

地震動による構造物の応答スペクトルについての一考察

A COMMENT ON PROPERTIES OF THE STRUCTURAL VELOCITY SPECTRA

伯野元彦*・篠塚正宜**

By Motohiko Hakuno and Masanobu Shinozuka

1. はじめに

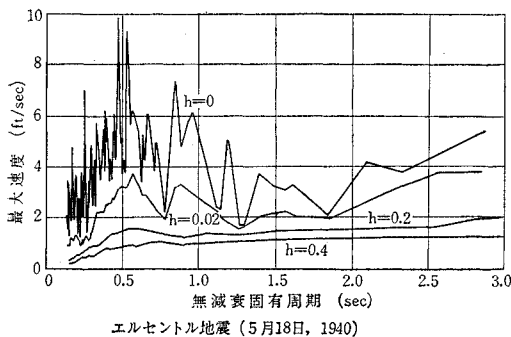
近年巨大な土木構造物が建設されるようになり、耐震設計を行なう場合従来の震度法のみではなく動的解析に基づいた設計法の試みがなされている。その手法としては種々提案されているが、その一つに米国の Housner 博士その他によるレスポンス・スペクトル法がある。これは米国において過去に得られた強震記録に基づき種々の強震が1自由度系に作用した場合の振動変位の最大値を計算機によって求め、その最大値を振動系の固有振動周期に対して描き数多くの地震記録によるものを平均したものをを用いる。この図形は長周期においてはほぼ周期に比例するという結果が得られた。この強震の性質が常に成り立つものであるれば構造物の耐震設計は非常に簡単化される。なぜならば最大変位が構造物周期に比例することは近似的に構造物の最大速度が周期に無関係であるということであるから、剛構造物に対する震度法の代りに最大速度さえ定めて構造物の応力計算をすればよいことになり、きわめて有力な方法となる。また完全に速度スペクトル一定でなくとも、その傾向があることが確かめられただけでも有効と思う。この最大振動速度と振動周期の関係の一例を図-1に示す¹⁾。この図をレ

ている。しかし、日本など強震記録の余り数多く得られていない国では、この結果をそのまま使うことはためらわれていた。というのは強震記録の得られた米国とは地質構造も違うから地震の持っているスペクトルが米国と同じとは断定できないし、地震波のスペクトルには測定地点の地表面層の性質が強く現われて来るべきであるという説が日本では古く唱えられて来たからである。

そしてその地盤が卓越周期を持つことは地震観測によっても確かめられ、多重反射の理論によっても裏づけられた。その後、日本においてもかなり大きい地震記録が得られ、前記 Housner 博士らの方法によってそれら記録のレスポンス速度スペクトルを求めた結果、振動周期1秒とか2秒以上の長周期においては、Housner 博士らの結果と同様速度レスポンス・スペクトルはほぼ平坦となることがたしかめられた²⁾。その後、この速度レスポンス・スペクトルの性質に関してつぎのような興味深い研究が行なわれて来た。Hudson 博士らは大爆破による地動のレスポンス・スペクトルは前に述べた強震による同様な速度レスポンス・スペクトル一定の性質を持つことを発表した³⁾。また Goldberg, Bogdanoff らは電子計算機の中で振幅、位相等がランダムでしかも振幅が指数関数的に減少するような多くの正弦波を重ね合わせた波動を地震波とみて1自由度系の振動を求めたところ、これまた同様に速度レスポンス・スペクトル一定の性質を示した⁴⁾。その後も同様趣旨の論文が現われており、地震波を計算機中で作製しようとする試みが一般化して来ている。その場合ほとんどの電子計算機によって作られた人工地震は速度スペクトル一定の性質を示している。このように見てくると速度レスポンス・スペクトル一定の性質は必ずしも実際に起こった強震に固有のものではなく、大爆破による地面の振動その他過渡的な振動外力を受けた構造物の振動すべてに共通した性質ではなかろうかという疑問が生じて来る。

もし、この性質がその疑問どおりのものならば、数多くの強震記録の集積を待つ前にも固有振動周期の長い構造物の耐震設計に際しては、比較的安心して最大レスポンス速度一定の法則を適用できるかも知れない。また現在行なわれている電子計算機による人工地震の作製は、逆にその人工地震による速度レスポンス・スペクトルが強震のそれと似ていたからといって、その地震波が実際の強震動の性質を忠実に再現しているということにはな

図-1 速度応答スペクトルの例



スポンズ速度スペクトルと称している。振動周期の2秒以上のような範囲ではスペクトルがほぼ一定値となっていることが知られる。そして以上のような強震の性質は Housner 博士らによれば強震動の持っている定常的速度の振動数成分がその振動数によらないからであるとし

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 土木工学科

** 正会員 Ph. D. コロンビア大学助教授 土木工学科

らず、その地震波による構造物の微小振動時最大レスポンス等はどの地震波によっても変わりはないということから大した間違いはないかもしれないが、構造物が非線形領域に入った場合には、その人工振動波による構造物振動が正しいという保証はないこととなる。なぜなら、非線形振動では振動の重ね合わせがきかないから、地震波の波形の影響が大きく効いて来て線形振動におけるスペクトルが同じであっても、理論的には非線形振動ではその振動が変わることが明らかだからである。

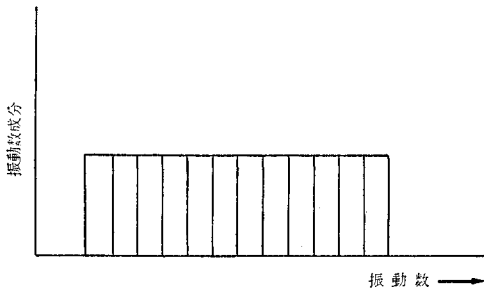
本論文では以上の疑問を明らかにするため、次章以下に述べるような研究を行なった。その結果は満足いくものではなかったが、定性的には前記性質を説明できたと思う。

2. レスポンス速度スペクトル一定に対する従来の見解

強震のレスポンス速度スペクトル一定の理由に対する従来の見解としては、定常振動論に基づいたつぎのような考え方がある。

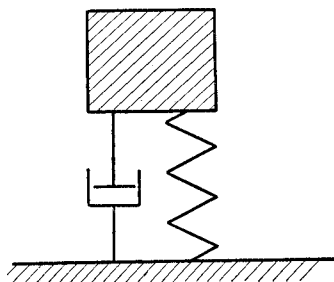
i) 地震波動の速度の振動数成分が 図-2 のように振動数によらず平坦である。つまり定常な白色雑音(ホワイトノイズ)とみなせるとする見方がある。その場合、非常に低振動数ならびに高振動数の成分は微小でしかも地表層の多重反射による卓越周期付近の振動数成分も含ませるという方法^{5),6)}を加えて実用をねらった考え方もある。

