

水の弾性による地震時動水圧の共振に関する吟味

AN EXAMINATION ON THE RESONANCE OF HYDRODYNAMIC PRESSURE DURING EARTHQUAKES DUE TO ELASTICITY OF WATER

畑 野 正*

By Tadashi Hatano

1. 緒 言

Westergaard¹⁾ によってダムに対する地震時動水圧の存在が指摘されたが、著者はかつてこの解の欠点を修正してつきのごとき式²⁾を提示した。すなわち二次元の無限に長い池の一端に直立した剛体の壁が単弦振動をするときの解を速度ポテンシャル f による波動方程式 (1) によって、(2)の境界条件で解き、(3)の解を得たのである。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{W_0}{gK} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \dots\dots\dots(1)$$

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{4\alpha W_0}{j_0} \frac{\sinh k_0 h}{\sinh 2k_0 h + 2k_0 h} \cosh k_0(y+h) \cos(\omega t - j_0 x) \\ & + \sum_{m=1}^r \frac{4\alpha W_0}{j_m} \frac{\sin k_m' h}{\sin 2k_m' h + 2k_m' h} \cos k_m'(y+h) \cos(\omega t - j_m x) \\ & - \sum_{m=r+1}^{\infty} \frac{4\alpha W_0}{j_m'} \frac{\sin k_m' h}{\sin 2k_m' h + 2k_m' h} \cos k_m'(y+h) e^{-j_m' x} \sin \omega t \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} k_0 \text{ は } k_0 \tanh k_0 h &= \frac{\omega^2}{g}, \\ k_m' \text{ は } k_m' \tan k_m' h &= -\frac{\omega^2}{g}, \text{ を満足する値} \\ r \text{ は } c^2 > k_m'^2 \text{ を満足するまでの } m \text{ の値とする} \\ \text{ただし } c^2 &= \frac{W_0 \omega^2}{gK}, j_0^2 = c^2 + k_0^2, j_m^2 = c^2 - k_m'^2, \\ j_m'^2 &= k_m'^2 - c^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

その後の研究³⁾において著者は式(3)の第2項が水中音速より早く伝播するという理由でこれを省略すべしとしたが、後に詳述するように音速で進行する平面波の進行方向とある角度をなした方向の見掛け上の速度は音速

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{4\alpha W_0}{k_0} \frac{\sinh k_0 h}{\sinh 2k_0 h + 2k_0 h} \cosh k_0(y+h) \cos(\omega t - k_0 x) \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\alpha W_0}{k_m'} \frac{\sin k_m' h}{\sin 2k_m' h + 2k_m' h} \cos k_m'(y+h) e^{-k_m' x} \sin \omega t \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

地震時動水圧に関するその後の研究としては机上の理論では Werner and Sundquist⁴⁾, 小坪助教授⁵⁾, その他により種々の場合につきくわしく論ぜられた。その計算の前提は著者の場合とほとんど同様である。しかし多くの場合共振の問題に関してはこれを避けており、共振周波数以下の場合につき論じているのが一般である。

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left. -\frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=-h} = 0 \\ \text{(ii)} \quad & \left. -\frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\alpha g}{\omega} \cos \omega t \\ \text{(iii)} \quad & \left. \frac{W_0}{g} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + W_0 \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ここに池の表面を上流向きに x 軸とし、鉛直の壁体上流面を上向きに y 軸とし、壁体は $\frac{\alpha g}{\omega^2} \sin \omega t$ で振動するとしている。

W_0 は水の単位体積重量、 K は水の体積弾性率、 h は池の深さである。

自体より大きくなるのであって、したがって音速より大きいという理由で省略するのは誤りである。省略の理由にはむしろ池底からの音圧の反射がないという別の理由によるべきであることを後にくわしく述べる積りである。(3)に明らかなように j_m または j_m' が 0 に近づくと動水圧は共振による増大を示すことになる。

なお後の議論に必要となるので、ここに水の体積弾性率 K が無限大となったときの解を示しておく。この場合、(1)は Laplace の方程式となり、(2)は変わらず、(3)は(5)のごとくなって共振点は消えてしまう。(3)の共振周波数より少し小さい周波数以下では(3)と(5)の与える動水圧の大きさはほとんど等しくなる。

