

アーチ ダムに作用する地震時動水圧の数値解

NUMERICAL SOLUTION OF HYDRODYNAMIC PRESSURES DURING EARTHQUAKES ON ARCH DAM

畑野 正*・今野 浩**
By Tadashi Hatano and Hiroshi Konno

1. 緒 言

地震時におけるアーチ ダムの振動形状は相当複雑であるが、これに対応した動水圧を求めることは、アーチダムの耐震設計上の一要件と考えられる。アーチダムの動的耐震計算法としては、すでに著者が提案¹⁾したように規準振動形を用いるのが便利である。この際動水圧は堤体と同位相で運動する仮想質量として取り扱われる。アーチダムの振動形に対応する動水圧の計算法には小坪助教授の解析的方法²⁾がある。しかしこの場合堤体の振動型と同時に貯水池の谷の境界条件をも考慮に入れて解くということはきわめて困難である。一方実験的に求める方法として電気相似³⁾による方法がある。この場合は堤体と同時に谷の境界条件をも満足させることができるが、従来堤体が剛振動をなす場合につき求められているに過ぎない³⁾。アーチダムの振動には、剛振動はほとんど存在しないといつてよく、したがって堤体の複雑な規準振動形状と同時に谷の境界条件をも満足する解を求めることが必要となって来るのである。

著者は前論文⁴⁾において地震時動水圧の共振問題について吟味し、一般の貯水池のように、その底部に砂や泥がたまっている場合、水中音圧の反射がなく、このため水の弾性による動水圧の共振現象は起こらないということ、また動水圧の主要部分は堤体の運動と同位相であるということを示した。そしてこのときの動水圧は波動方程式の代りに Laplace の方程式を境界条件を満足するように解けば得られることを述べた。これにより、理論上の水の弾性による共振周波数以上の周波数においても、動水圧を仮想質量として取り扱うことが正当化されるわけである。

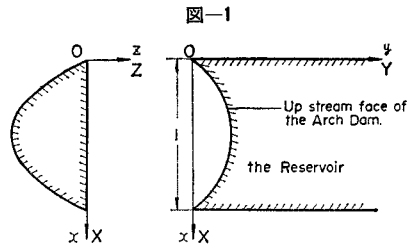
以上により動水圧の取り扱いはかなり容易になったといふことができるが、動水圧の大きさおよび分布と振動形が相互に影響しあうのであるから厳密な取り扱いはなお相当の困難がある。

いまここでは近似的にある想定された規準振動形に対応し、かつ谷における境界条件をも満足する動水圧の大きさと分布を求めることを試みることにしたい。

2. 地震時動水圧の数値解法

(1) 概 説

地底からの水中音圧反射がない場合の地震時動水圧は式(1)を境界条件に合致するよう解けば得られる⁴⁾。ここに図-1に示す貯水池内の領域において水の水速度ポテンシャルを F とする。



$$\frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

堤体が定常振動をなし、貯水池表面が自由表面であり、池底でこれに直角方向の水分子の速度が0であるという境界条件を用いて、Laplace の方程式を解いた解析解⁴⁾は、池内を伝播する進行波による圧力と堤体と同位相で距離とともに急激に減少して行く圧力の二部分からなることを示す。しかし一般に堤面において、前者は後者の1%以下の大きさのものに過ぎない。したがって実用的には前者を省略し、堤体と同位相の圧力の瞬間最大値を求めれば、工学上の目的が達せられると考えられる。したがって式(1)を解く境界条件としては近似的につぎのようにおくことができる。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} & \frac{\partial F}{\partial N} = V_N(X, Y, Z) \quad \text{ダム面上} \\ \text{(ii)} & \frac{\partial F}{\partial N} = 0 \quad \text{谷面上} \\ \text{(iii)} & F = 0 \quad Z = 0 \\ \text{(iv)} & F = 0 \quad Y \rightarrow \infty \end{array} \right\} \dots\dots(2)$$