図-2 狭帯域白色雑音スペクトル



ii) 地震波動の振動数成分はどうであっても、構造物の振動は地震計と同様な振動原理に基づいているから地震計と同様、固有振動周期が非常に短い範囲では構造物振動変位は地震波動の加速度を表わし、非常に長い範囲では地震動の変位を示す、またその中間の固有周期をもった構造物振動変位は速度を表わす。その現象は以下のように説

図-3 1自由度系振動モデル



明される。

いま構造物が 図-3 に示されるようなバネ k でさえられ、減衰 c が作用する 1 自由度系と見なされる場合には振動方程式は次式となる。

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{x} \dots\dots\dots(1)$$

いま地震動変位が

$$x = a \sin pt \dots\dots\dots(2)$$

で表わされ、振動が起こったときより十分時間がたち、構造物の自由振動が十分減衰した定常振動となったときを考えれば、その振動変位は、

$$y = \frac{ap^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4\mu^2 p^2}} \sin(pt - \delta) \dots\dots(3)$$

$$\tan \delta = \frac{2\mu p}{\omega_0^2 - p^2}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \mu = \frac{c}{2m}$$

で表わされる。いま

$$u = \frac{\omega_0}{p} = \frac{T_p}{T_n}, h = \frac{\mu}{\omega_0}$$

とにおいて、式(3)を書き改めれば

$$y = \frac{1}{2\mu} V_v ap \sin(pt - \delta) \dots\dots\dots(4)$$

$$V_v = 1 / \sqrt{\left(\frac{u^2 - 1}{2hu}\right)^2 + 1}, \tan \delta = \frac{2hu}{u^2 - 1}$$

と書くことができ、 h が十分大きく、しかも $u \neq 1$ であれば、

$$V_v \doteq 1, \delta \doteq 90^\circ \text{ となり,}$$

$$y \doteq \frac{1}{2\epsilon} ap \sin(pt - 90^\circ) = -\frac{1}{2\epsilon} ap \cos pt$$

$$= -\frac{1}{2\epsilon} \dot{x} = -\frac{T_0}{2\pi h} \dot{x} \dots\dots\dots(5)$$

で表わされる。

式(5)において \dot{x} は地震動の速度そのものであり、構造物の固有周期が変わっても地震動が同一ならば不変である。

したがって

$$y_{\max} = -\frac{T_0}{2\pi h} \dot{x}_{\max} \dots\dots\dots(6)$$

となるが、同一の地震動を考える限り \dot{x}_{\max} は一定値であるから、構造物の振動変位の最大値は固有周期 T_0 に比例し、減衰定数 h に逆比例することとなる。

結局

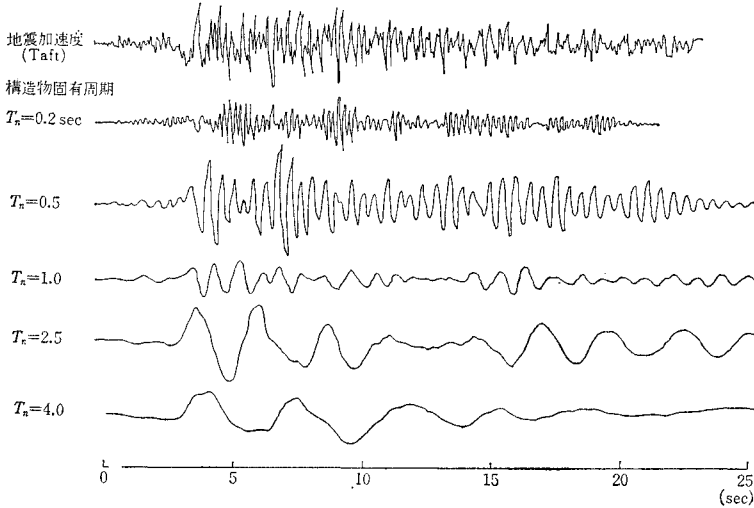
$$\frac{2\pi}{T_0} y_{\max} \doteq \dot{y}_{\max} = -\frac{1}{h} \dot{x}_{\max} \dots\dots\dots(7)$$

という関係式が得られ、構造物の振動速度の最大値は、構造物の固有周期 T_0 とは無関係で一定値となり、すなわちレスポンス速度スペクトル一定の性質を示す。

以上の説に対してつぎのような都合の悪い事実が認められる。

a) i) の説は地震は定常であるとしている。また完全定常ではなくとも、構造物に対しては十分なほど長い定常部分を持っているという観点に立っている。では果

図-4 地震動による構造物振動の例



たして地震動は構造物に対して定常的であろうか。地震動が構造物に対して定常的であるかどうかは、その地震動を加えた場合の種々の構造物の振動から判定できる。構造物の振動が定常的とみなせれば、たとえ加わる地震動は過渡的と見えてもその構造物にとっては、その地震動は定常的である。図-4 は米国において採取された比較的定常的と見えるタフト地震に対する種々の固有周期を持った1質点系の振動変位を示す⁷⁾。この変位からわかることは固有周期が長周期になると振動は定常的のように見えること、短周期では過渡的であることが知られる。固有周期が長い範囲では定常的のように見えるが、これも波数から見てみるとせいぜい数波が定常的に見えるだけである。数波のみの振幅の大きさ等しいことが定常と見なせるかどうかは疑問であると思う。タフト地震のような定常的と思われる地震ですらこの状況であるので、もちろん通常の過渡的とみなせる地震に対する構造物振動はより過渡的であることはいうまでもない。このように地震波の構造物に対する影響は過渡的であるのに定常的な考察を行なうのは不適當である。したがって地震波が定常的であっても、過渡的であっても応答スペクトルの性質を説明するような理論を作ることが必要である。

b) ii) の固有周期約1秒以上の範囲では、構造物は速度計の性質を示すので、構造物振動の最大値は固有周期に無関係となるという説明にはつぎの難点がある。通常使用されている地震計において速度計の固有周期は0.3秒程度のもので、固有周期1秒以上の計器は近似的に変位計として用いられている。応答スペクトルの平坦部分は1秒強から4~5秒の範囲にまでおよんでいることから、構造物が速度計の働きをするという議論には、固有周期の範囲が違いすぎ、速度計理論が正しいとすれば、従来得られた地震の変位記録はほとんどが速度

