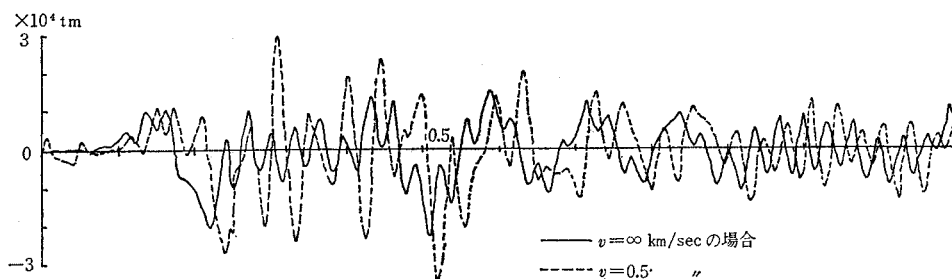


図-6 点 10。の曲げモーメントの時間的变化

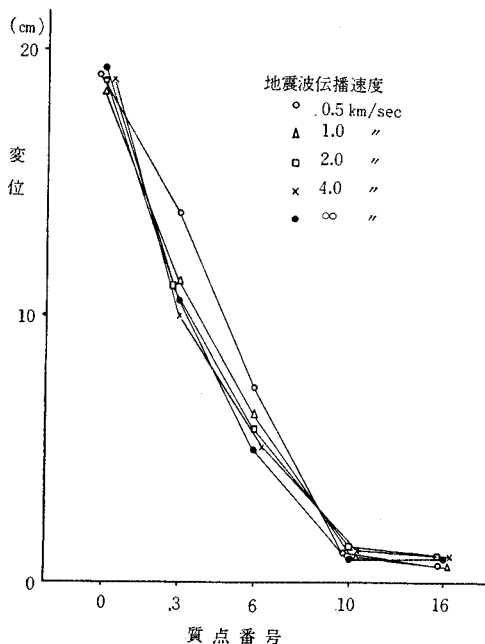


図-7 最大相対変位

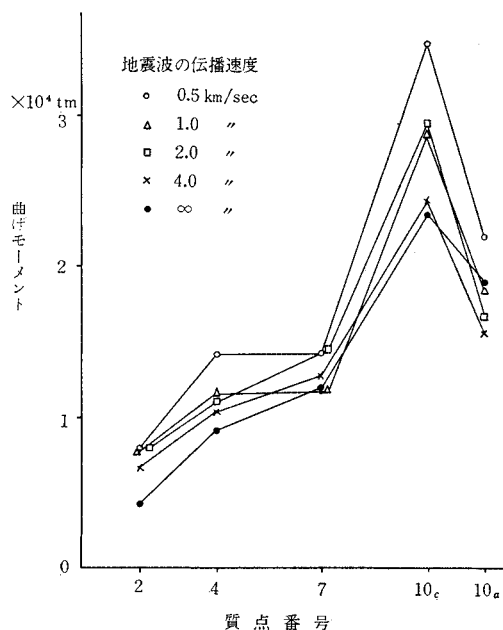


図-8 最大曲げモーメント

く、増加側に作用する場合もあれば減少側に作用する場合もある。

各点の動的変位(式(1)の第1項)は1次振動によるものが非常に大きく、逆対称振動次数のものはあまり大きくない。すなわち、変位応答は地動位相差を考慮してもあまり変わらない。

地震波の伝播速度の大小による応答の相違は、一概にはいえませんが、伝播速度が 0.5 km/sec の場合の曲げモーメントは伝播速度が ∞ km/sec の場合のその 1.2~1.8 倍に達している。本計算例で伝播速度が 0.5 km/sec の場合の応答が他の場合のそれよりやや大きいことは、地震加速度記録の卓越周期と橋脚間の位相差との関係によるものであろう。