ただ小坪助教授のみは積極的にこの点を計算に組入れ、たとえば(3)の第2項に相当する壁体と位相の異なる圧力波が構造物の振動の減衰に役立つとさえ論⁶⁾じている。

一方地震時動水圧の実験的研究としては著者が行った室内実験^{7),8)}がある。これらは共振周波数より小さい周波数における実験で(5)による計算とよく一致した

* 正会員 工博 電力中央研究所技術研究所

結果を得ている。ついで塚原重力ダムにおいて起振機による満水時の振動実験⁹⁾を行ない、動水圧の共振時にあたる周波数においてダムの振幅が全く増大しないことを知ることができた。著者はこの事実から共振現象なしとして、ダムの振動の動的解析に堤体と同位相の圧力すなわち(5)の第2項にあたるもののみを採り、動水圧を仮想質量におきかえて振動方程式に入れる方法を提案して来た^{9),10)}。その後著者の同僚高橋 忠は藤原重力ダムにおいて起振機による振動実験を行ない動水圧を測定¹¹⁾して、その共振周波数の前後を通じて全く圧力が増大せぬこと、全般を通じて(5)の第2項に相当するものに振動形を考慮した値と一致することを明らかにした。

しかしこの場合堤体と圧力との間の位相差については実験精度上ふれていない。

高いダムの耐震問題を論ずる場合、明らかに水の弾性による共振周波数より高い振動数の範囲が問題になる。したがって共振問題を避けることは決してできない。一方実験的事実は共振のないことを教え、机上の理論と矛盾する。

著者はこの矛盾を解決し、著者の提案した仮想質量による動水圧の取扱いの正当性を明らかにするため、ここに著者の曾ての理論解を再吟味し、また室内において動水圧の共振現象を正確に追求したいと考える。

2. 動水圧の理論解の再吟味

著者の解(3)の第1項は x 方向に進行する重力波である。その伝播速度は $\frac{\omega}{j_0}$ であり、壁面において壁体との位相差は $\pi/2$ である。第2項は x 方向に $\frac{\omega}{j_m}$ の速度で進行する音波であり、壁面において壁体との間に $\pi/2$ の位相差をもつ。

$$\frac{\omega}{j_m} = \frac{\omega}{\sqrt{c^2 - k_m'^2}} > \frac{\omega}{c} = \sqrt{\frac{gK}{W_0}} = C_0$$

となって x 方向への伝播速度は水中音速 C_0 より速い。音波工学の示すところ¹²⁾では、 x 方向に θ なる角度をなして音速 C_0 で伝播する平面波があるとき x 方向の見掛けの速度は $C_0 \sec \theta$ となる。すなわち x 方向と $\theta = \sec^{-1} \frac{c}{\sqrt{c^2 - k_m'^2}}$ なる角度をなす平面波の集合が第2項であるということが出来る。したがって $c = k_m'$ なる共振条件は、 $\theta = \pi/2$ すなわち平面波の成分が鉛直に池中を上下するということである。この条件を書き換えれば次式を得る。

$$\frac{h\omega}{2\pi} = n \frac{C_0}{4} \dots\dots\dots(6)$$

ここに $n=1, 3, 5, \dots$

(6)は $4h$ を音速が通過する時間が壁体の振動周期の奇数倍であることを示している。いま池底における圧力の共振を考えて見るに、+の波が発生して鉛直に伝播し自由面において-となって反射し、これが池底で再び-

となって反射し自由面で反射して+となって帰って来る。この二往復の時間が振動周期と合致すれば、池中のすべての深さの点において+の音圧が重なって次第に共振を起こすと解釈される。 n の値が1以外の奇数値の場合も同様であるが、偶数値にあたる場合に壁に+の波が生ずるとき-の波が帰って来て圧力はこのために減少することになる。第3項は壁体の運動といたるところで同一の位相をなす、もはや波動とはいえない圧力で、距離にしたがって減衰している。しかしこの項も(6)と同じ条件で共振を起こすことを示しており、この共振周波数が音波工学¹³⁾にいうしゃ断周波数に相当することになる。すなわちしゃ断周波数以下では波動とはならないのである。

つぎに著者の用いた境界条件(2)を吟味して見よう。

(i)は池底においてこれに直角方向の水分子の速度が0ということである。この条件は水分子の慣性を考える限りにおいては正しいが、音波工学的にはどのような意味をもつか。いま音響インピーダンスなる概念を用いて、池底における条件を書いて見るとつぎのようになる。

$$\left. \frac{W_0}{g} \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{y=-h} = \left. -\frac{W_0}{g} C_0 \beta \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=-h} \dots\dots(7)$$