記録であったこととなり、これもまた納得しがたい。またすでに述べたように衝撃的な地震に対しても応答スペクトルの性質は大して変化するようにも見えないが、前記地震計の理論は定常振動論にもとづいており、過渡的な地震に対してはかなりの誤差を生じることがたしかめられており⁸⁾、過渡的地震に対する応答スペクトルの性質を説明することはできない。

以上述べて来たことによって応答スペクトルに関する従来の考察には、不十分な点が多々あるので、以下定性的な理論を展開する。

3. 関数積のフーリエ変換

いま二関数 $F(t)$, $G(t)$ を与え、それぞれのフーリエ変換を $f(\omega)$, $g(\omega)$ としよう。

すなわち

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots(8)$$

$$= |f(\omega)| e^{i\angle f(\omega)} = R\{f(\omega)\} + iI\{f(\omega)\}$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-i\omega t} dt \dots\dots\dots(9)$$

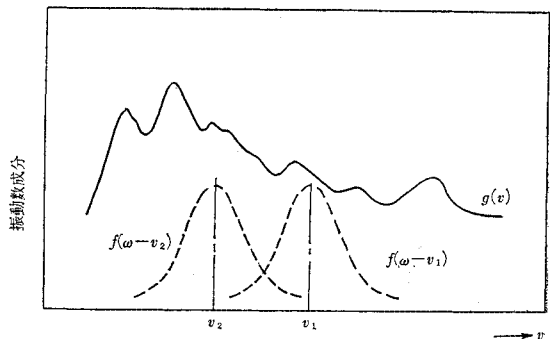
$$= |g(\omega)| e^{i\angle g(\omega)} = R\{g(\omega)\} + iI\{g(\omega)\}$$

教科書によれば⁹⁾, $F(t)$ と $G(t)$ との積のフーリエ変換は次式のように与えられる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \times G(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(v) f(\omega - v) dv \dots\dots\dots(10)$$

すなわち、関数積のフーリエ変換は、それぞれの関数のフーリエ変換のたたみ込み積分 (Convolution Integral) で与えられる。式 (10) の意味をわかりやすく説明するために、仮に $f(\omega)$, $g(\omega)$ を実数関数とすると 図-5 によって知られるように $f(\omega - v)$ という関数は $f(\omega)$

図-5 たたみ込み積分の説明



関数を ω だけ v 軸の (+) 方向へ移動したものである。式 (10) において、左辺の積分値は $F(t) \times G(t)$ の中に ω という円振動数の波がどれだけ含まれているかを示しており、右辺は $G(t)$ の中にどの振動数の波がどれだけ含まれているかを示す関数 $g(v)$ に、今その振動数成分の求めたい振動数 ω まで原点から移動して来た $f(\omega-v)$ 関数を掛けて積分した値である。もし求めたい振動数 ω の値が変わっても、 $g(v)$ は不変でただ $f(\omega-v)$ がその形状は変えずに v 軸上を移動するのみである。ここで式 (10) の意味を考えてみると $f(\omega-v)$ が $g(v)$ の ω の点における値のみでなく、その周辺の値をも組み込む作用をすることを示している。

$f(v)$ の形状にもよるが、つぎのような極端な例を考えてみよう。

i) $f(v) = \delta(v)$ の場合、ここに $\delta(v)$: デルタ関数式 (10) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(v) \delta(\omega-v) dv = g(\omega)$$

つまり、 $f(v)$ がデルタ関数の場合には、振動数成分 $g(\omega)$ は変化を受けない。

ii) $f(v) = \text{const.} = A$ の場合

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(v) \cdot A dv = B \text{ (定数)}$$

f 関数が横軸に平行な直線である時には、 $g(v)$ は大いに影響を受けて横軸に平行な直線となってしまう。このような性質を持つ $f(v)$ の時間領域での形状は

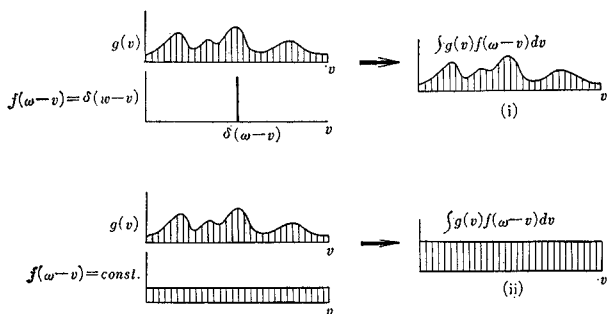
$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A e^{i\omega t} d\omega = A \cdot \delta(t)$$

つまり、デルタ関数である。

以上の過程を図示したものが 図-6 である。一般に $f(v)$ の形状は、前述のデルタ関数と横軸に平行な関数との中間にあるので ii) の場合のような完全平坦にはならずとも、平滑化する傾向があるといえる。

以下の章では、応答速度スペクトルを平坦とする因子をつぎのように分けて考え、その効果について論じたが、その際ほとんどの場合、この節で明らかにした時間関数積のフーリエ積分は原関数のフーリエ積分の平滑化の性質を持っていることによって説明できた。

図-6 たたみ込み積分が平滑化作用をもつことの説明図



- i) 応答の最大値をとることによる影響
- ii) 構造物のもっている振動減衰性による影響
- iii) 地震動の過渡性による影響

4. 振動の最大値をとることの応答スペクトルへの影響

いま、Housner 博士にならって¹⁰⁾ 1 自由度系の振動をつぎのような便利な形にまとめる。地震加速度を $\dot{Y}(t)$ で表わすならば、1 自由度振動系の振動方程式は式 (1) の右辺を $\dot{Y}(t)$ で置き換えたものとなり、加速度が加わる前、系が静止していたとすると解、すなわち振動変位は次式 $x(t)$ にて表わされる。

$$x(t) = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-h^2}} \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} \sin \omega_n \sqrt{1-h^2}(t-\tau) \times \dot{Y}(\tau) d\tau \dots \dots \dots (11)$$