次数のとり方による収束状態は変位応答の場合5次までで十分であり、曲げモーメント応答の場合にも7次までとればよく、7次を除いても誤差は2%以下である。

橋梁の各基礎が異なる地震波をうける場合の特別な例として地動位相差のみを考慮して応答計算を行なった

が、内力において相当危険側であることがわかった。したがって、長大橋梁の地震応答計算に対しては各基礎の地動加速度の相違ないしは地動位相差を考慮しなければならない。

4. Modal analysis の妥当性

構造物の基礎から入射した地震波は構造物内を伝播し、端部で反射重複をくり返し、定常的な振動を示すものである。したがって、地震波の地盤中の伝播速度を考慮するならば、構造物内の波動伝播の影響をも考慮すべきであろう。とくに長大スパンの橋梁では、この波動伝播の影響を無視することはできないと思われる。従来、土木構造物の地震応答を波動論により解析した例は少なく、ほとんど modal analysis によって解析している。これは、土木構造物が一般に複雑な形状をしていて、その内部を伝わる波動も複雑になり、波動論による解析が繁雑であることによるものである。

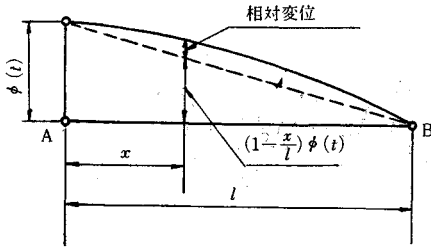


図-9 単純はり

そこで本論では、筆者らが先に示した modal analysis の適用限界を求めるため、両端単純支持の均一断面のはりが一端支点で外乱加速度をうける 簡単な場合について、橋桁の曲げ波動論、modal analysis および 模型実験の3法によって解析し、著者らが提案した modal analysis が長大スパン橋梁の地震応答解析に適用できるか否かを明らかにした。

(1) Modal analysis

図-9 に示すような、橋長 l 、横方向曲げ剛性 EI 、単位長重量 w の均一長方形断面の単純はりの一端 A が外乱加速度 $\ddot{\phi}(t)$ をうける場合のはりの応答は次式で表わされる。

$$y(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r \sin \frac{r\pi x}{l} \dots\dots\dots(18)$$

はりの一端 $x=0$ が $\phi(t)=1$ なる変位をしたときのはりの静的弾性線は $f(x)=1-x/l$ で表わされるから、一般座標 a_r に対する一般力 Q_r は次式で表わされる。

$$Q_r = \int_0^l \left\{ -\frac{w}{g} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \ddot{\phi}(t) \right\} \sin \frac{r\pi x}{l} dx$$

$$= -\frac{wl}{g\pi r} \ddot{\phi}(t) \dots\dots\dots(19)$$

したがって、 a_r に関する微分方程式はつぎのようになる。

$$\ddot{a}_r + 2h_r n_r \dot{a}_r + n_r^2 a_r = -\frac{l}{\pi r} \ddot{\phi}(t) \dots\dots\dots(20)$$

ここに、 h_r, n_r は r 次の減衰定数および固有円振動数である。また、 x 点のひずみ応答は式(18)よりつぎのように表わされる。式中 δ ははりの横方向厚さである。

$$\epsilon(x, t) = \frac{\pi^2 \delta}{l^2} \sum_{r=1}^{\infty} a_r r^2 \sin \frac{r\pi x}{l} \dots\dots\dots(21)$$

(2) 曲げ波動の伝播速度

はりの減衰を省略すると、波動方程式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad \left(k^2 = \frac{EIg}{w}\right) \dots\dots\dots(22)$$

この式でいま、 $y = a \sin 2\pi(x-vt)/\lambda$ とおいて式(22)に入れると、曲げ波動の伝播速度として次式が得られ

る。ここに、 λ は曲げ波動の波長である。

$$v = \frac{2\pi k}{\lambda} \dots\dots\dots(23)$$

式(23)よりわかるように、はりの中には正弦波状の曲げ波動が伝播することができ、その速度は伝播波の波長により異なる。これが弦の波動や棒内の縦波と異なるところである。したがって、はりの応答を波動論的に求めるには、はりの一端における外乱加速度をフーリエ級数に分解し、各正弦波成分のはり上の波動伝播を求め、これを重合することにより解析できるであろう。しかし、不規則な外乱加速度をフーリエ分解することは非常に複雑であるので、ここではつぎのような方法を用いた。