ここに、 $V_N(X, Y, Z)$ はダム面上これに対する法線方向の速度、 N は境界面における法線。

(iii) は進行波の項を省略し、かつ自由表面上の波の高さを省略する近似条件である。(iv) は進行波の項を省略し、距離とともに減衰する項のみをとる近似条件である。(iv) は数値計算上必要な条件であるが、(iii) は自由表面の条件として、

$$\frac{\omega^2}{g} F - \frac{\partial F}{\partial Z} = 0 \quad (\omega : \text{角振動数})$$

* 正会員 工博 電力中央研究所
** 電力中央研究所

の形をとって計算することもできる。しかし、式(1)を自由表面の条件を用いて厳密に解いて得られる自由表面上の波の高さは、進行波による部分と距離とともに低減する部分の和として与えられ、後者は前者より一般に小さい。(iv)によってすでに進行波の項を省略しているのだから、(iii)においても進行波より影響の小さい距離とともに低減する波の部分を省略するのが順当であろう。この意味で自由表面の条件を用いず (iii) の条件を採用することとしたのである。

(2) 差分方程式

いま実際の計算を行なう場合、解に一般性をもたせるため、ダム堤頂の弦の長さを1としてスケール変換を行なう。この座標を x, y, z とし、速度ポテンシャルを $f(x, y, z)$ とすれば式(1), (2) はつぎのごとくなる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

- (i) $\frac{\partial f}{\partial n} = v_n(x, y, z)$ ダム面上
 - (ii) $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ 谷面上
 - (iii) $f = 0$ $z = 0$
 - (iv) $f = 0$ $y \rightarrow \infty$
- …(4)

貯水池内の領域に x, y, z の各方向に一樣な間隔 h の格子点を設け、差分方程式により Laplace の方程式を図-2 のO点につき表わせばつぎのようになる。

$$\frac{\partial^2 f(O)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(O)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(O)}{\partial z^2} = \{f(A) + f(B) + f(E) + f(W) + f(N) + f(S) - 6f(O)\} \frac{1}{h^2} + O(h^2) \dots\dots\dots(5)$$

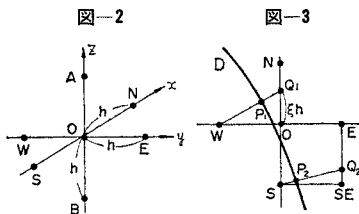
したがって差分解を f_h と表わしたとき、式(3)はつぎのごとくなる。

$$f_h(A) + f_h(B) + f_h(E) + f_h(W) + f_h(N) + f_h(S) - 6f_h(O) = 0 \dots\dots\dots(6)$$

すなわち式(6)は $O(h^2)$ の打ち切り誤差をもって式を近似したことになる。

(3) 境界付近の近似

ダムおよび谷の境界面付近の格子点における f の値を式(4)の(i), (ii)を用いて表わして見る。図-3に



において D をダム表面の曲面とする。いま簡単のためダム上流面が沿直の曲面をなすと考え、 S, W 点が水の領域からはずれている場合を考える。仮想点 W を通る境界面上の P_1 点における法線と ON との交点を Q_1 とする。しかるとき仮想点 W における f の値はつぎのごとく書くことができる。

$$\begin{aligned} f(W) &= f(Q_1) + \frac{\partial f(Q_1)}{\partial n} \overline{Q_1 W} + O(\overline{Q_1 W}^2) \\ &= f(Q_1) + \frac{\partial}{\partial n} \{f(P_1) + O(h)\} \\ &\quad \times \sqrt{1 + \xi^2} h + O(h^2) \\ &= f(Q_1) + \frac{\partial f(P_1)}{\partial n} \sqrt{1 + \xi^2} h + O(h^2) \end{aligned} \dots\dots\dots(7)$$