ここに、

- h : 減衰定数、この系の減衰の限界減衰との比
- ω_n : 系の固有円振動数
- μ : $h \omega_n$
- t : 時間

$\omega_n = \omega_0 \sqrt{1-h^2}$ として式 (11) を書き換えると

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n(t-\tau) [\dot{Y}(\tau) \times e^{-\mu(t-\tau)}] d\tau \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^t (\sin \omega_n t \cdot \cos \omega_n \tau - \cos \omega_n t \cdot \sin \omega_n \tau) \\ &\quad \times \{\dot{Y}(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}\} d\tau \\ &= \frac{1}{\omega_n} \left[\int_0^t \{\dot{Y}(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}\} \cos \omega_n \tau d\tau \right] \sin \omega_n t \\ &\quad - \left[\int_0^t \{\dot{Y}(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}\} \sin \omega_n \tau d\tau \right] \cos \omega_n t \\ &= \frac{1}{\omega_n} \{a(t, \omega_n) \sin \omega_n t - b(t, \omega_n) \cos \omega_n t\} \\ &\quad \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

ここに、

$$a(t, \omega_n) = \int_0^t \{\dot{Y}(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}\} \cos \omega_n \tau d\tau \dots (13)$$

$$b(t, \omega_n) = \int_0^t \{\dot{Y}(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}\} \sin \omega_n \tau d\tau \dots \dots (14)$$

式 (13), (14) の $a(t, \omega_n)$, $b(t, \omega_n)$ は $\{\dot{Y}(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}\}$ のコサインならびにサイン フーリエ成分にほかならない。したがって系の振動変位 $x(t)$ は、このフーリエ成分を用いて式 (15) で表わされる。

$$x(t) = \frac{1}{\omega_n} \sqrt{a^2(t, \omega_n) + b^2(t, \omega_n)} \cdot \sin(\omega_n t - \alpha(t)) \dots \dots \dots (15)$$

ここに、

$$\alpha(t) = -\tan^{-1} \frac{b(t, \omega_n)}{a(t, \omega_n)} \dots \dots \dots (16)$$

本式からわかるように任意加速度 $\dot{Y}(t)$ を受ける 1 自由度系の振動変位は、振幅と位相が時間 t の関数であって振動数とその系の固有振動数である

ような擬正弦振動である。

以上の Housner 教授の研究結果を用いると、振動変位が最大になるのは、式 (15) における

$$A = \sqrt{a^2(t, \omega_n) + b^2(t, \omega_n)}$$

が最大になる時と考えると、結局振動変位の最大値を求める問題は A の最大値を求める問題、すなわち、

$$G(\tau) = \dot{Y}(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} \dots \dots \dots (17)$$

のフーリエ変換の最大値を求める問題に帰着される。

ところで、そのフーリエ変換の値、すなわち、式 (15) の擬正弦振動の包絡線 $\sqrt{a^2 + b^2}/\omega_n$ を 図-4 から作製したものが 図-7 である。つまり、1 自由度振動系振動変位の各最大値を直線で結び、それを近似的な包絡線と見なしたものである。もちろんこの包絡線の最大値が求める変位の最大値であり、 $G(t)$ のフーリエ変換の最大値である。

さて、問題の最大変位をとるといふことの意味を考えて見よう。すでに述べたように最大変位をとることは式 (17) の $G(t)$ のフーリエ変換の最大値をとることと等しいが、そのフーリエ変換値はその積分領域の $0 \sim t$ の値によって変化する。変位が最大値をとる時刻を T_{max} とすれば、最大変位 x_{max} はつぎのように示される。

$$\omega_n \times x_{max} = \sqrt{\left[\int_0^{T_{max}} \{\dot{Y}(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}\} \cos \omega_n \tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^{T_{max}} \{\dot{Y}(\tau) e^{-\mu(t-\tau)}\} \sin \omega_n \tau d\tau \right]^2} \dots \dots \dots (18)$$

式 (18) の左辺は応答速度スペクトルを示している。右辺を見るに、その積分領域は地震波の作用する全時間よりは、通常はるかに短い $0 \sim T_{max}$ である。

構造物減衰の影響は別の章で取り扱うので減衰はゼロとすると応答の最大値は 図-8 から知られるとおり幅が T_{max} なる長方形パルス $u(t)$ と地震加速度 $\dot{Y}(t)$ の積のフーリエ積分で表わされる。

すなわち、

$$\omega_n \times x_{max} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{Y}(t) \times (U t) e^{-i\omega t} dt \dots \dots (19)$$

式 (19) の値を求めるためには、まず、 $U(t)$ のフーリ

図-7 種々の固有周期をもつ構造物の地震時振動包絡線 (タフト地震に対して)

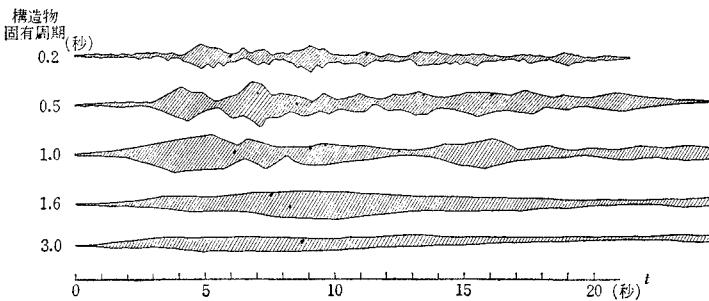
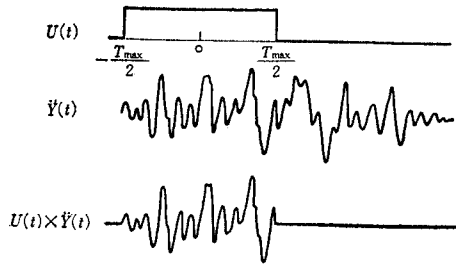


図-8 構造物振動の最大値をとることの説明図



エ積分を求めなければならない。いま、地震開始の時刻を $-\frac{1}{2} T_{max}$ になるように時間座標をとれば、

$$\int_{-\frac{T_{max}}{2}}^{\frac{T_{max}}{2}} U(t) e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega} [e^{-i\omega t}]_{-\frac{T_{max}}{2}}^{\frac{T_{max}}{2}} = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T_{max}}{2}\right) = T_{max} \times S_p\left(\frac{\omega T_{max}}{2}\right) \dots \dots \dots (20)$$

したがって、

$$\omega_n \times x_{max} = T_{max} \int_{-\infty}^{\infty} \{q(\omega) + iq'(\omega)\} \times S_p(\omega_n - \omega) d\omega \dots \dots \dots (21)$$