(3) 半無限のはりの波動論による解法

一端 $x=0$ で単純支持されている半無限長のはりの一端が単位跳躍速度 $\dot{\phi}(t)=1$ で表わされる外乱をうけた場合のはりの応答を考える。微分方程式(22)をつぎの境界条件で解けばよい。

$$\left. \begin{aligned} t < 0 : y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \\ t > 0 : x = 0 \text{ で } y = t, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \\ x = \infty \text{ で } y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

式(22)を Laplace 変換し、 $L[y(x, t)] = Y(x, s)$ とおけば、微分方程式は、

$$\frac{d^4 Y(x, s)}{dx^4} + \frac{s^2}{k^2} Y(x, s) = 0 \dots\dots\dots(25)$$

となり、境界条件はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} x = 0 \text{ で } Y(0, s) = \frac{1}{s^2}, \quad \frac{d^2 Y(0, s)}{dx^2} = 0 \\ x = \infty \text{ で } Y(\infty, s) = 0, \quad \frac{d^2 Y(0, s)}{dx^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

式(25)の一般解は、 $p^2 = s/2k$ とおいて次式となる。

$$Y(x, s) = e^{-px} \{ A \cos px + B \sin px \} + e^{px} \{ C \cos px + D \sin px \} \dots\dots\dots(27)$$

$x = \infty$ における条件より式(27)の任意定数 C, D は 0 となり、 $x=0$ における条件より A, B を求めれば、 $Y(x, s)$ が次式のように得られる。

$$Y(x, s) = \frac{1}{s^2} e^{-px} \cos px \dots\dots\dots(28)$$

はりの曲率の Laplace 変換は上式を x で 2 回微分して次式で表わされる。

$$\frac{d^2 Y(x, s)}{dx^2} = \frac{1}{sk} e^{-px} \sin px \dots\dots\dots(29)$$

この式の逆変換は複素積分を用いてつぎの形で得られる。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2}{\pi k} \int_0^{\infty} e^{-2ktu^2} \cos ux \cdot \sinh ux \cdot \frac{1}{u} du$$

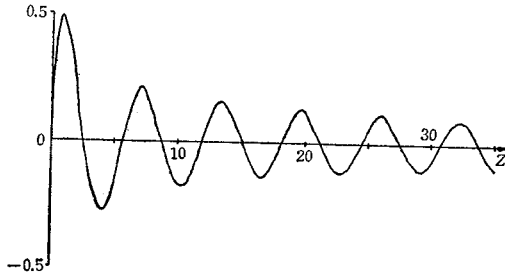


図-10 C(z)-S(z) の値

$$= \frac{1}{k} \{C(z) - S(z)\} \dots\dots\dots(30)$$

ここに、C(z) および S(z) は Fresnel の積分で、 $z = x^2/4kt$ として次式で表わされる。

$$C(z) = \int_0^z \frac{\cos f}{\sqrt{2\pi f}} df, \quad S(z) = \int_0^z \frac{\sin f}{\sqrt{2\pi f}} df \dots\dots\dots(31)$$

Fresnel の積分の不定積分に関するつぎの関係式

$$\begin{aligned} \int C(z) dx &= x \left\{ C(z) - \frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}} \right\}, \\ \int S(z) dx &= x \left\{ S(z) + \frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}} \right\} \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

を用いて、式(30)を2回積分すれば次式が得られる。

$$y(x, t) = \frac{x^2}{2k} \left[C(z) - S(z) - \frac{1}{2z} \{C(z) + S(z)\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \{\cos z + \sin z\} \right] \dots\dots(33)$$