したがって式(4)の(i)を用いて

$$f_h(W) = f_h(Q_1) + \sqrt{1 + \xi^2} h v_n(P_1) \dots\dots\dots(8)$$

また

$$f(Q_1) = \xi f(N) + (1 - \xi)f(O) + O(h^2) \dots\dots(9)$$

$$\therefore f_h(W) = \xi f_h(N) + (1 - \xi)f_h(O) + \sqrt{1 + \xi^2} h v_n(P_1) \dots\dots\dots(10)$$

S 点についても全く同様に求めることができる。なお N 点もまた谷の内側に入る仮想点であるときは、 $f_h(N)$ をあらかじめ貯水池内の領域の点における値のみで表現しておく。図-4の示すように、 Q_1 点が $N \sim NW$ の中間に来るときは $f_h(Q_1)$ を $f_h(NW)$ と $f_h(N)$ を用いて求める。

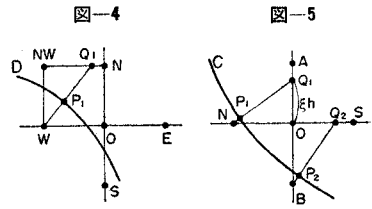


図-5において C を谷の境界とし、 N, B 点が水の領域からはずれているとする。 N 点を通る境界面上の P_1 点における法線と OA との交点を Q_1 とする。いま式(4)の(ii)を考慮すれば仮想点 N における f の値はつぎのごとく書くことができる。

$$\begin{aligned} f(N) &= f(Q_1) + \frac{\partial f(Q_1)}{\partial n} \overline{Q_1 N} + O(\overline{Q_1 N}^2) \\ &= f(Q_1) + \frac{\partial f(P_1)}{\partial n} \sqrt{1 + \xi^2} h + O(h^2) \\ &= f(Q_1) + O(h^2) \\ &= \xi f(A) + (1 - \xi)f(O) + O(h^2) \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

したがって次式を得る。

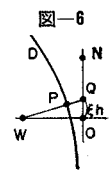
$$f_h(N) = \xi f_h(A) + (1 - \xi)f_h(O) \dots\dots\dots(12)$$

B 点についても同様に求めることができる。

境界条件(iv)は変数変換の方法があるが、ここでは簡単に $y = a$ において $f = 0$ とする方法をとった。後述する計算例では堤頂の弦長を1としダムの高さを0.5とした場合を示しているが、 $a = 1, 2, 4, 8$ 等として計算した結果 $a = 2$ と $a = 8$ の場合に、解にほとんど差がなかったので $a = 2$ において $f = 0$ の条件を使用することとした。

(4) ダム面上における速度ポテンシャル f の値

ダム面上の動水圧を求めるための、ダム面上の速度ポテンシャル f の値はつぎのごとくなる。すなわち図-6において



$$\begin{aligned}
 f(P) &= f(Q) + v_n(Q) \overline{PQ} + O(\overline{PQ}^2) \\
 f(Q) &= \xi f(N) + (1-\xi)f(O) + O(h^2) \\
 v_n(Q) &= v_n(P) + O(h) \\
 \therefore f(P) &= \xi f(N) + (1-\xi)f(O) + v_n(P) \overline{PQ} + O(h^2) \dots\dots\dots(13)
 \end{aligned}$$

したがって次式を得る。

$$f_h(P) = \xi f_h(N) + (1-\xi)f_h(O) + v_n(P) \overline{PQ} \dots\dots\dots(14)$$

(5) 堤体が上下流方向に剛振動にする時の取り扱い
 アーチダムの振動形状には剛振動による全面一様振幅という場合は実在しないが、従来の慣用法である。Westergaardの簡略式(剛振動に対する二次元解の簡略式)をアーチダムの各沿直断面に適用する方法と比較するため、および規準振動と剛振動の組み合わせを考える場合のために、上下流方向一様振幅の場合の計算を後に行なうことにする。この場合の近似はつぎのように取り扱うことができる。