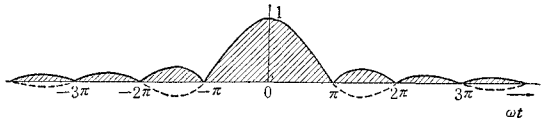
ここに、 $S_p(\omega)$: サンプリング関数

式 (21) の意味は $q(\omega)$, $q'(\omega)$ をそれぞれサンプリング関数 $S_p(\omega)$ を重み関数として平滑化しているということである。

S_p 関数を 図-9 に示してあるが、この関数の形状が平坦ならば平坦なほど (応答が最大となる時刻が ω_n に余りよらず、同様の時刻で起こるものとすれば) 速度応答スペクトルも平坦となる。

図-9 が平坦となる程度は $(\omega_n \times T_{max})$ が小さければ

図-9 サンプリング関数 $\frac{\sin(\omega t)}{\omega t}$



小さいほど著しいことが知られる。ところで、実際の地震で、この $(\omega_n \times T_{max})$ の値はどのようなものであろうか。

図-10 は Taft 地震、日本で得られた Shock 的地震について、それらの値を比較したものである。

また 図-11 は応答の最大値の生じる時刻 T_{max} を構造物固有周期に対して描いたのであるが、それによると、

図-10 (構造物固有円振動数 ω_n) \times (構造物振動が最大値をとる時刻 T_{max})

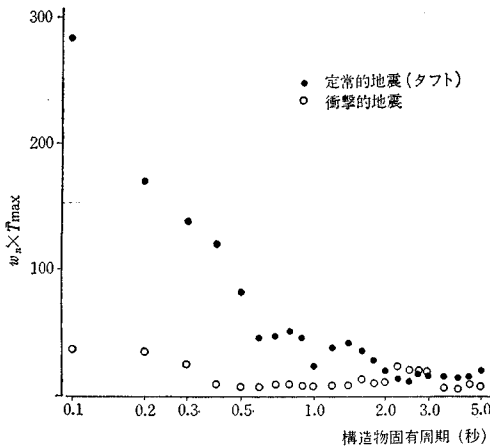
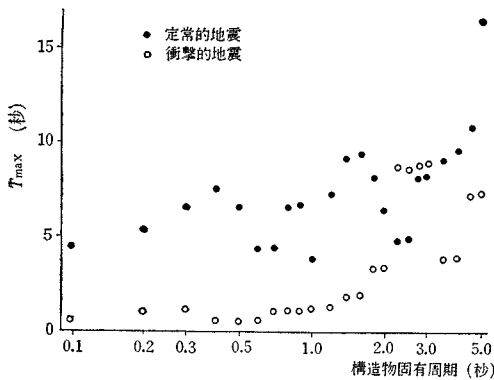


図-11 構造物レスポンス最大値をとる時刻 (T_{max})



大体において固有周期が長くなると T_{max} も大きくなるようである。

既往の地震記録, Taft, 日本における記録等についてその状況を 図-11 に示した。また $(\omega_n \times T_{max})$ については, 図-10 に示したとおりであるが, 構造物の固有周期が長くなると小さくなる傾向が認められる。その結果, 構造物の固有周期の長い範囲では, 図-9 に示した, Sampling Function が平坦となり応答スペクトルの平滑化が短周期におけるそれよりも著しいことが知られる。また, いずれにせよ, 地震による構造物振動変位の最大値は, 地震が終らないうちに生じるから, 地震の継続時間を T_0 とすると, 通常, $T_{max} < T_0$ 。

したがって,

$$(x_{max} \times \omega_n) A(t, \omega_n)_{max}$$

は地震全体のフーリエ積分, すなわち, 振動数成分より平坦となる。

5. 構造物の振動減衰の影響

応答速度スペクトル図(図-1)を今一度振り返って見ると, 構造物減衰の全く無い場合, すなわち, $h=0$ の

場合には, スペクトルの凹凸が激しく, 全体としても, そう平坦とは思われないが, $h=0.1$ ともなると凹凸は少なくなり, 固有周期1秒以下の領域でもかなりスペクトル値が一定の傾向となる。そして $h=0$ の場合とくらべると減衰のスペクトルに対する効果は, 固有周期の短い領域に対して著しいことが認められる。というのは, 固有周期1秒以下では, $h=0$ の場合スペクトルは, バラツキが非常に大きい, 構造物減衰が多少とも生じるとスペクトルは急激に滑らかに平らになるからである。このような構造物の持っている減衰性のスペクトルに対する影響を説明するにも 3. において述べた関数積のフーリエ積分の性質を用いると好都合である。

すなわち, 式 (15) より

$$x(t) \times \omega_n = \sqrt{\left[\int_0^t \{ \dot{Y}(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} \} \cos \omega_n \tau d\tau \right]^2 + \left[\int_0^t \{ \dot{Y}(\tau) e^{-\mu(t-\tau)} \} \sin \omega_n \tau d\tau \right]^2} \times \sin(\omega_n t - \alpha(t)) \dots \dots \dots (22)$$

したがって, 構造物振動変位に円振動数 ω_n を掛けた値は, 2 関数 $\dot{Y}(t)$ と $e^{-\mu(t-\tau)}$ の積のフーリエ積分の絶対値である。

いま地震加速度 $\dot{Y}(t)$ のフーリエ積分を

$$|s(\omega)| e^{i\angle s(\omega)}$$

とおき $e^{-\mu(t-\tau)}$ のそれを

$$|d(\omega)| e^{i\angle d(\omega)}$$

とおくとき, 式 (22) の振幅 A は次式で与えられる。

$$A(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)| |d(\omega_0 - \omega)| e^{i[\angle s(\omega) + \angle d(\omega_0 - \omega)]} d\omega \dots \dots \dots (23)$$

いま, 減衰項による地震波の振動数成分間位相差のひずみは少ないものとし, また, 地震波の各振動数成分間の位相差はランダムであるとするとき,

$$E[e^{i(\angle s(\omega) + \angle d(\omega_0 - \omega))}] = 1 \dots \dots \dots (24)$$

ゆえに

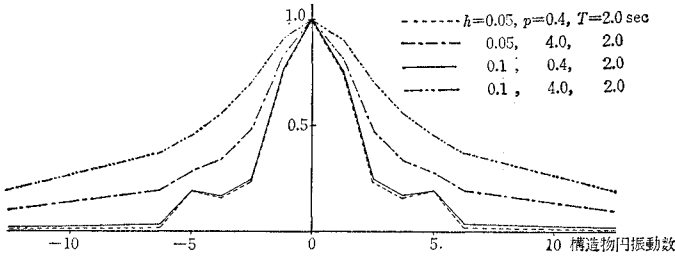
$$A(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)| |d(\omega_0 - \omega)| d\omega \dots \dots \dots (25)$$