また、式(30)を用いれば、x 点のひずみ応答は次式で表わされる。

$$F(x, t) = -\frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\delta}{2k} \{C(z) - S(z)\} \dots\dots\dots(34)$$

図-10 は $\{C(z) - S(z)\}$ の値を示したものである。

(4) 両端単純支持ばりの波動論による解法

一端 $x=0$ が単位跳躍速度をうけた場合の両端単純支持ばりの応答は、つぎの境界条件

$$\left. \begin{aligned} t < 0 : y=0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} &= 0 \\ t > 0 : x=0 \text{ で } y=t, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 0 \\ x=l \text{ で } y=0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

を一般解、式(27)に用いればよい。式(35)を Laplace 変換し、式(27)に用いれば

$$Y(x, s) = \frac{1}{4} \frac{2}{s^2} \{ \cosh px \cdot \cos p(2l-x) - \cosh p(2l-x) \cdot \cos px \} \dots\dots\dots(36)$$

ここに、 Δ は次式である。

$$\Delta = 2 \{ \cos 2pl - \cosh 2pl \}$$

$1/\Delta$ を 2 項定理により展開し、式(36)を変形しよう。

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= e^{-2pl} + 2e^{-4pl} \cos 2pl - e^{-6pl} \\ &\quad + 4e^{-8pl} \cos 2pl + 4e^{-8pl} \cos 2pl + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(x, s) &= \frac{1}{s^2} [e^{-px} \cos px \\ &\quad - e^{-p(2l-x)} \cos p(2l-x) \\ &\quad + e^{-p(2l+x)} \cos p(2l+x) \\ &\quad - e^{-p(4l-x)} \cos p(4l-x) + \dots] \dots(37) \end{aligned}$$

この式を x で 2 回微分すれば、はりの曲率の Laplace 変換がつぎのように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y(x, s)}{dx^2} &= \frac{1}{sk} [e^{-px} \sin px \\ &\quad - e^{-p(2l-x)} \sin p(2l-x) \\ &\quad + e^{-p(2l+x)} \sin p(2l+x) \\ &\quad - e^{-p(4l-x)} \sin p(4l-x) + \dots] \dots\dots\dots(38) \end{aligned}$$

式(37)を式(29)と比較すると、式(38)の逆変換はつぎのようになることがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{1}{k} [\{C(z_0) - S(z_0) + C(z_2) - S(z_2) + \dots\} \\ &\quad - \{C(z_1) - S(z_1) + C(z_3) - S(z_3) + \dots\}] \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{x^2}{4kt}, \quad z_1 = \frac{(2l-x)^2}{4kt}, \quad z_2 = \frac{(2l+x)^2}{4kt}, \\ z_3 &= \frac{(4l-x)^2}{4kt}, \quad \dots \end{aligned}$$

式(39)を式(30)と比較すると、両端単純支持ばりの一端に単位跳躍速度が作用した場合の応答は、図-11 に示すように、 $x=0$ の点から左右に $2l$ の倍数だけ離れた点に端部を有する半無限のはりの単純支持端に単位跳躍速度が作用した場合の応答をそれぞれ向きを変えて重ね合わせたもので表わされることがわかる。はりの曲げひずみ応答 $F(x, t)$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} F(x, t) &= -\frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\delta}{2k} \\ &\quad \cdot [\{C(z_0) - S(z_0) + C(z_2) - S(z_2) + \dots\} \\ &\quad - \{C(z_1) - S(z_1) + C(z_3) - S(z_3) + \dots\}] \dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