ここに、 β は池底材料と水の音響インピーダンスの比で(8)で与えられる。

$$\beta = \frac{W_1 C_1}{\frac{W_0}{g} C_0} \dots\dots\dots(8)$$

W_1 : 池底材料の単位体積重量

C_1 : 池底材料中の音速

すなわち(i)なる条件は(7)の β を無限大としたものであり、換言すれば水にくらべて池底材料の音響インピーダンスが無限に大きいと前提していることになる。

(iii)も同様に検討すれば、自由表面において空気の音響インピーダンスを0としたことになる。要するに著者の解は音波工学的には音圧が完全に反射する理想的な条件の下における解ということになる。

しからば水分子の慣性によって生ずる動水圧はどのようなものか。波動方程式は水分子の運動方程式と連続の方程式とから導かれているから、これを用いた解の中には慣性による部分が含まれていなければならない。水が圧縮性をもつとして取扱ったことにより解の中に音圧と慣性の両者が含まれて来たと解釈することができる。水を非圧縮性とした場合の解は音速無限大の場合に相当し、音波の反射の影響の全く除かれた解(5)であって、重力波と慣性による圧力の二項からなると解釈することができるであろう。

3. 動水圧の共振に関する実験

著者は動水圧の水の弾性に起因する共振につき、つぎ

図-1

TEST ARRANGEMENT

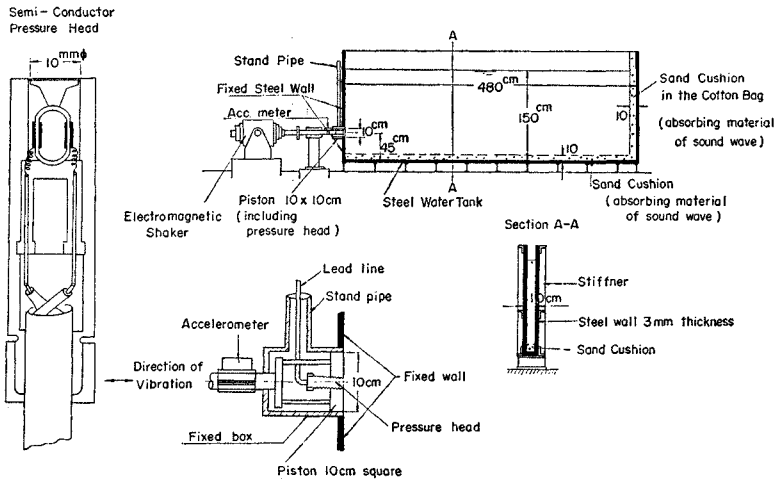
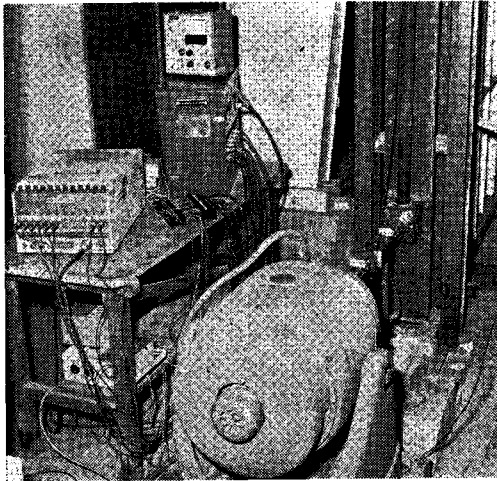


写真-1



のごとき実験を行なった。図-1, 写真-1 に示すごとき鋼製の水槽 (480×180×10 cm) に水深 150 cm の水を入れ, 10 cm 幅の壁に 10 cm 角の正方形ピストンをつけて, 電磁式振動子により各種の周波数の正弦振動を与えた。ピストンの壁面には半導体ゲージによる圧力計をつけ, ピストン後方のシャフト上にひずみ計およびチタンサンバリウムによる加速度計をつけて電磁オシロに圧力と加速度を同時記録した。これにより加速度に対応した動水圧を正確に読みまた加速度と動水圧の間の位相差の概略値を求めた。圧力計, 加速度計, および電磁オシロについてはすべて 300 c/s まで出力, 位相について十分な精度をもつものを用いた。

第一の実験は鋼製水槽に吸圧のクッションを全く使用しない場合である。図-2 に示すように (6) で計算される共振周波数 240 c/s に明瞭な共振現象を示した。この場合圧力と加速度との間に約 $1/4\pi$ の位相差が認められた。最大共振圧力は 1 g の加速度に対し 162 gr/cm² で