すなわち, $x(t) \times \omega_n$ は地震波の振動数成分 $|s(\omega)|$ を減衰項 $e^{-\mu(t-\tau)}$ のフーリエ積分絶対値 $|d(\omega)|$ を平滑化関数として平滑化したものである。

当然入力地震波よりは, その振動数成分が平滑化される。この場合平滑化関数 $|d(\omega)|$ はつぎのように計算できる。

$$\begin{aligned} |d(\omega)| &= \left| \int_0^{t_0} e^{-hp(t_0-t)} e^{-i\omega t} dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{h^2 p^2 + \omega^2} [(hp \cos \omega t_0 - hp e^{-hp t_0} + \omega \sin \omega t_0) + i(\omega \cos \omega t_0 - \omega e^{-hp t_0} - hp \sin \omega t_0)] \right| \\ &= \frac{1}{h^2 p^2 + \omega^2} \sqrt{[hp \cos \omega t_0 - hp e^{-hp t_0} + \omega \sin \omega t_0]^2 + [\omega \cos \omega t_0 - \omega e^{-hp t_0} - hp \sin \omega t_0]^2} \dots \dots (26) \end{aligned}$$

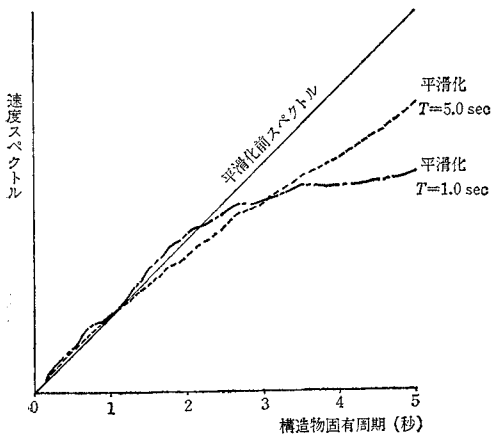
図-12 構造物減衰の応答スペクトルに対する平滑化関数



式(26)より知られるように構造物減衰によるスペクトルの平滑化は、減衰定数 h のみではなく、構造物固有円振動数 p 、地震が始まってからの時間 t_0 、等により左右される。

つまり減衰と地震継続時間等の効果を別々に考えることのできないことを示している。それらのパラメーターを変えて平滑化関数 $|d(\omega)|$ を描いたのが図-12である。減衰定数 h が増加するとともに $|d(\omega)|$ はピーク付近がなだらかとなることわかる。また p が増えると、すなわち、固有周期の短い領域ではピーク付近は長い場合より、平坦で応答スペクトルの平滑化が進むことが示される。つまりこの節の冒頭で述べたように、減衰のスペクトルに対する効果は短周期において著しい。地震開始後の時間 t_0 が増えると $|d(\omega)|$ のピーク付近の幅が狭まくなり応答スペクトルの平滑化が減ることが知られる。つまり地震開始後すぐに応答の最大値が現われる方がスペクトルは平坦なものが得られるということである。すなわち、衝撃的地震による応答スペクトルの方が平滑であることを示している。つぎにこの減衰による平滑化は具体的にどの程度の効果があるのかを例示して見よう。図-13は、実線で示されるような振動数成分を持つ地震波 $|s(\omega)|$ が式(26)で示される $|d(\omega)|$ によって平滑化された式(25)の $A(\omega_0)$ を示している。この

図-13 構造物減衰の応答スペクトルに対する影響 (振動数領域)



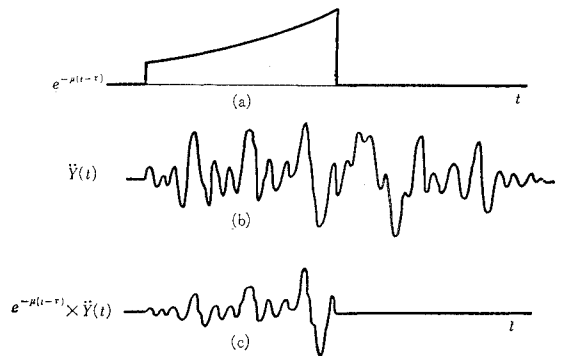
図においては、 $h=0.05, 0.1,$

$p=2\pi \times (0.4, 4.0), t_0=1.0, 5.0$ 秒を採用している。この図からも地震開始後の時間 t_0 が小さいと破線で示されるような平滑化の進んだスペクトルの得られること、その平滑化もかなりの程度であることが知られる。

また以上の減衰の影響をつぎのような別の観点から説明することもできる。すなわち、

図-14 に示すように入射地震波形は (b) で示されたような複雑な加速度 $\ddot{Y}(t)$ であったとしよう。ところで応答の最大値を生ずる時刻が T_{max} であるならば、いわゆる速度応答の最大値は、 $\dot{Y}(t) \times e^{-\mu(t-t_0)}$ の積分領域が $0 \sim T_{max}$ であるようなフーリエ積分である。

図-14 構造物減衰の応答スペクトルに対する影響 (時間領域)

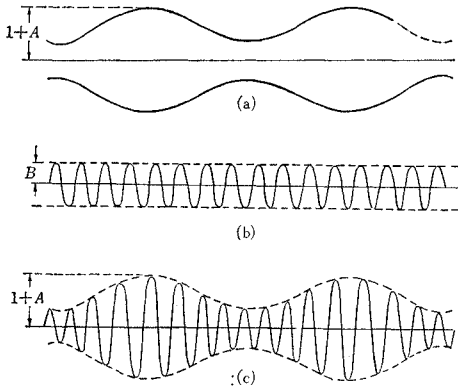


したがって、フーリエ積分すべき関数は、(c) 図で与えられるような原地震波形にくらべ、継続時間の短いしかも時刻0付近では、その値の小さい T_{max} 付近で急激に値の大きくなる Shock 的な波形である。つまり、構造物にとっては、入射して来た地震は (b) のようなものではなくて、(c) のような原波形に比してより Shock 的な地震に見えるということを示している。そして、このような衝撃的というか、時間領域の狭い波形のフーリエ変換は振動数領域においては、幅広いすなわち ω_n に対してほぼ平坦な波形を与えることは教科書¹¹⁾の教えるとおりである。したがって、定常的と見える地震も過渡的と見える地震も構造物にとっては大差なく減衰により応答の時刻 t より前の地震は指数関数的にその波形を減ずるため、いずれも衝撃的地震として感じられ、そのため速度応答スペクトルは、平坦な形状となる。そして、この構造物が衝撃的に感じることは、減衰が大きいほど著しい。