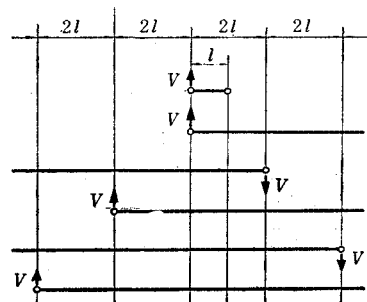


図-11

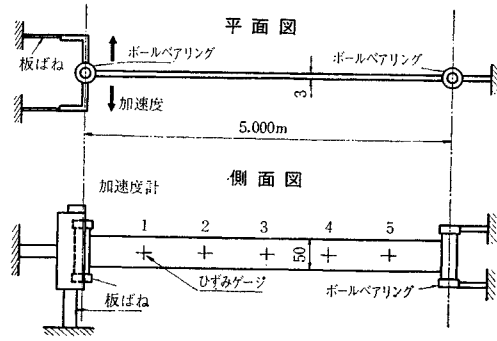


図-12 単純ばり模型

式(40)の第1項は x 方向へ向かう進行波を表わし、第2項は x の負方向へ向かう後進波を表わす。一端における外乱加速度 $\dot{\phi}(t)$ が与えられた場合には、Duhamel の積分を用いて、ひずみ応答 $\epsilon(x, t)$ が次式で求められる。

$$\epsilon(x, t) = \dot{\phi}(0)F(x, t) + \int_0^t \dot{\phi}(\tau)F(x, t-\tau)d\tau \quad \dots\dots\dots(41)$$

(5) 模型実験 (単純ばり)

Modal analysis, 波動論による応答の解を検証するために図-12に示すような簡単な装置を用いて実験を行った。模型ばりは一端に外乱加速度を与えた場合の桁内の曲げ波動伝播がよくわかるように、横方向に曲げ剛性

表-3 模型ばりの振動性状

次数 r	固有周期 T_r	減衰定数 h_r
1	1.012	0.015
2	0.494	0.022
3	0.273	0.014
4	0.176	0.012
5	0.121	0.011
6	0.0856	0.014
7	0.0681	0.008
8	0.0531	0.006
9	0.0426	0.005

表-4 曲げ波動の伝播速度 (m/sec)

次数	計算値	実験値
4	13.3	
5	16.6	16.9
6	19.9	

の小さい模型を製作した。材料には厚さ 3 mm のアルミニウム板を用い、桁高 70 mm, 橋長 5 m の長方形断面のはりの両端をボールベアリングで支えて単純支持とし、外乱は一端に板ばねを用いて作用させた。桁の曲げ波動の伝播は桁の両側面の等間隔 5 点にひずみゲージをはり、曲げひずみの伝播を測定して求めた。なお、この模型を modal analysis で解析する場合に必要なはりの固有振動数および減衰定数は moving coil でありを電磁的に加振して、その共振周波数および加振力しゃ断後の自由減衰振動から求めた。表-3 はこのようにして得られた模型ばりの固有周期と減衰定数である。また、一端における外乱加速度はベアリングの上に抵抗線式加速度計を設置して測定した。

(6) 実験結果と計算結果の比較

図-13 の実線は一端に与えた加速度 $\dot{\phi}(t)$ および各測点のひずみ応答の時間的経過を表わしたものである。実験より得られた卓越している曲げ波動の伝播速度およ