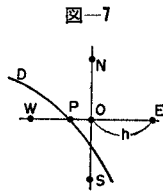


図-7において、

$$\begin{aligned}
 f(O) &= f(W) + h \frac{\partial f(W)}{\partial y} + O(h^2) \\
 &= f(W) + h \left\{ \frac{\partial f(P)}{\partial y} + O(h) \right\} + O(h^2) \\
 &= f(W) + h \frac{\partial f(P)}{\partial y} + O(h^2) \dots\dots\dots(15)
 \end{aligned}$$

したがって

$$f_h(W) = f_h(O) - h v_y(P) \dots\dots\dots(16)$$

また、この場合ダム面上の速度ポテンシャルはつぎのごとく表現される。

$$\begin{aligned}
 f(P) &= f(O) + v_y(O) \overline{PO} + O(\overline{PO}^2) \\
 &= f(O) + v_y(P) \overline{PO} + O(h^2) \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

$$f_h(P) = f_h(O) + v_y(P) \overline{PO} \dots\dots\dots(18)$$

(6) 反復計算

上述(2)~(3)により貯水池内の領域におけるすべての格子点につき差分近似式(6)を得ることができる。これらの連立方程式の解を求めるために反復法を適用するものとする。すなわち適当な第0次近似 $f_h^{(0)}$ を仮定し、反復的に近似解を求めるのである。このとき残差 $R(O)$ をつぎのごとくおく。

$$\begin{aligned}
 R^{(n+1)}(O) &= \frac{1}{6} \{ f_h^{(n+1)}(A) + f_h^{(n+1)}(W) \\
 &\quad + f_h^{(n+1)}(N) + f_h^{(n)}(B) \\
 &\quad + f_h^{(n)}(E) + f_h^{(n)}(S) - 6 f_h^{(n)}(O) \} \\
 &\dots\dots\dots(19)
 \end{aligned}$$

これを用いて次式を適用するものとする。

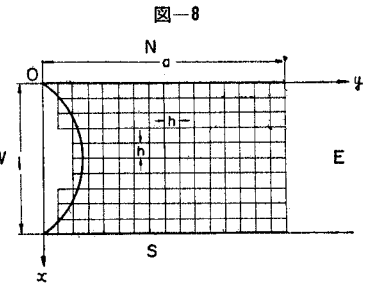
$$f_h^{(n+1)}(O) = f_h^{(n)}(O) + \nu R^{(n+1)} \dots\dots\dots(20)$$

ここに、 ν は加速パラメーターである。

すなわち S.O.R 反復法 (Successive Over Relaxa-

tion) を用いるのである。

計算は図-8に示す原点 O から $x=0, z=0$ の線上を E の方向に向って行ない、 $y=a$ に



進んだとき $x=h, z=0$ の線上にうつる。このようにして $z=0$ の面上の計算が終れば $z=-h$ の面にうつり前と同様の計算をくり返す。(n+1) 回目の反復計算を行なっているとき、ある O 点では A, W, N 点をすでに通過しているから $f_h^{(n+1)}(A), f_h^{(n+1)}(W), f_h^{(n+1)}(N)$ は既知である。かくて式(19)から $R^{(n+1)}(O)$ が求まり、式(20)から $f_h^{(n+1)}(O)$ を知る。加速パラメーターの値は最初の数回は1とし、ついでそれ以降は consistently ordered な two-cyclic 行列の理論により ν を計算式(20)に適用することとした。

計算は相当粗い格子間隔 h について行ない、その段階である程度の取束を見たとき順次 h を小さくして行った。取束判定には次式を用いた。

$$\frac{\sqrt{\sum_0^N \{R^{(m)}(O)\}^2}}{Nh^2} < h \dots\dots\dots(21)$$

N : 格子点の数

3. 数値計算の実例

前述数値解法にしたがって、仮想のアーチダムを選びこれに適用して見よう。ここに図-9に示すように堤頂の弦長10, 高さ0.5, 半径0.61, 上流面沿直なる定半径型アーチダムを選んだ。谷の形は上下流方向に直角な沿直断面内で一様に放物線をなすものとする。