6. 地震動の過渡性の影響

以上述べて来たのは、地震動が構造物というフィルタ

図-15 地震の過渡性の影響の説明



一を通過することによって、元の地震波のスペクトルが平滑化される傾向にあることを見て来たのであるが、地震動の定常成分に見かけ上の過渡成分がかかっている場合にも地震波そのものに同様な平滑化現象が起こる。簡単な例として図-15に示すような2個の正弦波 $(1+A \cos \omega_{n+1}t)$ と $B \sin(\omega_1 t + \phi)$ の積を考えて見よう。

$$\begin{aligned} \text{積} &= B(1+A \cos \omega_{n+1}t) \sin(\omega_1 t + \phi) \\ &= B \sin(\omega_1 t + \phi) + AB \cos \omega_{n+1}t \sin(\omega_1 t + \phi) \\ &= B \sin(\omega_1 t + \phi) + AB/2 \sin[(\omega_1 + \omega_{n+1})t + \phi] \\ &\quad + AB/2 \sin[(\omega_1 - \omega_{n+1})t + \phi] \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

これは、本来の正弦波 (ω_1) に包絡線正弦波 (ω_{n+1}) が掛けられたとき、その擬正弦波の振動は本来の振動数 ω_1 とその両側に $\pm \omega_{n+1}$ だけ隔った2個の振動数成分が加わることを示している。このことは元の ω_1 だけにくらべて振動数成分が平坦になったことを示すものである。いま ω_1 のみではなく $\omega_2 \dots \omega_n$ の振動数が原波形に含まれていたとすれば、それぞれの振動数成分が生じて平坦化される。実際の地震の場合には、地震の始まる前は0であり、地震終了後も0であり、図-12(a)に相当する包絡線が過渡的であって、その振動数成分は ω_{n+1} のような離散的なものではなく分布したものとなり、地震波全体としての振動数成分は式(10)における $g(v)$ を地震波定常成分の振動数成分、 $f(v)$ を過渡包絡線の振動数成分としたものとなり、結局 $f(v)$ を平滑化関数とする $g(v)$ の平滑化したものとなり、地震波そのものの振動数成分がその定常成分の振動数分布にくらべて平坦となることとなる。実際にその平滑化の程度がどのくらいのものであるかを実際の地震について当ててみよう。図-16はエルセントロ地震加速度波形の同一符号側の隣り合わせた山を直線で結んだ図である。われわれ

図-16 地震動の包絡線(エルセントロ地震)

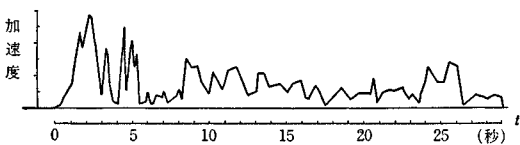


図-17 実地震の包絡線のフーリエ成分(エルセントロ)

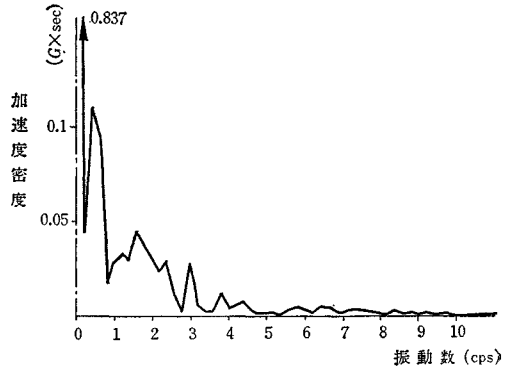
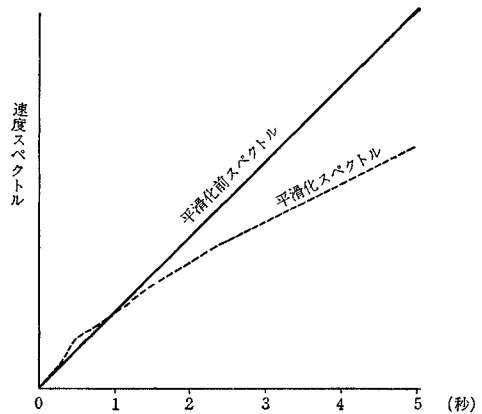


図-18 実地震の過渡性の平滑化程度(エルセントロの場合)



は、これをこの地震波の過渡包絡線と見なすことができる。この包絡線をフーリエ積分したものが平滑化関数であるが、この場合には、図-17のごとくなる。この平滑化関数を用いて図-13と同様振動周期に比例した定常振動成分を地震波が持っていると仮定して平滑化すると、図-18に示すような振動数成分を地震波全体としては持つこととなる。つまり実線で示されるような定常振動成分を持った地震に図-16のような包絡線をかかけた場合、その地震波の持っている振動数成分は、かなり平らな図-18のような振動数成分となり、平滑化されていることが知られる。

7. 実際の地震応答レスポンスについての考察

筆者は地震は定常的と見えても構造物に対しては過渡的に作用すると思っているが、まず実際の地震は構造物に対して定常的なのか過渡的なのかを知る目安として、地震に対する1自由度系の振動速度応答の包絡線を系の種々の固有周期に対して描いたものを図-19に示す。この包絡線は地震記録のうちでも定常的と見えるタフト地震に対する1自由度系振動変位の山と山を直線で結び振動系の固有周期 T_n で除し、適当な比例定数を掛けたものである。この図から知られるのは、振動応答は決し

図-19 (タフト地震による振動変位)×(円振動数)