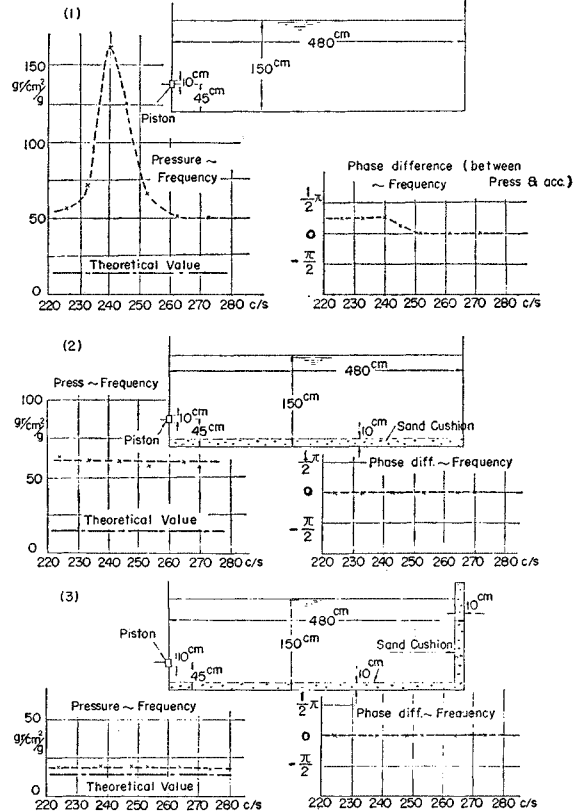
ある。共振の前後で圧力は 50 gr/cm² に減少している。

第二の実験はタンクの底部に細砂を 10 cm の層にしきならした場合である。全水深は前と同じく 150 cm である。この場合は全く共振現象は見られず 1 g の加速度に対し一様に 60 gr/cm² の圧力が生じ, 圧力と加速度との間の位相差はすべて 0 であった。

第三の実験はピストンに対向した水槽の鉛直壁面と水

図-2

TEST RESULTS



槽の底部に細砂 10 cm 厚の層をおいた場合である。鉛直の砂層は木綿の袋に砂をつめて作った。この場合はすべて圧力レベルは低下して 1 g の加速度について 20 gr/cm² となり、圧力と加速度との間の位相差はすべて 0 となった。

第二、第三の実験で (6) による第一の共振点は水深を 140 cm とすれば 257 c/s と計算される。

4. 考 察

上記の実験により地震時動水圧の共振につき重要な点が明らかになった。わずか 10 cm の砂の層で音圧は完全に吸収された。そして池底の反射がなければ全く共振現象は見られず圧力と壁体との間に位相差がない。第二の実験では対向壁の吸収がなく、ピストンによって水中に与えられた振動エネルギーが貯留して音圧レベルを上げているが、第三の実験では底部はもちろん対向壁においても音圧が吸収されて全体の音圧レベルが下ったと解釈される。音波工学の示す所¹⁴⁾では 10 kc 程度以上の周波数の場合の砂や泥の水中音圧の反射率は垂直入射の場合で約 10% と測定されている。低周波の場合の既往の測定値は見あたらないが、300 c/s 以下のごとき低周波では反射率が 0 に近いことを本実験が初めて示したことになる。

音圧の垂直反射率は一般に次式で示される。

$$R_p = \frac{\frac{W_1}{g} C_1 - \frac{W_1}{g} C_0}{\frac{W_1}{g} C_1 + \frac{W_1}{g} C_0} \dots\dots\dots(9)$$

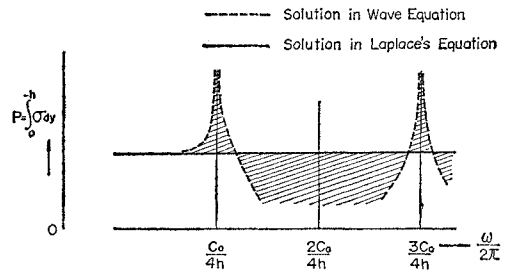
式 (9) により水中から池底の砂層に音圧の入射するときの反射率を計算すればほとんど 0 に近いことが知られる。自由表面上で水中から空中に音圧が入射するときは、空気と水の音響インピーダンスの比が 4×10^{-4} 程度であるところから R_p はほとんど -1 に近く、位相を逆転してほとんど完全に反射すると見てよいであろう。

以上の考慮から実際の動水圧は (1) を (2) の条件で解くとき (2) の (i) の代りに実際の反射条件に合致するよう (7) を用いて解くべきであることがわかる。一般のダムにおいては本実験が示したように、また実物ダムの振動実験結果が示すように反射率 0 として取扱ってよいであろう。この場合はすでにのべたように水の体積弾性率を無限大として、音圧の反射の影響がない場合と等値と考えることができる。図-3 は壁体に作用する全動水圧と振動周波数の関係を図式的に描いたもので点線は (3) による圧力、実線は (5) による圧力である。斜線の部分は (5) の圧力部分に加わる音圧の反射による部分であると考えることができる。