図-9には対称振動の場合を示した。すなわちダム周辺において固定された左右に各一本の沿直の節線をもつ左右対称の規準振動形を考えたのである。図の上段にはダムの水平および沿直断面におけるダム上流面の半径方向の速度分布を記して、その振動形を表現してある。すなわち式(4)の(i)に相当する。図の中段には谷の沿直断面が示してあり、この谷の周辺に対する法線方向における水分子の速度が0とされる。すなわち式(4)の(ii)が周辺に対して満足されなければならない。図の下段には計算されたダム面上における動水圧の大きさを水平断面および沿直断面における分布として示してある。ダム上流面上の規準振動形に対応する速度分布 $v_n(x, y, z)$ および谷、水面の境界条件を満足した池内の速度ポテンシャル全般が求まる。これからダム上流面上の値 $f_n(x, y, z)$ が得られてダム面上の動水圧が求まるのである。動水圧 σ は $\frac{W_0}{g} \frac{\partial f}{\partial t}$ で与えられるから、速

図-9

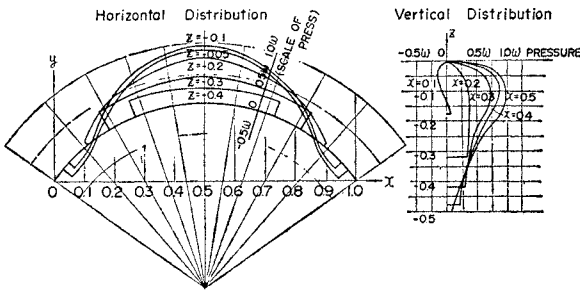
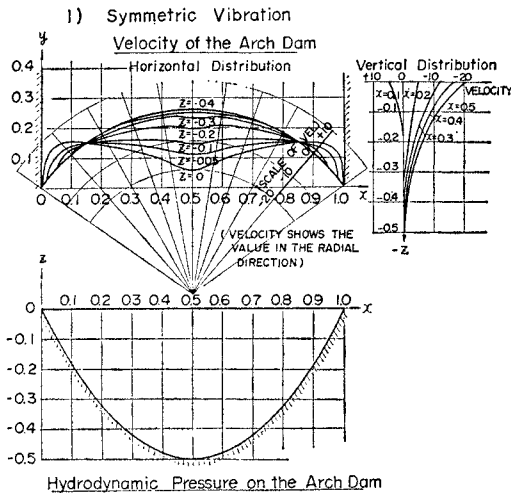
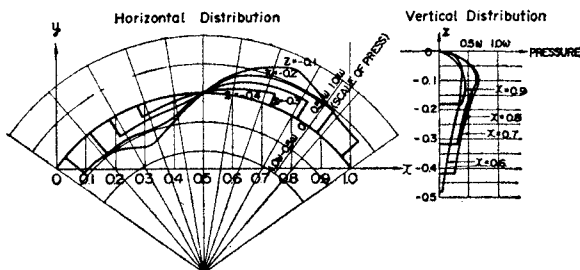
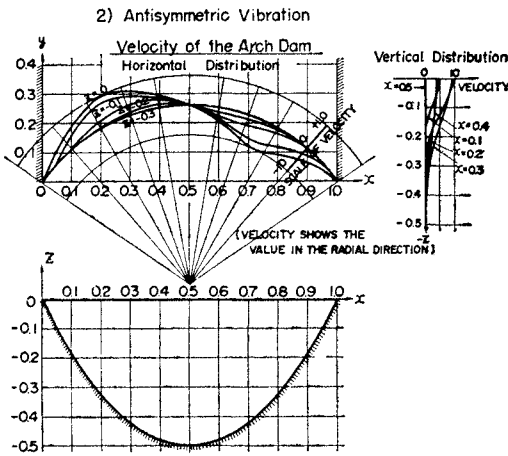