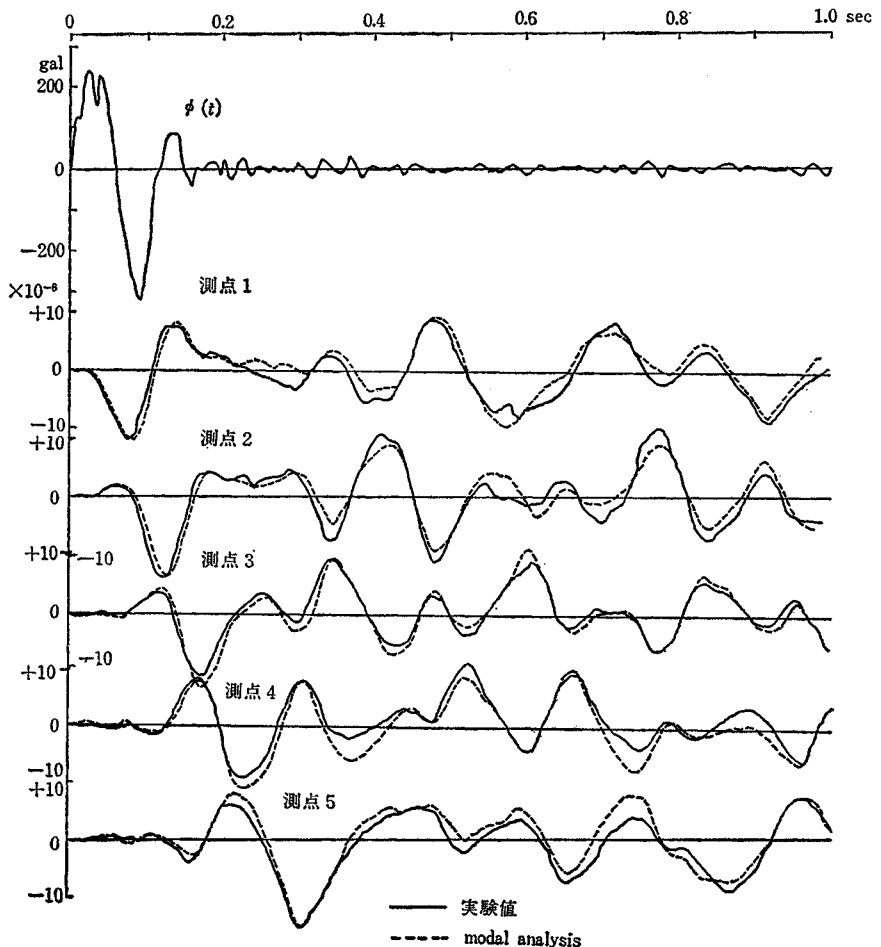


図-13 単純ばりのひずみ応答

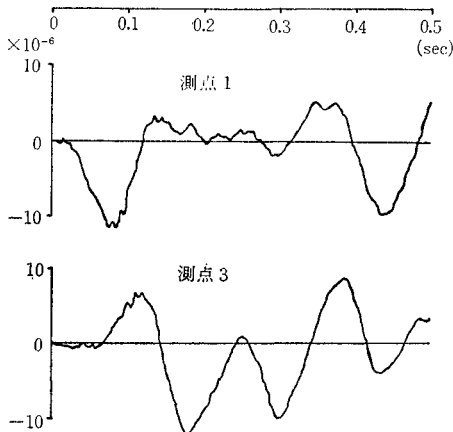


図-14 波動論により計算されたひずみ応答

び式(23)より計算によって得られた曲げ波動の伝播速度を表-4に示す。これによると、第5次の振動が卓越していることがわかる。これは外乱加速度の周期が約0.13秒であるから、この周期に近い固有振動周期をもつ第5次の振動波形が卓越して生じていることを示す。

つぎに、表-3に示す振動性状を用い、図-13に示す外乱加速度による模型ばりのひずみ応答を modal analysis によって求めたものが図-13の点線である。modal analysis における次数は9次までをとり、計算

は線形加速度法によった。図-14は同じ外乱加速度による模型ばりのひずみ応答を波動論によって解析したものである。この計算では減衰を考慮していないが、減衰が小さく、かつ、過渡現象の経過時間が短いので減衰の影響はほとんどない。

模型実験、modal analysis および波動論による解析結果を比較すると、いずれにおいてもひずみの伝播状態がよく観察さ

表-5 連続ばり模型の固有振動数 (c/sec)

次数	固有振動数
1	3.63
2	4.66
3	6.80
4	13.63
5	15.54
6	21.03
7	32.47
8	35.46
9	41.00
10	68.67
11	71.40
12	81.77