以上のごとき見地から実験の第三の場合を数値的に検討して見よう。

Laplace の方程式を (2) の条件で解く。この場合

図-3



(ii) は

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\alpha g}{\omega} \cos \omega t, & (-h+b) - a \leq y \leq (-h+b) + a \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, & -h < y < (-h+b) - a \\ & & (-h+b) + a < y < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

を用いる。

ここに b はピストン中心の底からの高さ、 $2a$ はピストンの高さである。

$$\begin{aligned} \sigma &= 8\alpha \frac{W_0}{k_0} \frac{\sinh k_0 a \cosh k_0 b}{\sinh 2k_0 h + 2k_0 h} \\ &\quad \times \cosh k_0 (y+h) \cos (\omega t - k_0 x) \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} 8\alpha \frac{W_0}{k_m'} \frac{\sin k_m' a \cos k_m' b}{\sin 2k_m' h + 2k_m' h} \\ &\quad \times \cos k_m' (y+h) e^{-k_m' x} \sin \omega t \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

ピストン中心部の圧力は第三の実験の場合 $b=35$ cm, $a=5$ cm, $h=140$ cm として計算すれば (11) の第 1 項の係数は第 2 項の 10^{-3} 倍程度となるので省略すれば、

$$\sigma = -14.78 \alpha W_0 \sin \omega t$$

と計算される。図-2 中の理論値はこの値を記したもので、第三の実験値にほぼ近い値を与えることがわかる。

以上から池底から音圧の反射がないときの壁体の動水圧は Laplace の方程式を (2) の境界条件で解けば与えられるということができる。

5. 結 論

以上の実験と考察により明らかになった点をあげればつぎのごとくである。

(1) 著者がかつて提示した地震時動水圧の理論解は、池底および自由表面からの音圧が完全に反射する理想的条件の場合の解であった。水の弾性による動水圧の共振は池中を上下方向に伝播する平面波の成分が壁体により生ずる圧力波とちょうど重り合うことにより生ずる現象であると解される。

(2) 音圧が池底から実際に反射される程度を境界条件に入れて波動方程式を解けば現実的であろう。しかし実験の結果わずかの厚さの砂の層でも 300 c/s 以下の低周波の音圧が入射する場合ほとんど反射を生じないことが明らかになった。この為動水圧の共振現象は起ころ

ず、振動する壁体とこの上に生ずる動水圧の間に位相差が生じないことが認められた。共振現象を生じないときの動水圧の大きさおよび位相は波動方程式中の水の体積弾性率を無限大として解いた値に一致する。これは体積弾性率を無限大にすることにより音圧反射の影響が除かれるためであると考えられる。

(3) 著者が先に提示した、ダム of 動的耐震計算法において、動水圧をダムの運動と同位相の仮想質量として取扱う考え方は、現実のダムにおいてはすべての振動周波数において正当であることが明らかにされた。

(4) アーチダムのような複雑な振動形をもつ場合の動水圧を求める方法を開発し、これにより動的耐震計算における計算の精度をあげることがつぎの課題である。

参 考 文 献

- 1) Westergaard: Hydrodynamic Pressure during Earthquakes, Proc. A.S.C.E. 1933.
- 2) 著者: 重力堰堤に作用する地震力の影響 (その2) 土木学会論文集 昭 22,23 年度, 昭 24 年
- 3) 著者: 動堰堤に作用する地震力の影響 (その3) 土木学会論文集 第5号 昭 25 年
- 4) Werner and Sundquist: Tran. A.G.U. 30-5, 1949.
- 5) 小坪清真: アーチダムに働く地震時動水圧, 土木学会論文集 44 号 昭 32 年, その他
- 6) 小坪清真: 重力ダムの耐震性について, 土木学会論文集 55 号 昭 33 年
- 7) 著者: 地震時動水圧の模型実験, 土木学会誌 36-11 昭 26 年
- 8) 著者: 固定壁に対する砂の振動圧, 土木学会論文集 80 号, 昭 33 年
- 9) 著者: 塚原重力ダムの振動実験とその考察, 土木学会論文集 59 号 昭 33 年
- 10) 著者: 地震に対するアーチダムの安定性, 電研所報 5.5 昭 30 年
- 11) 高橋 忠: コンクリートダムの振動実験および地震観測結果とその考察, 第8回国際ダム会議
- 12) 超音波技術便覧: 62 ページ
- 13) " : 67 ページ
- 14) " : 624 ページ

(1965.11.8・受付)