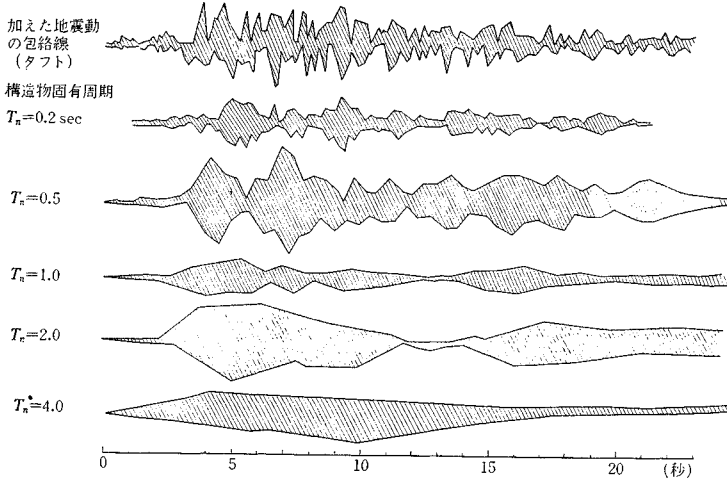
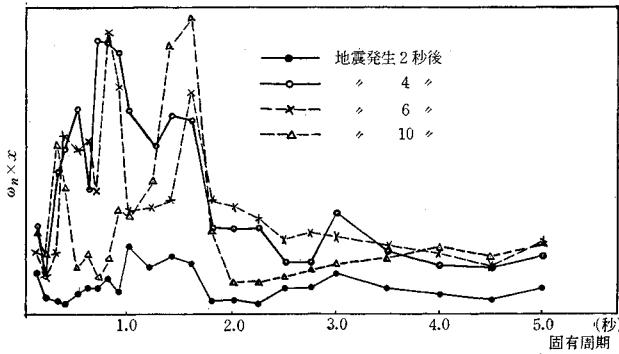


図-20 同時刻速度スペクトル



て定常的ではないということである。この包絡線は式(12), (13), (14), (15)等で表わされる応答の擬正弦振動の振幅 $A(\omega_n, t)$ を示しており、減衰定数 h を適当な値にとれば原地震波の短期振動数成分の時間変化を示すものである。この包絡線の同時刻における値を各固有周期に対してプロットしたのが 図-20 である。時間の進行とともにスペクトルに凹凸が生じて来ることが認められる。応答の最大値は同時刻に起こるわけではないが、各時刻によって固有周期が短い領域を除いて時刻が変わってもそれほどスペクトル値に変わりがないので応答速度スペクトル一定となる理由がわかる。また地震開始からの時間が短い範囲では同時刻のスペクトルが非常に平坦であることが認められ、これは 5. で述べた考えを証明するものである。地震が衝撃的ならば応答もその後大きくなることはないから最大値の応答スペクトルが同時刻スペクトルとほぼ等しくなり、非常に平坦となることが予想される。

8. 結 び

構造物の地震動による振動は地震動のフーリエ積分と等価であるという点に着目し、また 2 関数の積のフー

リエ積分は、それぞれのフーリエ積分のたたみ込み積分であることを用いて応答スペクトルが平滑化され、固有周期に関係なく一定値に近づく原因を定性的に研究した。

それによると、

(i) 地震動の非定常性は地震そのもののスペクトルを平坦なものとする。

(ii) 応答の最大値をとるという過程は、構造物より見た地震動を実際の地震動より短いものとし、スペクトルを平坦とする。

(iii) 構造の減衰性は、地震波そのものが、多少複雑かつ定常的な性質をもっている、ある時点 t における振

動応答に対しては、その t より t_0 まえの地震波の影響は実際の加速度の $e^{-h t_0}$ 倍の影響しかないので構造物に対しては、実際の地震加速度の波形よりも Shock 的に感じられ、その結果スペクトルは平坦となる。この減衰の影響は関数積のフーリエ変換の性質を利用して、振動数領域の議論からも説明できた。

(iv) 以上のような平滑化の因子は、減衰の場合には振動数大の領域の方が平滑化が激しいが、変位の最大値をとるという手続きは、長周期のスペクトルをより滑らかとする作用があ

る。

本研究によって構造物にある程度の減衰がある場合、同一攪乱力による過渡的な振動応答は速度スペクトルが一定となる傾向のあることを確かめ得た。このことにより弾性振動を論ずる限り、構造物に加わる地震が多少異なっても応答スペクトルの大略の性質は変わらないといえる。しかしながら地震が非常に強く構造物振動が弾性域を越える場合には、この研究に用いた理論は原則的には成立しなくなるため、応答スペクトルが平坦かどうかはわからないし、逆に今流行の電子計算機中で作製されている人工地震は応答スペクトルの形が強震記録のそれに近似していても、それを構造物に作用させて非線形振動を起こさせても、強震を作用させた時の非線形振動と近似している保証はないこととなる。地震動の性質の再研究の必要性が痛感される。

謝 辞

本研究の基礎資料となった強震動に対する 1 自由度系の振動応答としては、東京大学工学部建築学科梅村 魁教授よりお借りした SERAC 計算機によるデータを使わせていただいた。厚くお礼申し上げる。また数値計算

は東京大学大型計算センターにおいて行なったので、その旨記して感謝のしるしとしたい。

参 考 文 献

- 1) Housner, G.W. : "Vibration of Structures Induced by Seismic Waves" (Shock and Vibration Handbook by C.M. Harris & C.E. Crede), 1961, pp. 50. 10-32.
- 2) 高田孝信・大久保忠良・栗林栄一 : 橋梁の耐震設計に関する研究 (I), ——地震応答スペクトル・1964——, 土木研究所報告, 128号の1, 昭和40年10月.
- 3) Hudson, D.E. : "Man-Made Ground Motions" (Shock and Vibration Handbook by C.H. Harris & C.E. Crede), 1961, pp. 50-33~50.
- 4) Goldberg, J.E., Bogdanoff, J.L., and Sharpe, D.R. : "The Response of Simple Nonlinear Systems to a Random Disturbance of the Earthquake Type", Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 54, No. 1, February, 1964, pp. 263-276.
- 5) 金井 清 : "Semi-empirical Formula for the Seismic Characteristics of the Ground", 東京大学地震研究所彙報, Vol. 35, 1957年6月, pp. 307~325.
- 6) Housner, G.W. and Jennings, P.C. : "Generation of Artificial Earthquakes," Proc. of A.S.C.E., Vol. 90, No. EM 1, pp. 113-150.
- 7) 武藤 清・梅村 魁等 : SERAC 報告書
- 8) 河角 広 : 地震動と地震記象, 地震 4 (1932).
- 9) Sneddon : "Fourier Transforms" McGraw Hill pp. 24-25.
- 10) 文献1)と同じ
- 11) Goldman, S. : "Frequency Analysis, Modulation and Noise," McGraw Hill, 1948, pp. 134~135.

(1966.10.3・受付)