図-10



度の時間経過を $v_n(x,y,z)\cos \omega t$ とおけば、ダム面において

$$\sigma = -\frac{W_0}{g} f_n(x,y,z)\omega$$

となる。図には水頭として $f_n(x,y,z)\omega$ の値で表現してある。この場合の計算は $h=0.1, 0.05, 0.025$ の三者について行なったが、 $h=0.025$ の場合の結果を記してある。

図-10 は逆対称振動の場合を示す。ダムのクラウン片持ばりを節線とする左右に全く逆対称の振動形状の場合である。図の上段は半径方向の速度分布を示してあり、下段はこれに対応するダム上流面上の動水圧を示している。この計算は $h=0.1, 0.05$ の二者について行なったが、 $h=0.05$ の場合の値を記してある。

図-11 は上下流方向に全堤面一様に剛振動した場合を示す。前述のようにアーチダムには剛振動すること考える必要はないが、アーチダムの動水圧に対する従来の慣用法すなわち Westergaard の簡易式を各沿直断面の水深に応じて適用して動水圧を推定する方法と比較する意味で、また規準振動と剛振動を組み合わせる場合の便宜のためにこの場合を計算しておく。図の下段は動水圧の計算結果を示してある。この場合の計算は $h=0.1, 0.05$ の二者について行なったが $h=0.05$ の場合を記してある。

4. 考察ならびに結論

以上によってアーチダムに対する地震時動水圧の数値解法が与えられ、その適用例が示されたわけである。いま前述剛振動の場合の解を従来の慣用法と比較して見ると 図-12 のごとくなる。すなわち各水深における二次元解である簡略式の値は、ダムの中央において過大に評価され、左右アバット近くでは過小に評価されていたといえる。

なお、池中の動水圧の堤体からの距離による減衰状況を 図-13 に示しておいた。

以上の計算結果はすべてスケール変換されたままの値で示されているが、これを原型に適用するにはつぎのようにすればよい。堤頂の弦長を 1 としているがたとえば 200 m ありとする。実物ダムの表面速度分布を $v_n(x,y,z)$ そのままの値とし、単位を cm/sec とする。しかるときは 200 m が 1cm に対応するから実物に対する動水圧 σ_r は換算係数を r とすれば

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{W_0}{g} f_n(x,y,z)\omega \cdot r \\ &= -\frac{W_0}{g} f_n(x,y,z)\omega \frac{20000}{1} \end{aligned}$$

図-11

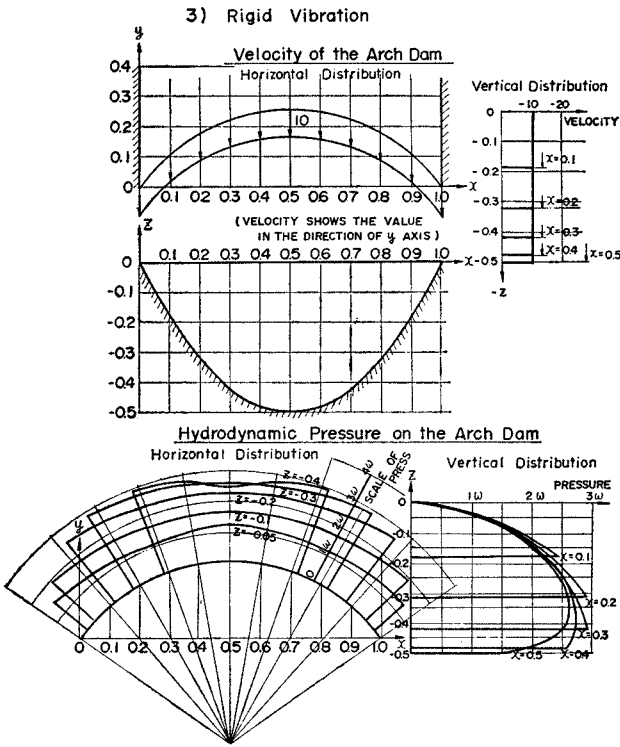
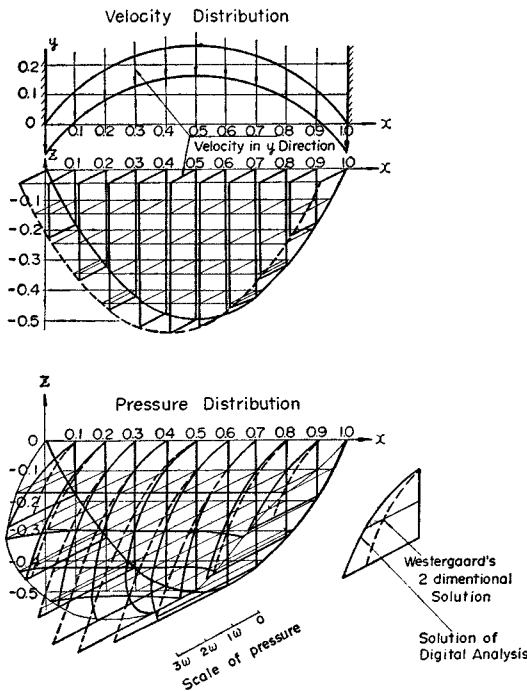