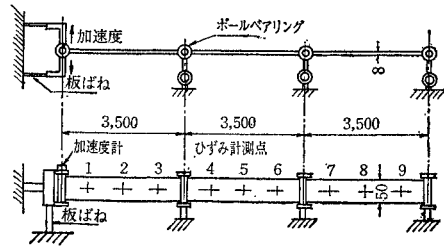


図-15 連続ばり模型

れ、ひずみの最大値およびその発生時刻ともによく一致していることがわかる。ただ、No. 3点において波動論で解析したひずみ応答に若干の位相のずれが見受けられるが、これは、模型ばりに多少引張力が作用していたので、模型の曲げ波動伝播が曲げ波動論による計算値より速くなったことに原因するものと思われる。

(7) 連続桁橋に対する模型実験と modal analysis

著者らの提案する modal analysis を単純ばりのみでなく、連続桁橋に対しても採用できるかどうかを明らかにするために、図-15に示すような3径間連続桁橋模型を製作し、一端に外乱加速度を与えた場合の桁のひずみ応答を測定し、modal analysis による解析結果と比較してみた。

模型は厚さ 8 mm のエポキシ樹脂を用い、桁高を 50

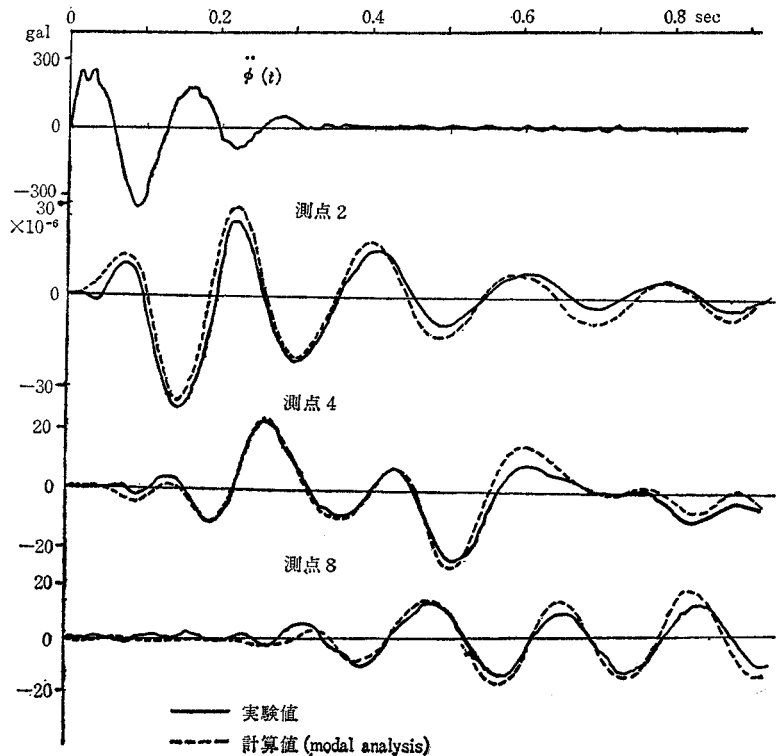


図-16 連続ばりのひずみ応答

mm とし、1 スパン 3.5 m の 3 等径間連続桁橋で全長 10.5 m である。支点はすべてボールベアリングで支えて完全ヒンジとし、外乱加速度を与える一端のみを板ばねで支えた。ひずみ測定は各スパン 3 ヲ所、合計 9 ヲ所で行なった。この模型の固有振動数および減衰定数の測定法は単純ばり模型の場合と同様である。

図-16 は一端における外乱加速度と各測点におけるひずみ応答の時間的経過の実測値を示したものであるが、曲げ波動の伝播状況がよく現われている。表-5 はこの模型の実測された固有振動数である。また、この模型の振動型を計算によって求め、表-5 の振動性状を用いて、図-16 の外乱加速度によるこの模型ばりのひずみ応答を modal analysis により計算したものが図-16 の点線である。解析にあたり、振動次数は 12 次までをとり、各次の減衰定数はすべて 0.03 とした。連続桁橋の場合にも、外乱加速度の周期が 0.13~0.15 sec であるので、これに近い周期の振動型が卓越して生じた。

実験値と modal analysis による計算値とを比較すると、両者はひずみ応答の時間的経過および最大値ともきわめてよく一致し、このような連続桁橋に対しても、著者らの示した modal analysis が曲げ波動伝播現象を解析するに十分な精度をもつものであることがわかる。

(8) Modal analysis の妥当性

単純ばりおよび連続桁橋模型に対する計算および実験結果からつぎの事項が明らかになった。

- (i) 曲げ波動論, modal analysis および模型実験のいずれによっても曲げひずみの時間的経過および最大値がよく一致する。
- (ii) はりに生ずる曲げ波動は、支点に働く外乱加速度の周期に近い固有周期の振動次数のものが卓越する。
- (iii) したがって、modal analysis によっても桁内の曲げ波動の伝播現象を解析することができるが、それには、外乱加速度の周期より小さい固有周期の次数まで採用しなければならない。
- (iv) 実橋においても、地震加速度に含まれる周期成分を考慮して十分高次の次数までを採用すれば、modal analysis によって曲げ波動の伝播現象を解析することができよう。

以上により、地震加速度記録を直接用いる著者らの提案した modal analysis の妥当性が証明された。

5. 結 語

吊橋などの長大スパンの橋梁においては各基礎における地震波の相違または地動位相差を考慮して応答計算を行なわねばならないことを述べ、入力として地震加速度記録を直接用いる modal analysis の一方法を提案し、名護屋大橋に対する計算例を示した。ついで模型桁橋に対して波動論, modal analysis および実験の三法により解析し、modal analysis の妥当性を確かめた。

ここでは、均質な一様断面のはりについて考察を加えたものであるが、外乱加速度が地震波程度の周期成分の場合には変断面の実橋においても上述の modal analysis による解析が可能であろう。しかし、吊橋のようにケーブルやトラスおよびはりの組み合わせからなる複雑な構造形式の橋梁に対しても全く同様に modal analysis が適用できるか否かにはなお疑問がある。著者らは目下このような場合に対する解析法について考究中である。

参 考 文 献

- 1) K. Nakagawa, H. Murata, C. Calero : "Preliminary Study on Model Analysis of Response of A Structure Subjected to Two Different Earthquake Motions at Its Two Supporting Points", Bull. of I.I.S.E.E., Vol. 4, 1967.
- 2) 竹山和彦：平面的拡がり考慮した建築物の地震応答解析，日本地震工学シンポジウム講演集，1966.
- 3) 小西一郎・山田善一・高岡宣善：長大吊橋の地震応答と耐震設計法に関する研究，土木学会論文集 159 号，昭和 43 年 11 月。
- 4) J.L. Bogdanoff, J.E. Goldberg, A.J. Schiff : "The Effect of Ground Transmission Time on The Response of Long Structures", Bull. of S.S.A., Vol. 55, No. 3, 1965.
- 5) G.V. Berg, G.W. Housner : "Integrated Velocity and Displacement of Strong Earthquake Ground Motion", Bull. of S.S.A., Vol. 51, No. 2, 1961.
- 6) H.S. Carslaw, J.C. Jaeger : "Operational Methods in Applied Mathematics", Oxford University Press, 1st edition, 1941.
- 7) R.P.N. Jones : "The Wave Method for Solving Flexural Vibration Problems", Jour. of App. Mech., Vol. 21, No. 1, 1954.
or "Transient Flexural Stresses in An Infinite Beams", Jour. of Mech. and App. Math., Vol. 8, 1955.
- 8) 伊藤 学：走行荷重に対する吊橋の動的応答と衝撃，土木学会論文集，No. 149，昭和 43 年 1 月。
- 9) K. Sezawa : "Some Problems of Shock Transmitted in Bars and in Plates", Report of The Aeronautical Research Institute, Tokyo University, Vol. 4, 1929.

(1969.8.7・受付)