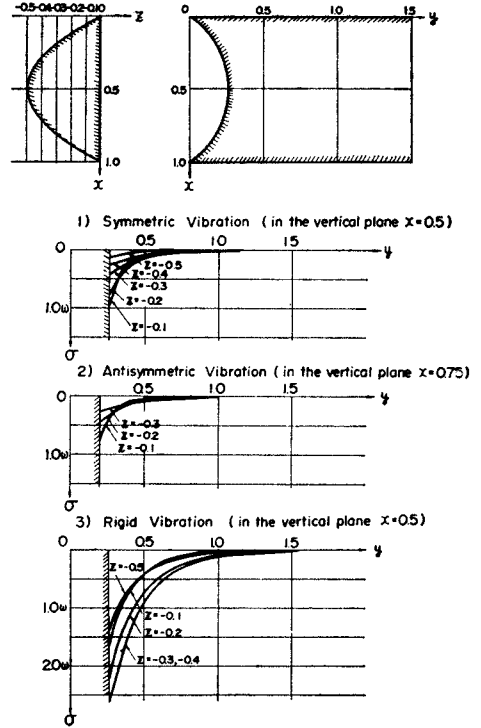
図-12



となる。

また速度分布が $v_n(x,y,z)$ であるから加速度分布は $-v_n(x,y,z) \cdot \omega$ となり動水圧は加速度に正比例するこ

図-13



とも付言しておく。

動水圧の大きさ、分布が決定すれば、これを堤面全面にわたって積分し、堤面全面の加速度の積分値で割れば、堤体を一自由度の振動系として取り扱う場合の仮想質量の値が得られることになる。

アーチダムに対する動水圧は以上述べたように規準振動形に対して計算されるべきである。この規準振動形そのものは模型試験¹⁾または解析的計算により知ることができる。著者は簡易化された規準振動形の数値計算法を開発したいと考えているが、これはまた別の機会にゆずることとする。

以上著者が述べた動水圧の数値解法は直角座標を使用している関係上、任意の振動形状、境界条件の場合に拡張することができ、したがって一般的にダムに対する動水圧の解が可能になったといえることができる。

引用文献

- 1) 畑野：地震に対するアーチダムの安定性，電研所報 5-5，昭和 30 年
- 2) 小坪：アーチダムの振動性状におよぼす貯水竝に岩盤変形の影響，土木学会年次講演会，昭和 34 年
- 3) Zienkiewicz：Earthquake Hydrodynamic Pressures on Arch Dam, by Electric Analogue Solution, P.I.E.C. 1963.
- 4) 畑野：水の弾性による地震時動水圧の共振に関する吟味，土木学会論文集 129 号，昭和 41 年

(1966.1.26・受付)